

Московский государственный  
гуманитарно-экономический  
университет

**В.А. Кадымов**

**Контактные задачи  
пластического течения  
в тонком слое**

*Монография*

Москва  
2015

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный  
гуманитарно-экономический университет (МГГЭУ)

---

**В.А. Кадымов**

**Контактные задачи пластического течения  
в тонком слое**

*Монография*

Москва  
2015

УДК 539.214; 539.374  
ББК 22.19; 22.171  
К 11

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и механотроники Национального исследовательского университета «МЭИ» М.Н.Кирсанов

**В.А. Кадымов**

К 11      Контактные задачи пластического течения в тонком слое. Монография.  
– М.: МГГЭУ, 2015. – с.

В монографии излагается современное состояние развития проблемы математического моделирования процессов пластического течения в тонком слое. Особое место в монографии занимает теория течения в тонком пластическом слое, предложенная А.А.Ильюшиным. Приводятся постановки краевых задач об осадке и растекании пластического слоя между сближающимися плоскостями массивных плит. Перечислены математические методы, применяемые при решении практических задач. Разобрано большое количество контактных задач пластического течения в тонком слое.

Книга предназначена для специалистов, интересующихся нелинейными краевыми задачами математической физики, задачами прикладной теории пластичности и теории обработки материалов давлением. Представленные в работе аналитические решения модельных задач рекомендуются студентам старших курсов факультета прикладной математики и информатики, а также экономического факультета МГГЭУ при изучении курса уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений.

© Кадымов В.А., 2015  
© МГГЭУ, 2015

## Введение. Краткий обзор современного состояния проблемы

Выделим достаточно широкий класс задач пластического течения материала в сравнительно тонком слое между сближающимися поверхностями тел инструмента (рис. 1). К ним примыкает большинство технологических задач обработки давлением, таких как штамповка и прессование

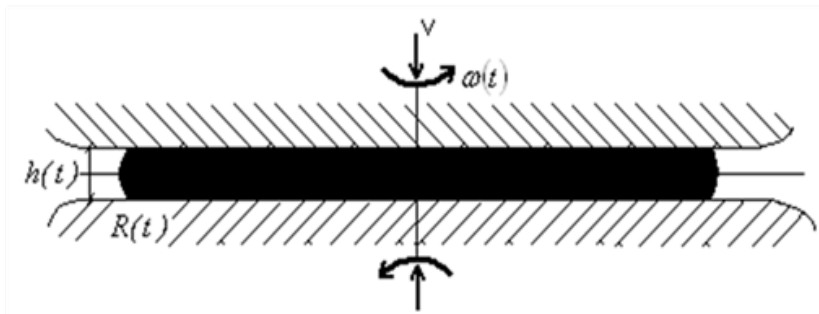


Рис. 1. Пластические течения в тонком слое

тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка, дрессировка и др. Это сложные объемные задачи пластического формоизменения с разнообразием параметров, определяющих свойства материала. В рассматриваемых процессах развиваются высокие давления, на порядок превышающие сдвиговые свойства материала слоя, так что в начальном приближении свойства материала в слое близки к свойствам гидродинамической жидкости [1, 7]. Практически вдоль всей контактной поверхности наблюдается проскальзывание, при котором поверхности контакта совпадают с поверхностями скольжения и силы трения на них достигают своего наибольшего и наименьшего значений, по величине равных пределу текучести материала слоя [3]. Требования к точности конечной детали определяют другую особенность этих процессов. Как известно [7], большие контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей тел инструмента, соизмеримые с толщиной пластического слоя. А следовательно, учет упругих перемещений тел инструмента становится неоправданным. В высокоскоростных процессах обработки давлением существенную роль играют силы вязкости и инерции, значительно затрудняющие моделирование физического процесса. В указанных процессах важную роль играют температура и тепловые пото-

ки: выделение тепла за счет работы сил трения скольжения на поверхности контакта и диссипация механической энергии. Следует отметить, что в горячих процессах обработки давлением происходит интенсивный теплообмен с внешними телами, в результате чего в начальной стадии процесса наблюдается затвердевание приконтактных слоев («холодная сварка»). В некоторых случаях неоправдан неучет влияния давления на свойства материала, грубым оказывается предположение об объемной несжимаемости. Следующая особенность таких процессов состоит в том, что в них не определены как граничные условия, так и сами границы заранее неизвестны. В связи с чем представляет интерес постановка и решение нестационарной задачи о свободном растекании пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям [6, 7]. Не исследована в достаточной мере проблема осадки пластических слоев с использованием сложной нагрузки (осадка с вращением и др.), что существенно сказывается на распределении силовых и кинематических параметров процесса. В частности, наложение относительного вращения при осадке приводит к уменьшению максимального значения контактного давления, а следовательно, и нормального упругого перемещения тел инструмента. Последнее может привести к экономии энергозатрат, что также важно, если учесть, что мощности прессов на практике ограничены.

На основе анализа решения задачи задачи Л. Прандтля об осадке полосы А.А. Ильюшин сформулировал ряд гипотез кинематического характера и относительно сил трения на контакте, с помощью которых построил эффективную, двумерную теорию течения в тонком пластическом слое, позволяющую качественно исследовать указанные процессы. В дальнейшем эта теория получила обоснование на случай пластического течения по упруго-деформируемым поверхностям [7], по поверхностям с ярко выраженной фактурой (анизотропия свойств сил трения на контакте) [16, 27], для высокоскоростных процессов [9], для процессов обработки материалов как объемно сжимаемых, так и обладающих свойствами со структурной зависимостью (порошковые, спеченные материалы) [8].

В главе 1 представлены распространенные на практике постановки краевых задач течения в тонком пластическом слое.

В главе 2 поставлены и решены прямые и обратные задачи течения пластических слоев, моделирующие технологические процессы штамповки ребристых поковок. Приводятся известные точные решения задач течения в тонком пластическом слое.

В главе 3 перечислены различные формы представления уравнения свободного растекания пластического слоя на плоскости. Приводятся способы получения точных решений уравнения растекания, в том числе и

метод введения автотомельных переменных. Выписаны точные частные решения, среди которых имеются все известные и некоторые новые, принадлежащие автору.

В главе 4 ставится краевая задача о пластическом сжатии биметаллической полосы между параллельно сближающимися плоскостями массивных плит. Выписано условие относительно геометрических и механических характеристик, обеспечивающее пластическое течение во всем объеме.

В главе 5 получено точное решение несимметричной задачи о свободном растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев с разными свойствами, в модели «идеальной жидкости». В частности, показано, что линии раздела пластических сред остаются прямыми в течение всего процесса растекания.

В главе 6 предлагаются обобщения постановок известных краевых задач растекания пластических слоев по упруго-деформируемым поверхностям и их новые аналитические решения. В предположении, что упругие тела, контактирующие с пластическим слоем, описываются моделью винклеровского основания, выведено точное нелинейное дифференциальное уравнение эволюционного типа для определения контура растекающегося пластического слоя. Получены поправки к решениям задач о растекании пластического слоя по недеформируемым поверхностям, вызванные учетом упругих деформаций воздействующих тел. Ставится полуобратная задача течения пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям, а именно, требуется задать такую начальную толщину пластического слоя, которая в результате пластической осадки обеспечивает получение конечной тонкостенной детали постоянной толщины.

В главе 7 представлены результаты экспериментов по осадке между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и первоначально имеющего форму прямоугольника или сектора в плане. Проводится их сравнение с аналитическими решениями, полученными в рамках общей и упрощенной постановок краевых задач. Выделены экспериментальные закономерности, которые позволяют корректно выбрать математическую модель для описания рассматриваемых течений.

В завершении работы приводится заключение, и список использованной литературы.

# ГЛАВА 1 ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ

## 1.1. Задача Прандтля: решение и следствия

Пусть между жесткими шероховатыми сближающимися плитами по оси  $z$  сжимается пластическая полоса, вынужденная течь в плоскости  $xz$ . Расстояние  $h(t)$  между плитами весьма мало сравнительно с длиной  $2l$ , определяющей размер области, занятой пластическим материалом, в направлении оси  $x$ . Начало координат возьмем в точке разветвления течения массы и будем рассматривать сечения с координатой  $x$ , достаточно удаленные от начала координат и края  $x = \pm l$ :

$$\frac{|x|}{z} \gg 1, \quad \frac{l - |x|}{h} \gg 1 \quad (1.1)$$

В этих сечениях отличны от нуля напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$ . Интенсивность напряжений и условие текучести выражаются соответственно формулами:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \equiv \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2} + \sigma_{xz}^2 = \tau_s \quad (1.2)$$

Если пренебречь силами инерции, то для определения напряжений получаем как бы статически определимую задачу:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$
$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{xz}^2 = \tau_s^2$$

На самом деле, задача не является статически определимой, поскольку основное граничное условие является кинематическим, так как заданы скорости сближения плит:

$$z = \frac{h(t)}{2}, w = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt}; \quad z = -\frac{h(t)}{2}, w = -\frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \quad (1.4)$$

Как следствие, кроме уравнений (1.3), для решения задачи, необходимо рассматривать еще и условие несжимаемости массы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

а также соотношение:

$$\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2\sigma_{xz}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}} \quad (1.6)$$

Необходимо также рассмотреть второе граничное условие на поверхностях контакта  $z = \pm \frac{h(t)}{2}$ , которое должно определить закон трения и граничные условия на поверхностях  $z = \pm l$ .

Л. Прандтль, исходя из (1.3), выдвинул следующий постулат:

«...надо ожидать, что при пластическом течении поверхности давления будут являться поверхностями скольжения», и далее пишет: «То напряженное состояние, которое асимптотически осуществляется на достаточно большом расстоянии от свободного края, доступно для расчета» [2], после чего находит известное решение системы (1.3), обладающее тем свойством, что  $\sigma_{xx} - \sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  зависят только от координаты  $z$ .

Из (1.3) имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xz} = 0 \quad (1.7)$$

Поэтому  $\sigma_{xz}$  — линейная функция от  $z$ , и, следовательно:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\tau_s 2z}{h}, \quad \sigma_{xx} - \sigma_{zz} = 2\tau_s \sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}}$$



Таким образом, согласно (1.3) решение Прандтля принимает вид:

$$\sigma_{xx} = \tau_s \left( \frac{2x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} - C \right), \sigma_{zz} = \tau_s \left( \frac{2x}{h} - C \right), \sigma_{xz} = -\frac{\tau_s 2z}{h} \quad (1.8)$$

Причем,  $C = \frac{2l}{h}$  с точностью до величин порядка единицы.

Надаи рассматривает  $u, w$  в (1.5), (1.6) как перемещения точек массы и дает для них выражения, соответствующие решению Прандтля (1.8):

$$u = -w_0 \left( \frac{2x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} - C_1 \right), \quad w = \frac{w_0 2z}{h} \quad (1.9)$$

Отсюда он заключает, что точки, лежащие по деформации на вертикали ( $x = const, z = 0$ ), после деформации располагаются на полуэллипсе и деформация сдвига обращается в  $\infty$  при  $z = \pm \frac{h(t)}{2}$ .

Решение Прандтля (1.8) справедливо для малых и конечных деформаций. Кажущееся ограничение решения Надаи состоит в том, что уравнения (1.5), (1.6) в смысле Надаи справедливы лишь для весьма малых деформаций. Однако, это ограничение отпадает, если  $u, w$  рассматривать как скорости течения, а  $x, z$  — не как лагранжевы, а как эйлеровы координаты; решение (1.9) при этом сохраняется и, согласно (1.4),  $w_0 = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt}$ .

Переходя на основании (1.9) к лагранжевым координатам:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

и интегрируя уравнения

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{x}{h} - \sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}} + C_2(h), \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{h},$$

для совокупности точек, до начала течения лежащих на прямой  $x_0 = const$ , получим вновь уравнение эллипса:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \left( \xi = (x)_z - (x)_{z=\frac{1}{2}h}, \quad a = \frac{h_0^2 - h^2}{2}, \quad b = \frac{h}{2} \right)$$

И убеждаемся, что первоначально вертикальные «риски» в процессе течения превращаются в полуокружности, и при еще больших деформациях эллипсы сильно вытягиваются в направлении оси  $x$ . Однако, при фиксированном  $h$  (т.е. в определенный момент времени  $t$ ), форма «рисок» не зависит от  $x_0$ , т.е. все «риски» области (1.1) деформируются одинаково.

Весьма важен вопрос единственности решения задачи о сжатии массы между плитами в области (1.1). Можно утверждать, что решение (Прандтля-Надаи) (1.8) в области (1.1) является единственным, имеющим физический смысл решением уравнений (1.3), (1.5), (1.6) при условии (1.4) с точностью до преобразования  $h \rightarrow \alpha h$ , где  $\alpha \geq 1$  — постоянное число.

Считается, что решение имеет физический смысл, если при  $l \rightarrow \infty$  в области (1.1) оно единственно.

Наиболее важным следствием этого решения является наличие проскальзывания пластической массы по поверхностям контакта  $\left( z = \pm \frac{h(t)}{2} \right)$

и постоянство касательного напряжения. Постановка задачи с требованием полного сцепления вещества массы с плитой и непрерывности скорости  $u$  по  $z$  вблизи  $z = \pm \frac{h(t)}{2}$  в области (1.1) лишена смысла, так как она

противоречит уравнениям (1.3)–(1.6). Как бы ни была шероховата плита, скольжение происходит в самом материале пластической полосы. Учитывая наличие высокого давления, такое проскальзывание может и не приводить к видимому разрушению. В качестве примера можно отметить так называемую «холодную сварку».

Из сказанного выше получаем несколько важных выводов:

1. Девиаторные компоненты напряжений в области (1.1) по отношению к среднему гидростатическому напряжению — суть малые порядка

$$\frac{1}{2} \frac{h}{l} \text{ сравнительно с } 1.$$

2. Среднее гидростатическое напряжение с той же точностью постоянно по  $z$ .

3. Контактное напряжение трения равно пределу текучести на сдвиг, а скорость скольжения отлична от нуля.

4. Среднее по толщине значение полуразности нормальных напряжений близко к пределу текучести на сдвиг:  $\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \right)_{cp} = \frac{\pi}{4} \tau_s$ .

5. Скорость течения пластической массы в направлении оси  $x$  в области (1.1) практически не зависит от  $z$ . Разность осевой ( $z=0$ ) и средней по  $z$  скоростей — суть малая порядка  $\frac{h}{4l}$  от средней скорости, причем, эта разность наблюдается за счет падения скорости в тонких слоях, прилегающих к контактными поверхностям.

6. Скорости деформаций и их интенсивность не зависят от  $x$ :

$$v_{xx} = -v_{zz} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, v_{xz} = \frac{8}{h} \frac{\frac{z}{h}}{\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}}}, v_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \left| \frac{dh}{dt} \right| \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}}}$$

Средние значения скоростей деформации по толщине:

$$\bar{v}_{xx} = -\bar{v}_{zz} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \bar{v}_{xz} = 0$$

имеют интенсивность  $\bar{v}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$ . Следовательно, средние значения отношений скоростей деформаций к их интенсивности пропорциональны с постоянным множителем отношениям средних скоростей деформаций к их интенсивности:

$$\left( \frac{v_{xx}}{v_u} \right)_{cp} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{v}_{xx}}{\bar{v}_u}, \quad \left( \frac{v_{zz}}{v_u} \right)_{cp} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{v}_{zz}}{\bar{v}_u}, \quad \left( \frac{v_{xz}}{v_u} \right)_{cp} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{v}_{xz}}{\bar{v}_u} = 0$$

Представленные выше следствия были выдвинуты как гипотезы, с помощью которых А.А. Ильющин построил осредненную по толщине текущего слоя двумерную теорию течения в тонком пластическом слое (ТТПС), а затем предложил постановки краевых задач.

## 1.2. Обобщение задачи Прандтля

Рассмотрим идеально-пластический слой ширина которого значительно больше толщины, сжимаемый двумя параллельными жесткими плитами (плоская деформация). Предел текучести материала  $k = k(z)$  считаем известной функцией  $z$  [15]. Плиты предполагаются шероховатыми:

$$[\sigma_{xz}]_{z=h} = mk(h), \quad [\sigma_{xz}]_{z=-h} = -nk(-h), \quad 0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1 \quad (1.10)$$

Напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0,$$

и условию пластичности:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4k^2(z)$$

Примем, что  $\sigma_{xz}$  зависит только от  $z$ , тогда из предыдущих уравнений найдем:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = az + b, & \sigma_{zz} = -ax - c, \\ \sigma_{xx} = -ax - c + 2\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}, \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $a, b, c$  постоянные. Из условий (1.10) находим  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{1}{2h} [mk(h) + nk(-h)], \quad b = \frac{1}{2} [mk(h) - nk(-h)].$$

Постоянная  $c$  определяется из условия равновесия элемента шириной  $x$ . Так как левый край этого элемента свободен от внешних напряжений, то:

$$\int_0^x mk(h) dx + \int_0^x nk(-h) dx + \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz = 0.$$

Отсюда:

$$c = \frac{1}{h} \int_{-h}^h \sqrt{k^2(z) - (az + b)^2} dz.$$

По напряжениям (1.11) находим уравнения линий скольжения:

$$x = \int \frac{\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}}{az + b \pm k} dz + const \quad (1.12)$$

Для определения  $v_x, v_z$  имеем условие несжимаемости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.13)$$

и условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформации:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.14)$$

а также кинематическое условие на границе контакта.

$$[v_z]_{z=\pm h} = \mp V. \quad (1.15)$$

Используя уравнения (1.13), (1.14), а также граничные условия (1.15), легко находим:

$$v_z = -\frac{Vz}{h}, \quad v_x = -\frac{Vx}{h} + \frac{2V}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}} dz + C. \quad (1.16)$$

Постоянную  $C$  определяем из интегрального условия сохранения массы несжимаемого материала. Именно, поток материала через сечение  $x = const$  должен равняться расходу материала, выдавливаемого плитами справа от указанного сечения:

$$-\int_{-h}^h v_x dz = 2V(l-x). \quad (1.17)$$

Отсюда:

$$C = V \left( \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h \int_0^z \frac{az+b}{\sqrt{k^2(z)-(az+b)^2}} dz dz - \frac{1}{h} \right).$$

Распределение скоростей (11) обобщает известное распределение А. Надаи для случая однородного материала.

Из (1.11) следует, что, как и в случае однородных пластических свойств, предельное давление под плитами распределяется по линейному закону. Отметим, что напряжения (1.11) не удовлетворяют условиям на конце  $x=0$  и условию  $\sigma_{xz}=0$  при  $x=l$ , а скорости (1.16) в середине полосы не соответствуют действительному распределению скоростей, т.к. в середине полосы у поверхностей плит материал не переходит в пластическое состояние. Поэтому решение (1.11), (1.16), как и решение Прандтля-Надаи, близко к точному решению лишь на достаточном удалении от края и центра полосы.

Рассмотрим случай, когда зависимость  $k(z)$  — линейная, а плиты абсолютно шероховатые  $m=n=1$ . В этом случае:

$$c = \frac{\pi}{2} \sqrt{k(h)k(-h)},$$

а линии скольжения являются кривые

$$\sqrt{1 - \frac{z^2}{h^2}} \pm \arcsin \frac{z}{h} = \frac{\left[ \frac{k(h)}{k(-h)} \right]^{\pm \frac{1}{2}} x}{h} + const \quad (1.18)$$

Выражение для постоянной  $c$  не приводим в настоящем тексте в виду его громоздкости. Уравнения (1.18) линий скольжения отличаются от

уравнений циклоид лишь множителем  $\frac{\left[ \frac{k(h)}{k(-h)} \right]^{\pm \frac{1}{2}} x}{h} + const.$

Заметим, что решение (1.11), (1.16) имеет смысл лишь в том случае, если выполнено условие:

$$|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq k(z). \quad (1.19)$$

Если условие (1.19) не выполнено, то напряжение  $\sigma_{xz}$  и скорость  $v_x$  становятся комплексными. Предположим для простоты, что распределение  $k(z)$  симметрично относительно срединной линии  $z=0$  и, что трение на плитах одинаково, ( $b=0$ ). Отметим, что касательное напряжение  $\sigma_{xz}$  определяется лишь величиной трения на плитах и не зависит от распределения  $k(z)$  по толщине. И если  $k(z)$  при  $0 \leq z \leq h$  достаточно быстро возрастает, то условие (1.19) может не выполняться вблизи плит. Нарушение условия (1.19) означает, что весь слой не переходит в пластическое состояние. В этом случае к плитам примыкают жесткие зоны. Примем, что жесткие зоны ограничены прямыми  $z = \pm h_0$ , где  $h_0 \leq h$ . При этом напряжения и скорости в пластическом слое  $|z| \leq h_0$  определяются, как и прежде, формулами (1.11) и (1.16), в которых  $h$  следует заменить на  $h_0$ . На границах пластической зоны  $z = \pm h_0$  действует максимальное касательное напряжение, численно равное  $k(h_0)$ , так что линии  $z = \pm h_0$  являются огибающими линий скольжения. В противном случае решение (1.11), (1.16) можно было бы продолжить за линии  $z = \pm h_0$ . Величина  $h_0$  определяется условием касания графиков  $\sigma_{xz}$  и  $k(z)$ :

$$h_0 k'(h_0) = k(h_0). \quad (1.20)$$

Возьмем  $k(z)$  в виде:

$$k(z) = k(0) + \Delta k \left( \frac{z}{h} \right)^{2p},$$

где  $\Delta k = k(h) - k(0) > 0$ ,  $2p > 1$ .

Тогда:

$$\frac{h_0}{h} = \left( \frac{k(0)}{p\Delta k} \right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Так как  $\frac{h_0}{h} < 1$ , то должно быть:

$$\frac{\Delta k}{k(0)} > \frac{1}{p}, \left( p > \frac{1}{2} \right).$$

Отсюда  $\frac{k(z)}{k(0)} > 3$ . Ограничение на величину трения на плитах мы не

получили, однако, в виду малости толщины жесткого слоя, можно приближенно считать трение равным  $k(h_0)$ .

Отметим, что позже ТГТПС была развита на случай течения слоя с неоднородными пластическими свойствами по толщине, а затем и на задачи растекания пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям [7].

### 1.3. Постановка краевой задачи об осадке и растекании тонкого пластического слоя на плоскости

Пусть слой из идеально-пластического материала сжимается между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис. 2).

Основные уравнения краевой задачи в плоскости течения, согласно [1], имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (1.23)$$

где  $p$ ,  $u$ ,  $v$  — контактное давление и компоненты скорости течения;  $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$  — предел текучести пластического материала в рассматриваемой области;  $h = h(t)$  — известный закон изменения толщины слоя. Величина  $\lambda(t) = \ln(h(t_0)/h(t))$  характеризует степень деформации, где  $t_0$  — некоторый начальный момент времени.



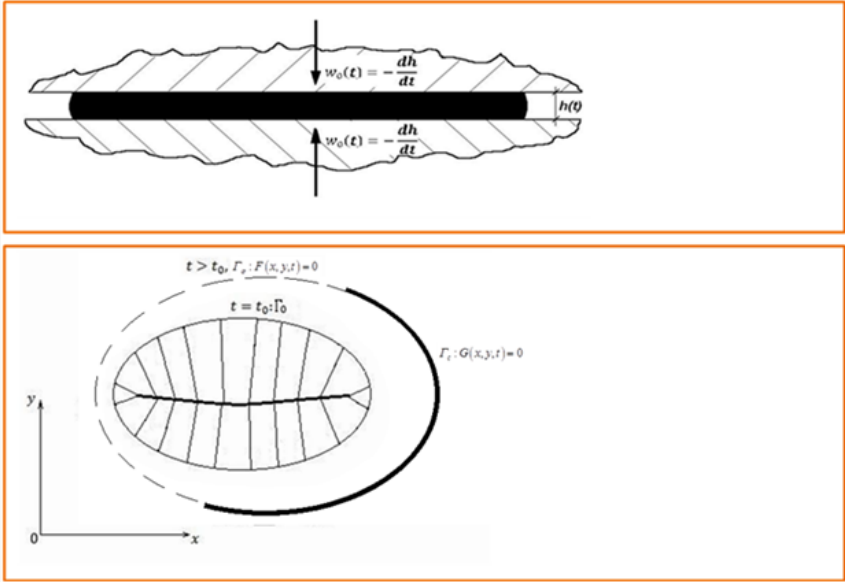


Рис. 2. Растекание пластического образца в поперечном разрезе (а), и в плане (б)

На свободной (подвижной), заранее неизвестной, границе  $\Gamma_s: F(x, y, t) = 0$  задаются три граничных условия: динамическое условие равенства нулю вектора напряжений (по двумерной теории):  $\vec{\sigma}^{(n)} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$ , эквивалентное двум скалярным:

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = 0, \quad \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0, \quad (1.24)$$

где  $\vec{n} = (n_x, n_y) = \nabla F / |\nabla F|$  — вектор нормали к границе, а компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  имеют вид:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{yy} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y},$$

а также кинематическое условие «материальности» границы

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = 0 \Rightarrow v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial F / \partial t}{|\nabla F|} \quad (1.25)$$

из которого определяется движение свободной границы.

На неподвижной (непроницаемой) границе  $\Gamma_c : G(x, y, t) = 0$  задаются два условия: динамическое условие равенства предельному значению величины тангенциальной составляющей вектора напряжений

$$\left| \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau} \right| = \left| \sigma_{xx} n_x n_y + \sigma_{xy} (n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy} n_x n_y \right| = \tau_s \quad (1.26)$$

где  $\vec{\tau} = (n_y, -n_x)$  касательный к границе вектор, и кинематическое условие непроницаемости стенки:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \nabla G = 0. \quad (1.27)$$

Условий (1.24)-(1.27) достаточно для решения краевой задачи с подвижными и неподвижными границами в области течения, описываемого системой уравнений (1.21)-(1.23).

Чтобы перейти к безразмерному описанию задачи, определим характерные величины длины  $l_0$ , скорости  $v_0 = -(dh(t=t_0)/dt)/\varepsilon$  и контактного давления  $p_0 = \sigma_s/\varepsilon$ , где  $\varepsilon = h_0/l_0 \ll 1$  — малый параметр, характеризующий относительную толщину пластического слоя (толщина слоя обезразмеривается на  $h_0$ , время на  $l_0/v_0$ ). Тогда, в безразмерных величинах уравнения (1.21)-(1.23) будут иметь вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta u - \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta v - \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda', \quad (1.30)$$

где  $\lambda' = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$ . Отметим наличие малого параметра  $\varepsilon$  в членах со старшими производными.

#### 1.4. Постановка задачи в рамках модели «идеальной жидкости»

В упрощенной модели «идеальной жидкости» ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения (1.28)-(1.30) имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda' \quad (1.33)$$

Эта система уравнений имеет более низкий порядок и, вследствие этого, требует меньшего количества граничных условий.

#### 1.5. Течение пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям

Рассмотрим задачу о течении пластического слоя в фиксированной области  $S_0(x, y)$  между двумя сближающимися поверхностями упруго-деформируемых тел инструмента. Требуется найти контактные давления  $p(x, y)$ , а также нормальные упругие перемещения  $w(x, y)$  контактных поверхностей внешних тел из решения следующей задачи [7]:

$$F(x, y, p, p_x, p_y) \equiv p_x^2 + p_y^2 - \frac{4\tau_s^2}{(h_0(x, y) + \tilde{w}p)^2} = 0, \quad (1.34)$$

$$w(\bar{x}) = \iint_{(S_0)} (K_1(\bar{x}, \bar{x}') + K_2(\bar{x}, \bar{x}')) p(\bar{x}') d\bar{x}', \bar{x} \equiv (x, y) \quad (1.35)$$

$$p|_{\partial S_0} = p_0 \quad (1.36)$$

Здесь  $h_0(x, y)$  — заданная толщина слоя, если инструменты считались бы недеформируемыми;  $K_i(\bar{x}, \bar{x}'), i = 1, 2$  — известные из эксперимента ядра, зависящие от свойств контактирующих тел, состояния поверхностей контакта, формы и размеров воздействующих тел и задающие упругие свойства тел инструмента. Предполагается, что  $h_0(x, y)$  — слабо изменяющаяся функция координат, так что  $|\partial h_0 / \partial x| \ll 1, |\partial h_0 / \partial y| \ll 1$ .

Для решения задачи (1.34)-(1.36) в работе [7] предложен метод последовательных приближений, при этом вопрос о сходимости метода остается открытым. В работах [25, 26] вместо зависимости (1.35) принималась модель винклеровского упругого основания ( $w(x, y) = \lambda p(x, y)$ ) и, на ее основе, исследовано влияние упругих деформаций контактирующих тел на процесс растекания пластического слоя; с их учетом решены задачи растекания пластического слоя в областях, ограниченных кривыми второго порядка. Не так давно получен интересный результат, состоящий в следующем: в задачах течения пластических слоев оказывается эффективным задание нормальных упругих перемещений в виде обобщенной винклеровской модели упругого основания

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k p^k,$$

где  $a_k$  — константы, характеризующие свойства контактирующих тел и определяемые из эксперимента.

В заключение укажем другие имеющиеся подходы и методы решения задач течения в тонком слое: методы асимптотического разложения по малому параметру в технологических задачах обработки давлением тонкостенных элементов конструкций, успешно развиваемые в работах Д.В. Георгиевского [18, 20]; методы осреднения по толщине текущего слоя, предложенные в [12]; обобщения задачи Прандтля, представленные в [11].

## ГЛАВА 2 ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ

Этот раздел начнем с рассмотрения прямых и обратных задач течения тонких пластических слоев.

Задача восстановления условного контура (т.е. контура, вдоль которого контактное давление принимает постоянное значение) имеет большое значение для исследования процесса формоизменения ребристых штампованных поковок: линии тока оказываются ортогональными к границе условного контура, а от направления и длины соответствующей линии тока зависит количество металла, затекшего в полость штампа под ребро жесткости поковки.

Построение условного контура и определение его взаимосвязи с законом изменения граничных давлений вдоль действительного контура существенно облегчает задачу, связанную с определением формы профиля ребра жесткости на разных стадиях формирования ребристых штампованных поковок.

### **2.1. Прямая задача: требуется восстановить линию условного контура $\Gamma_0$ по известному действительному контуру $\Gamma$ , на которой задано контактное давление $p = p(s)$ , где $S$ — параметр, изменяющийся вдоль действительного контура**

Для простоты рассуждений положим, что действительный контур в выбранной системе координат  $xOy$  совпадает с осью  $Ox$ , так что на ней  $p = p(x)$ . Кроме того, примем, что контактное давление на действительном контуре  $\Gamma$  принимает наименьшее значение  $p_0$  и оно достигается в начале координат ( $p_{\text{наим}} = p_0 = p(0)$ ).

Зададим искомую линию условного контура в виде  $y = f(x)$ . Выберем произвольную точку  $C(x)$  на действительном контуре и проведем через нее линию тока ортогонально неизвестной пока линии  $y = f(x)$  (рис. 3). Как известно [1, 6], в процессах штамповки тонких поковок постоянной толщины  $h = h(t)$  линиями тока служат прямые. Согласно теории течения в тонком пластическом слое, уравнение равновесия вдоль линии тока, исходящей из точки  $C$ , имеет вид:

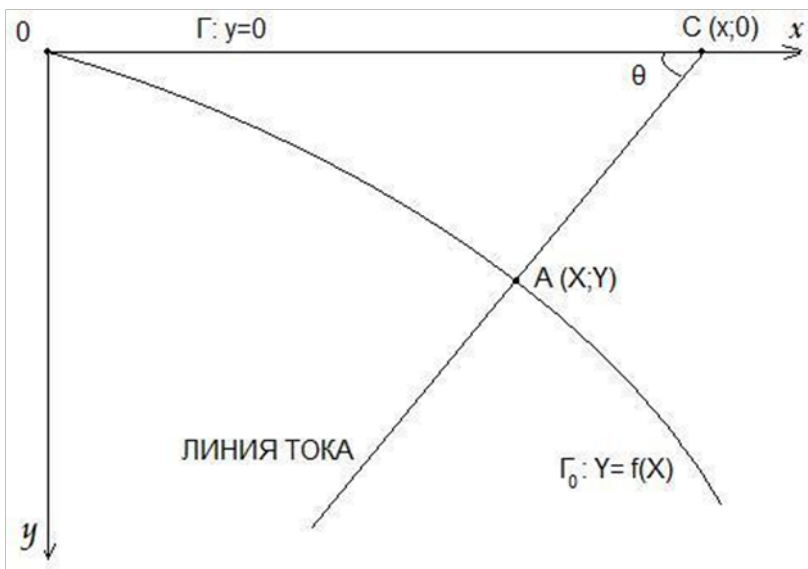


Рис. 3. К задаче о восстановлении линии условного контура

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \pm \frac{2\tau_s}{h} = const, \quad (2.1)$$

или после интегрирования:

$$p(A) - p(C) = \pm \frac{2\tau_s}{h} AC, \quad (2.2)$$

$$p(A) = p(x) \pm \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(X-x)^2 + (Y-0)^2}, \quad (2.3)$$

где  $A(X; Y)$  — произвольная точка на линии тока.

Выбрав вместо  $A$  точку пересечения линии тока с линией условного контура  $\Gamma_0(p(A) = p_0)$ , получим:

$$p_0 = p(x) \pm \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(X-x)^2 + Y^2}, \quad (2.4)$$

откуда:

$$Y^2 = \frac{h^2}{4\tau_s^2} (p_0 - p(x))^2 - (X - x)^2,$$

и искомое уравнение линии условного контура  $\Gamma_0$  принимает вид:

$$Y = \pm \sqrt{\frac{h^2}{4\tau_s^2} (p_0 - p(x))^2 - (X - x)^2} \equiv f(X). \quad (2.5)$$

В частности, если линия действительного контура  $\Gamma$  совпадает с линией условного контура ( $p(x) = p_0 = const$ ), то из (2.5) получаем, что  $X \equiv x, Y \equiv 0$ , т.е.  $AC = 0$  (линии действительного и условного контуров совпадают).

**2.2. Обратная задача: по известной линии условного контура  $\Gamma_0$ , на которой контактное давление принимает постоянное значение  $p_0$ , требуется найти распределение контактного давления  $p(s)$  вдоль заданного действительного контура.**

Для простоты рассуждений примем, что линия действительного контура совпадает с осью  $ox$ . Пусть  $A(X; Y)$  — произвольная точка на известной линии условного контура, описываемой уравнением  $Y = f(X)$ . Проведем к ней нормаль, совпадающую с линией тока и пересекающую линию действительного контура в точке  $C(x; 0)$ . Уравнение течения в тонком пластическом слое вдоль  $AC$  имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \pm \frac{2\tau_s}{h} = const,$$

или после интегрирования получаем:

$$p(C) - p(A) = \pm \frac{2\tau_s}{h} AC$$

$$p(x) = p_0 \pm \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(x - X)^2 + Y^2} \quad (2.6)$$

Остается показать, как по известной точке  $A(X;Y)$  на линии условного контура  $F(X;Y) \equiv Y - f(X) = 0$  найти соответствующую точку  $C(x;0)$  пересечения линии тока с осью  $ox$ :

$$\bar{C}\bar{A} // \text{grad}F(X;Y),$$

где

$$\bar{C}\bar{A} = (x - X; 0 - f(X)); \quad \text{grad}F(X;Y) = \left( -\frac{\partial f}{\partial X}; 1 \right),$$

или

$$\frac{x - X}{-f(X)} = \pm \frac{\partial f}{\partial X}, \quad x = X \pm f(X) \frac{\partial f}{\partial X} \quad (2.7)$$

**2.3. Обратная задача: требуется выбрать контактное давление  $p(s)$  вдоль контура  $\Gamma \equiv \partial S: F(X;Y) \equiv Y - f(X) = 0$  области  $S(x, y)$ , занятой пластическим слоем постоянной толщины  $h = h(t)$ , так, чтобы наибольшего значения  $p^*$  контактное давление достигало в заданной точке  $M(x; y) \in S$**

Очевидно, что в таком виде задача поставлена некорректно: необходимо, по крайней мере, потребовать, чтобы замкнутый контур  $\Gamma$  был выпуклым.

Известно, что все характеристические кривые  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $p = p(s)$ , проекциями которых на плоскость  $xoy$  служат линии тока (прямые), собирающиеся в одной точке, имеют общий угол наклона  $\alpha$ , так что  $\text{tg} \alpha = \frac{2\tau_s}{h}$ .

Пусть  $A(X;Y)$  — произвольная точка на контуре  $\Gamma$  (рис. 4). Тогда уравнение равновесия вдоль линии  $AM$  имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \pm \frac{2\tau_s}{h}, \quad (2.8)$$

где  $r$  — параметр вдоль прямой  $AM$ , совпадающий с длиной дуги.



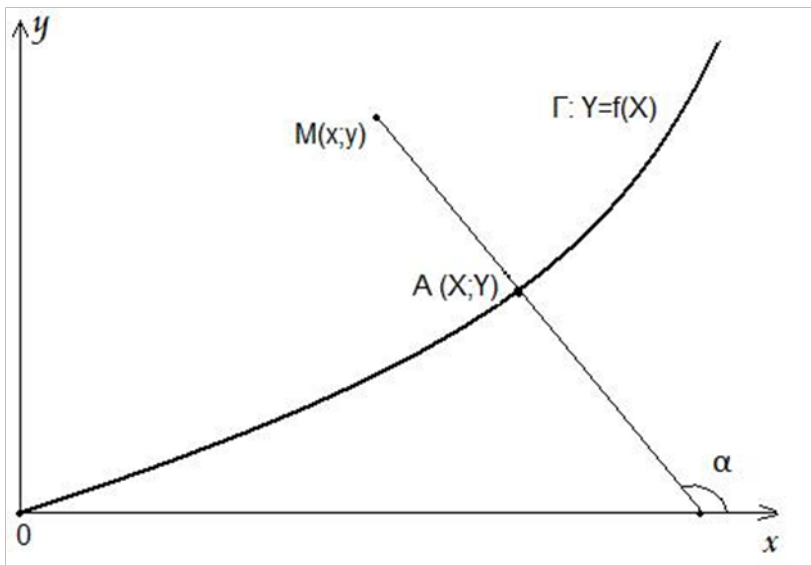


Рис. 4. К обратной задаче о восстановлении граничных условий

Интегрируем (2.8):

$$p(M) - p(A) = \pm \frac{2\tau_s}{h} MA,$$

или

$$p(A) = p * \mp \frac{2\tau_s}{h} MA,$$

причем в последнем уравнении в силу условий задачи оставляем знак минус.

Окончательно получаем:

$$p(A) = p * - \frac{2\tau_s}{h} \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2}.$$

## 2.4. Осесимметричная задача о пластической осадке и растекании тонкого кольцевого слоя

Пусть пластический слой постоянной толщины  $h = h(t)$  формы кольца в плане ( $a \leq r \leq b$ ) осаждается между параллельно сближающимися шероховатыми плоскостями массивных плит. Внутренний контур  $a = a_0 = const$  образован пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает металл, а внешний контур  $r = b(t)$  свободен от нагрузок. Перепишем дифференциальные уравнения краевой задачи:

$$grad p = -\frac{2\tau_s \vec{v}}{h |\vec{v}|}, \quad div \vec{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.9)$$

а также условия на контуре:

$$p(a_0, t) = 2\sigma_s, \quad p(b, t) = \sigma_s. \quad (2.10)$$

Здесь  $\lambda(t) = \ln(h(t_0)/h(t))h$  — параметр, монотонно меняющийся со временем,  $\sigma_s$  — предел текучести пластического материала на растяжение. В силу осесимметричности задачи будем искать решение в виде:

$$v \equiv 0, \quad u = u(r, t), \quad p = p(r, t).$$

Интегрируем уравнение несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0 \Rightarrow ru - r_0 u_0 = \frac{d\lambda}{dt} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right)$$

где  $r = r_0(t)$  — неизвестная линия ветвления течения, на которой  $u(r_0, t) = 0$  и которая находится из условия непрерывности контактного давления в точках ребра поверхности давления, совпадающих с линией ветвления течения:

$$p(r_0 + 0, t) = p(r_0 - 0, t). \quad (2.11)$$

Таким образом, радиальная компонента скорости принимает вид:

$$u(r,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( r - \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (2.12)$$

Интегрируя уравнение квазистатического равновесия (2.9), и учитывая краевые условия (2.10), найдем контактное давление:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|u|} = \begin{cases} \frac{2\tau_s}{h}, a_0 < r < r_0(t) \\ -\frac{2\tau_s}{h}, r_0(t) < r < b(t) \end{cases},$$

$$p(r,t) = \begin{cases} 2\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(r - a_0), a_0 < r < r_0(t) \\ \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(b - r), r_0(t) < r < b(t) \end{cases}. \quad (2.13)$$

Теперь можем найти линию ветвления течения, используя условие (2.11):

$$2\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(r_0 - a_0) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(b - r_0),$$

Откуда получаем:

$$r_0(t) = \frac{2(b + a_0) - \sqrt{3}h}{4} = \frac{b + a_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}h \approx \frac{b + a_0}{2}. \quad (2.14)$$

При этом мы учли, что  $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ , а также приняли предположение о тонкости слоя ( $h/a_0 \ll 1$ ).

Находим закон изменения свободной границы  $r = b(t)$  из решения задачи Коши, получаемого из кинематического условия на свободном контуре:

$$\frac{db}{dt} = u(b,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( b - \frac{r_0^2}{b} \right), b(t_0) = b_0$$

Или после простых преобразований получаем:

$$\frac{db}{dt} = u(b, t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( b - \frac{r_0^2}{b} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \frac{(3b + a_0)(b - a_0)}{b},$$

то есть приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, решение которого определяет закон изменения свободной границы в неявном виде [1]:

$$\left( \frac{b - a_0}{b_0 - a_0} \right)^2 \left( \frac{3b + a_0}{3b_0 + a_0} \right)^{2/3} = \frac{h_0}{h(t)}. \quad (2.15)$$

Таким образом, получили полное решение задачи о свободном растекании кольцевого пластического слоя в модели «идеальной жидкости».

## **2.5. Осесимметричная задача о пластической осадке и растекании тонкого кольцевого слоя в модели «вязкой жидкости»**

Поставим и решим эту задачу в модели «вязкой жидкости»:

$$\text{grad}p = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta \vec{v} - \frac{2\tau_s}{h} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \text{div} \vec{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.16)$$

с условиями на контуре:

$$\begin{aligned} r = a_0 : \sigma_{rr} &= -p + \frac{2}{3} \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial r} = -k \sigma_s, (0 < k \leq 1) \\ r = b : \sigma_{rr} &= -p + \frac{2}{3} \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Интегрируем, как это проделали в предыдущем случае, уравнение нежимаемости (для определённости примем  $k = 1$ ):

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( r - \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (2.18)$$

Используя (2.18), проведем предварительное вычисление:

$$(\Delta \bar{v})_r = \Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

Следовательно, уравнение равновесия также остается без изменения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} (\Delta \bar{v})_r - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|u|} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|u|}.$$

Интегрируем с учетом краевых условий (2.17):

$$p(r, t) = \begin{cases} p_a + \frac{2\tau_s}{h}(r - a_0), a_0 < r < r_0(t) \\ p_b + \frac{2\tau_s}{h}(b - r), r_0(t) < r < b(t) \end{cases} \Rightarrow r_0(t) = \frac{b + a_0}{2} - \frac{h}{4\tau_s}(p_b - p_a) \quad (2.19)$$

где контактное давление в точках контура, согласно (2.17), принимает вид:

$$p_a = \sigma_s \left[ 2 + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{a_0} \right)^2 \right]; \quad p_b = \sigma_s \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{b} \right)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Уравнение линии ветвления течения (2.19) с учетом (2.20) упрощается:

$$r_0(t) = \frac{b + a_0}{2} - \frac{\sqrt{3}h}{4} \left[ -1 + \frac{r_0^2(a_0^2 - b^2)}{3b^2a_0^2} \right]$$

В предположениях тонкости слоя ( $h/a_0 \ll 1$ ) последнее соотношение относительно линии ветвления течения принимает вид, ранее выведенный нами для упрощенной модели «идеальной жидкости»:

$$r_0(t) \approx \frac{b + a_0}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что закон изменения свободной границы  $r = b(t)$  остается без изменения:

$$\left(\frac{b-a_0}{b_0-a_0}\right)^2 \left(\frac{3b+a_0}{3b_0+a_0}\right)^{2/3} = \frac{h_0}{h(t)}. \quad (2.21)$$

Итак, все характеристики, найденные в задаче на основе двух моделей, оказались близкими между собой, что и следовало ожидать — в силу осесимметричности задачи отсутствуют касательные напряжения, проявляющие вязкие свойства.

## 2.6. Осесимметричная задача об осадке и свободном растекании неоднородного пластического слоя в круговой области

Пусть осаживаемый пластический слой постоянной толщины  $h = h(t)$  с неоднородными пластическими свойствами:

$$\sigma_s(r) = \begin{cases} \sigma_{s1}, & 0 \leq r < a(t) \\ \sigma_{s2}, & a(t) < r < b(t) \end{cases}$$

растекается на плоскости, так что в области  $a(t) < r < b(t)$  справедливы уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_{sk}}{h}, (k=1,2); \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.22)$$

и краевые условия:

$$r=0: u(0,t)=0, \quad r=b(t): p(b,t)=\sigma_{s2} \quad (2.23)$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (2.22) с учетом первого условия (2.23), получаем:

$$u(r,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} r. \quad (2.24)$$

Интегрируем уравнение равновесия (2.22) с учетом второго условия (2.23):

$$p(r,t) = \begin{cases} \sigma_{s_2} + \frac{2\tau_{s_2}}{h}(b-r), & a < r < b \\ \sigma_{s_2} + \frac{2\tau_{s_2}}{h}(b-a) + \frac{2\tau_{s_1}}{h}(a-r), & 0 < r < a \end{cases} \quad (2.25)$$

в которой  $r = a(t)$  и  $r = b(t)$  определяются из соответствующих задач Коши:

$$\frac{db}{dt} = u(b,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} b, \quad b(t_0) = b_0 \Rightarrow b(t) = b_0 \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}} \quad (2.26)$$

$$\frac{da}{dt} = u(a,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} a, \quad a(t_0) = a_0 \Rightarrow a(t) = a_0 \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}} \quad (2.27)$$

Задача полностью решена. Нетрудно показать, что эта задача в модели «вязкой жидкости» также решается без труда. Действительно, кинематика остается без изменения и не зависит от пластических свойств составных несжимаемых сред:

$$u(r,t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} r. \quad (2.28)$$

Следовательно,

$$(\Delta \bar{v})_r = \Delta u - \frac{u}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

Откуда следует, что уравнение равновесия тоже остается без изменения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} (\Delta \bar{v})_r - \frac{2\tau_{sk}}{h} = -\frac{2\tau_{sk}}{h}.$$

Интегрируем последнее с учетом краевого условия:

$$r = b(t) : \sigma_{rr} = -p_b + \frac{2}{3}\sigma_{s2} + \frac{2}{3}\sigma_{s2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

В результате получаем

$$p(r,t) = \begin{cases} p_b + \frac{2\tau_{s2}}{h}(b-r), & a < r < b \\ p_b + \frac{2\tau_{s2}}{h}(b-a) + \frac{2\tau_{s1}}{h}(a-r), & 0 < r < a \end{cases} \quad (2.29)$$

причем  $p_b = p(b,t) = \sigma_{s2}$ , а  $a(t)$  и  $b(t)$  изменяются по закону (2.26), (2.27).

## 2.7. Осесимметричная задача о пластической осадке с вращением неоднородного кругового слоя

Пусть пластический слой с неоднородными свойствами:

$$\sigma_s(r) = \begin{cases} \sigma_{s1}, & 0 \leq r < a(t) \\ \sigma_{s2}, & a(t) < r < b(t) \end{cases}$$

осаживается между параллельно сближающимися и вращающимися друг относительно друга плоскостями массивных плит, так что выполняются уравнения:

$$gradp = -\frac{\tau_{sk}}{h} \left( \frac{\vec{v} - \vec{v}_1}{|\vec{v} - \vec{v}_1|} + \frac{\vec{v} - \vec{v}_2}{|\vec{v} - \vec{v}_2|} \right), \quad div\vec{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.30)$$

где  $\vec{v}_1 = r\omega(t)\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{v}_2 = -r\omega(t)\vec{e}_\varphi$  — скорости внутренних движений тел инструмента.

Перепишем уравнения в скалярном виде:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\tau_{sk}}{h} \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + (v - \omega r)^2}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + (v + \omega r)^2}} \right), \quad (2.31)$$



$$\frac{\partial p}{r \partial \varphi} = -\frac{\tau_{sk}}{h} \left( \frac{v - r\omega}{\sqrt{u^2 + (v - \omega r)^2}} + \frac{v + r\omega}{\sqrt{u^2 + (v + \omega r)^2}} \right), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (2.33)$$

Краевые условия задачи:

$$r = 0: u(0, t) = 0, \quad r = b(t): p(b, t) = \sigma_{s2} \quad (2.34)$$

Интегрируем уравнение несжимаемости (2.33) при условии (2.34):

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} r. \quad (2.35)$$

В силу осесимметрии задачи из (2.32) получаем:

$$(v - r\omega)^2 = (v + r\omega)^2 \Rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{r\omega - r\omega}{2} = 0. \quad (2.36)$$

Подставим выражения для скорости в (2.31), и интегрируем с учетом второго условия (2.34):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}},$$

$$p(r, t) = \begin{cases} \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h} \frac{\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} (b-r)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \omega^2}}, & a < r < b \\ \sigma_{s2} + \frac{2\tau_{s2}}{h} \frac{\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} (b-a)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \omega^2}} + \frac{2\tau_{s1}}{h} \frac{\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} (a-r)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \omega^2}}, & 0 < r < a. \end{cases} \quad (2.37)$$

Вводя безразмерные параметры  $\varepsilon = \frac{h_0}{b_0}$ ,  $\bar{\omega} = \omega(t) \left/ \left( \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \right) \right.$ ,  $\delta = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}$ , характеризующие соответственно тонкость слоя, относительное вращение тел инструмента и степень неоднородности пластических свойств среды, перепишем последнюю зависимость для контактного давления в безразмерных величинах:

$$\bar{p}(r, t) = \frac{p}{\sigma_{s2}} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\bar{b} - \bar{r}}{\bar{h}\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}, \bar{a} < \bar{r} < \bar{b} \\ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\bar{h}\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}} \left( \frac{\bar{a} - \bar{r}}{\bar{h}\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}, 0 < \bar{r} < \bar{a} \end{cases} \quad (2.38)$$

где обозначено:  $\bar{b} = \frac{b}{b_0}$ ,  $\bar{a} = \frac{a}{b_0}$ ,  $\bar{r} = \frac{r}{b_0}$ ,  $\bar{h} = \frac{h}{h_0}$ .

Соотношение (2.38), в частности, показывает, что максимальное значение контактного давления  $\bar{p}_{\max} = \bar{p}(0, t)$  монотонно убывает по переменным  $\varepsilon$ ,  $\bar{\omega}$ , возрастает по переменной  $\delta$ .

### ГЛАВА 3

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ РАСТЕКАНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть тонкий слой идеально пластического материала в начальный момент времени занимает в плоскости область, ограниченную кусочно-гладким контуром. Слой сжимается жесткими плоскостями массивных плит, движение которых задано, поэтому толщина слоя - известная функция времени ( $h$ , и, вообще говоря, координат). Предположим, что область  $S$  симметрична относительно оси  $x$ , и такова, что след ребра (линия ветвле-

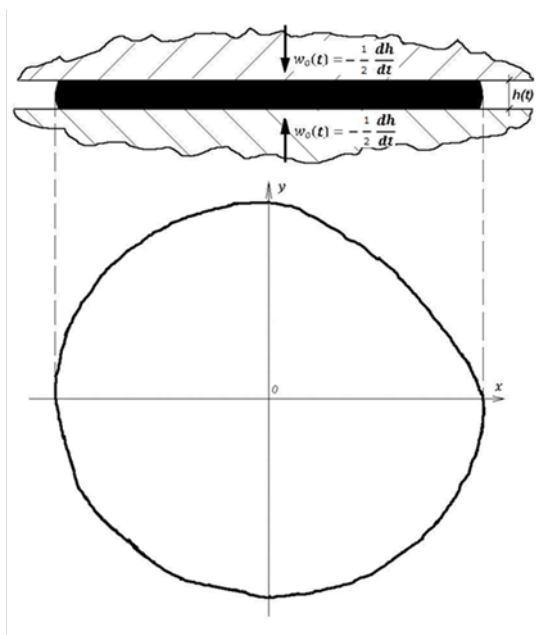


Рис. 5. К задаче о растекании пластического слоя на плоскости

ния течения слоя в двумерной области, занятой свободно растекающимся пластическим слоем) принадлежит оси  $x$ . В этих предположениях задача определения контура свободно растекающегося пластического слоя на плоскости может ставиться и решаться отдельно от краевой задачи растекания пластического слоя в области с подвижной границей. Эта задача

названа задачей о свободном растекании пластического слоя (рис. 5) и ставится формулируется следующим образом:

Требуется найти симметричную относительно оси  $x$  кривую  $y = \varphi(x, t)$ , удовлетворяющую эволюционному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \varphi \left[ 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

а также условию, задающему контур области в начальный момент времени:

$$t = t_0 \Leftrightarrow \lambda(t) = 0: y = \varphi_0(x) \quad (3.2)$$

Уравнение впервые выведено в работе В.Н. Безухова [4], оно обобщено на случай течения слоя переменной толщины в работах И.А. Кийко [13]. Доказана асимптотика решения уравнения (3.1) при больших степенях деформации: если  $S$  — замкнутая область с гладким контуром, то при  $t \rightarrow +\infty$  область  $S$  приближается к круговой. С другой стороны, получен класс решений подобия в задаче о свободном растекании пластического слоя, ограниченного в начальный момент кривой второго порядка.

Ниже вместо переменной  $\lambda(t)$  введем удобное обозначение  $\lambda(t) \equiv t_1(t) = \ln(h(t_0)/h(t))$  — некоторое безразмерное модифицированное время, «степень деформации» по А.А. Ильюшину, где  $h(t)$  — толщина пластического слоя. Момент времени  $t = t_0$  соответствует начальному безразмерному времени  $t_1 = 0$ . Координаты  $x, y$  могут считаться как размерными, так и безразмерными (обезразмеренными на  $h(t_0)$ ).

В работе [14] был предложен более простой, чем в [4, 13], вывод уравнения эволюции границы, при этом использовались другие безразмерные переменные:

$$(x_1, y_1) = (x, y) / h(t), (u_1, v_1) = (u, v) / (-h'(t))$$

(здесь  $x, y$  — размерные координаты,  $u, v$  — компоненты скорости течения, штрих означает производную по аргументу). В этих переменных кинематическое условие на свободной границе  $y_1 = \varphi_1(x_1, t_1)$  имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + (u_1 + x_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = v_1 + \varphi_1$$

В предположении, что область течения симметрична относительно некоторой оси, которую мы примем за ось  $x$ , и на этой оси нормальная компонента скорости равна нулю, для нормальной компоненты скорости на границе области можно получить [14]:

$$u_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} v_1, v_1 = \varphi_1 \left[ 1 + \frac{\varphi_1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1 / \partial x_1^2}{1 + (\partial \varphi_1 / \partial x_1)^2} \right].$$

Подстановка этих выражений в кинематическое условие дает требуемое уравнение эволюции границы  $y_1 = \varphi_1(x_1, t_1)$ :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \varphi_1 \left[ 2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right)^2 \right] - \frac{\varphi_1^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} = 0. \quad (3.3)$$

Очевидно, что уравнения (3.1) и (3.3) связаны. В работе [14] также показано, что уравнение (3.3) сводится к некоторому частному виду уравнения нелинейной теплопроводности [21] для функции  $w(x, \tau)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( w^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.4)$$

Выделим еще один вид уравнения растекания, к которому приводит замена  $q = w^2$ :

$$4 \frac{\partial q}{\partial \tau} = 2q \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \quad (3.5)$$

Таблица преобразований, связывающих уравнения (3.1), (3.3), (3.4).

(1) $\leftrightarrow$ (3)	$\varphi(x, t_1) = e^{-t_1} \varphi_1(x_1, t_1), x_1 = e^{t_1} x$	$\varphi_1(x_1, t_1) = e^{t_1} \varphi(x, t_1), x = e^{-t_1} x_1$
(1) $\leftrightarrow$ (4)	$\varphi(x, t_1) = e^{t_1} w(x, \tau), \tau = e^{2t_1} / 2$	$w(x, \tau) = \varphi(x, t_1) / \sqrt{2\tau}, t_1 = \ln \sqrt{2\tau}$
(3) $\leftrightarrow$ (4)	$\varphi_1(x_1, t_1) = e^{2t_1} w(x, \tau), \begin{cases} x = e^{-t_1} x_1 \\ \tau = e^{2t_1} / 2 \end{cases}$	$w(x, \tau) = \varphi_1(x_1, t_1) / 2\tau, \begin{cases} x_1 = \sqrt{2\tau} x \\ t_1 = \ln \sqrt{2\tau} \end{cases}$

Следует признать, что уравнение эволюции границы, записанное в форме (3.4), выглядит наиболее простым, к тому же дивергентный вид этой формы удобен для численного исследования задачи Коши этого уравнения. Множество известных точных решений уравнения (3.4) (см. [21]) включает в себя множество известных решений уравнения (3.1) [3, 6]. Рассмотрим некоторые способы сведения уравнения (3.4) к обыкновенному дифференциальному уравнению и нахождению частных точных решений. Предварительно выделим два простых преобразования независимых переменных, позволяющих получать новые точные решения уравнения (3.4).

**3.1.** Пусть  $w(x, \tau)$  — решение уравнения (3.4). Тогда функция вида:

$$w_1(x, \tau) = c_1^{-1} c_2^{1/2} w(c_1 x + c_3, c_2 \tau + c_4), \quad (3.6)$$

в которой  $c_1, c_2 > 0, c_3, c_4$  — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения. В справедливости данного утверждения, сформулированного в [23], нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (3.6) в уравнение (3.4).

Частные случаи:

- а)  $w_1(x, \tau) = w(x + x_0, \tau + \tau_0)$  ( $c_1 = c_2 = 1, c_3 = x_0, c_4 = \tau_0$ );
- б)  $w_1(x, \tau) = -w(-x + x_0, \tau + \tau_0)$  ( $c_1 = -1, c_2 = 1$ )

**3.2.** Пусть  $q(x, \tau)$  — решение уравнения (3.5). Тогда функция

$q_1(x, \tau) = c_1^{-2} c_2 q(c_1 x + x_0, c_2 \tau + \tau_0)$  также будет решением этого уравнения.

Частные случаи:

- а)  $q_1(x, \tau) = -q(x + x_0, -\tau + \tau_0)$  ( $c_1 = 1, c_2 = -1$ );
- б)  $q_1(x, \tau) = q(x + x_0, \tau + \tau_0)$  ( $c_1 = 1, c_2 = 1$ );
- с)  $q_1(x, \tau) = q(-x + x_0, \tau + \tau_0)$  ( $c_1 = -1, c_2 = 1$ );
- д)  $q_1(x, \tau) = -q(-x + x_0, -\tau + \tau_0)$  ( $c_1 = -1, c_2 = -1$ ).

**3.3.** Примем теперь:

$$w(x, \tau) = f(\tau) g(x) \quad (3.7)$$

Подстановка (3.7) в (3.4) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно  $f(\tau)$  и  $g(x)$ :

$$f'/f^3 = c_0, \quad (g^2 g')'/(2g) = c_0, \quad (3.8)$$

где  $c_0$  — произвольная постоянная.

При  $c_0 = 0$  получаем, что  $f' = 0 \Rightarrow f = c_1$ , а для  $g$  можем выделить два частных решения:

$$(g^2 g')' = 0 \Rightarrow \begin{cases} g = c_2 \\ g^3 = c_3 x + c_4 \end{cases}. \quad (3.9)$$

При этом первое решение  $w(x, \tau) = const$  соответствует **растеканию полосы**, параллельной оси  $x$  [23], а второе описывает **растекание «кубической параболы»** (рис. б), точнее, тела с осью симметрии, совпадающей

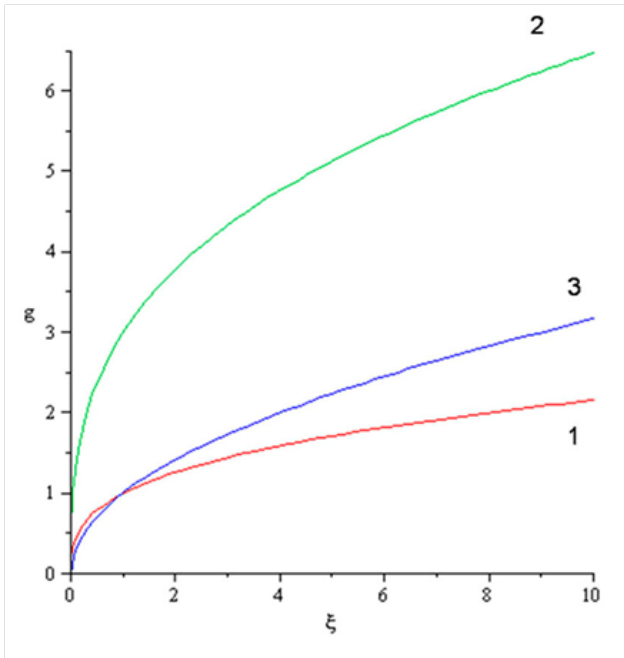


Рис. б. К растеканию области, ограниченной «кубической параболой»

с осью  $x$ , граница которого описывается кубической функцией. Отметим, что второе решение (3.9), записанное в переменных  $w \sim x$ , представляет

стационарное решение, однако в переменных  $\varphi \sim x$  оно дает нестационарное решение.

$$\left( g = c\sqrt[3]{\xi}; 1 - c = 1; 2 - c = 10 \right) \text{ и параболой } \left( 3: g = \sqrt{\xi} \right).$$

В общем случае решение первого уравнения (3.8) выписывается:

$$2f^2(\alpha_1 + c_0\tau) = -1 \tag{3.10}$$

Второе уравнение — обобщенно-однородное, с помощью замены

$$g' = p(g), g'' = p'g' = p'p \tag{3.11}$$

оно приводится к уравнению Абеля II рода:

$$(g^2 p) p' + 2gp^2 - 2c_0g = 0, \tag{3.12}$$

решение которого выписывается в квадратурах. Действительно, подставляя (3.11) в (3.12), получаем:

$$g(gpp' + 2p^2 - 2c_0) = 0,$$

$$\frac{g}{2} \frac{dp^2}{dg} = 2(-p^2 + c_0),$$

$$(c_0 - p^2)g^4 = -\alpha_2,$$

$$\frac{dg}{dx} = \pm \frac{\sqrt{c_0g^4 + \alpha_2}}{g^2},$$

$$\int \frac{g^2 dg}{\sqrt{c_0g^4 + \alpha_2}} = \pm x + \alpha_3 \tag{3.13}$$

Формулы (3.10) и (3.13), вместе взятые, дают решение **задачи о растекании в виде эллиптического интеграла**. На *рис. 7–9* представлены результаты численного исследования кривых (3.13), описываемых эллипти-



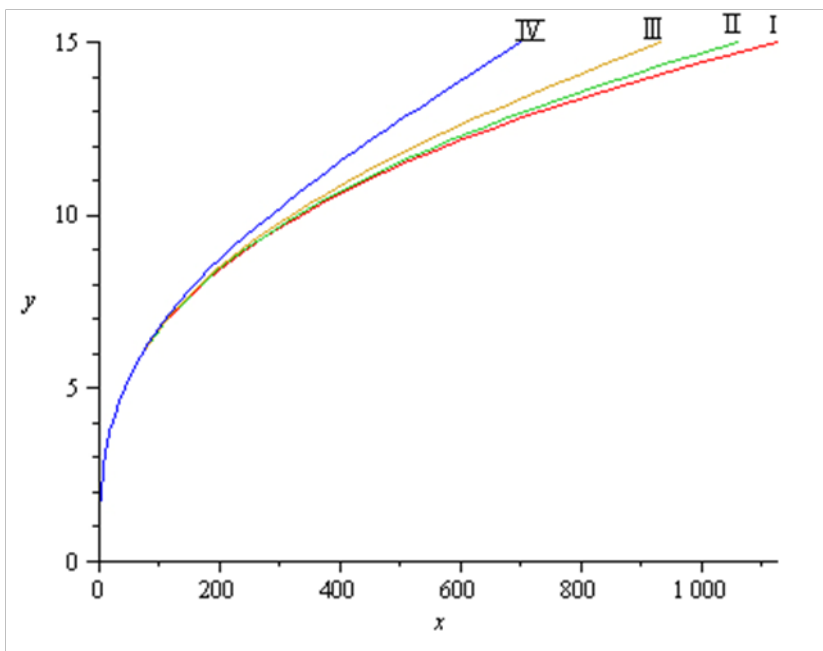


Рис. 7. К вычислению эллиптического интеграла:  $x(y) = \int_0^y \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 + \alpha^4 t^4}}$   
 (I  $\alpha = 0$  II:  $\alpha = 0.05$  III:  $\alpha = 0.07$  IV:  $\alpha = 0.1$ ).

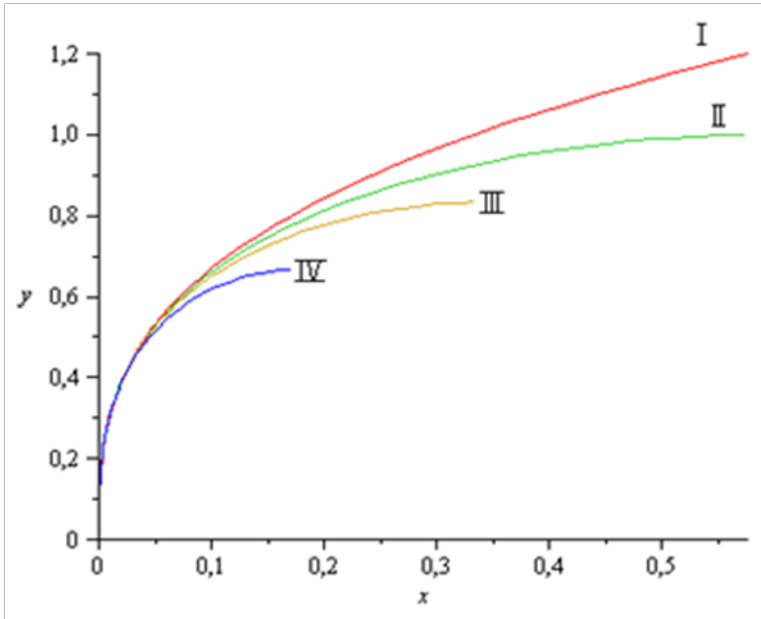


Рис. 8. К вычислению эллиптического интеграла:  $x(y) = \int_0^y \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - \alpha^4 t^4}}$

(I:  $\alpha = 0$  II:  $\alpha = 1$  III:  $\alpha = 1.2$  IV:  $\alpha = 1.5$ ).

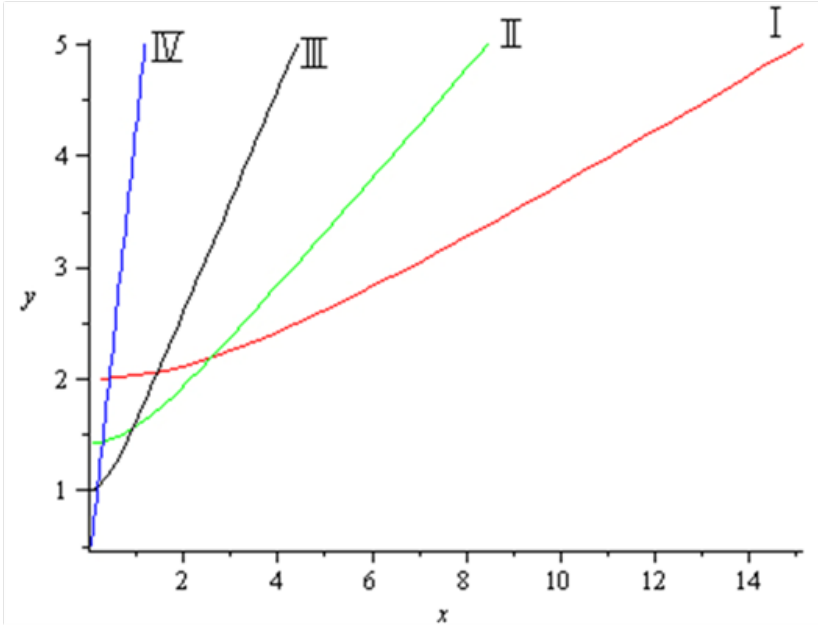


Рис. 9. К вычислению эллиптического интеграла:  $x(y) = \int_{1/\alpha}^y \frac{t^2 dt}{\sqrt{\alpha^4 t^4 - 1}}$

(I:  $\alpha = 0.5$  II:  $\alpha = 0.7$  III:  $\alpha = 1$  IV:  $\alpha = 2$ ).

ческими интегралами. Отметим, что в [23] решение (3.13) выведено другим способом, исходя из уравнения растекания (3.1). Заметим, что решение (3.13) ранее было представлено в [14], как частное решение уравнения теплопроводности более общего вида.

**3.4.** Рассмотрим решение типа бегущей волны:

$$w(x, \tau) = \frac{I}{\gamma} g(\xi), \quad \xi = \tau - \gamma x. \quad (3.14)$$

Тогда  $g(\xi)$  удовлетворяет уравнению:

$$(g^2 g')' - 2g' = 0 \quad (3.15)$$

Одно частное решение последнего уравнения  $g = const$ , представляющее решение полосы, было описано ранее. При  $g' \neq 0$  уравнение (3.15) легко интегрируется:

$$4\xi = C_2 + g^2 - 2C_1 g + C_1^2 \ln(C_1 + g)^2$$

Для  $w(x, \tau)$  получаем достаточно сложное выражение неявного вида:

$$4(\tau - \gamma x) = C_2 + (\gamma w)^2 - 2C_1 \gamma w + C_1^2 \ln(C_1 + \gamma w)^2 \quad (3.16)$$

которое при  $C_1 = 0$  описывает известное **растекание параболы** (рис. 10).

Отметим, что решение (3.16), представляющее **обобщение решения задачи о растекании параболы**, выведено в работе [24] другим способом, и оно содержит три независимых параметра. Однако нетрудно показать, что в решении, приведенном в [24], третий параметр с помощью преобразования растяжения и сдвига независимой переменной  $\xi$  можно исключить, в результате цитируемое решение оказывается в точности совпадающим с нашим решением (3.16).

Возникает естественный вопрос: решение (3.16) относительно обобщенной параболы, так же как и решение для «кубической» параболы, не обладает симметрией относительно оси  $ox$ . Однако, мы имеем основание выделить гладкую (относительно оси  $ox$ ) часть решения и продолжить симметричным образом полученное решение задачи с одной полуплоскости на другую. В результате получаем решение задачи о растекании пластического слоя в области, ограниченной указанной кривой.

Действительно, для подтверждения вышесказанного, достаточно убедиться в соблюдении всех условий, при которых выведено уравнение растекания, а именно:

- (а) контур области представляет гладкую кривую;
- (б) область, занятая пластическим слоем, симметрична относительно оси  $ox$ ;
- (в) линия ветвления течения (т.е. множество точек внутри области, в которых осредненная по толщине слоя скорость течения равна нулю) принадлежит оси  $ox$ .

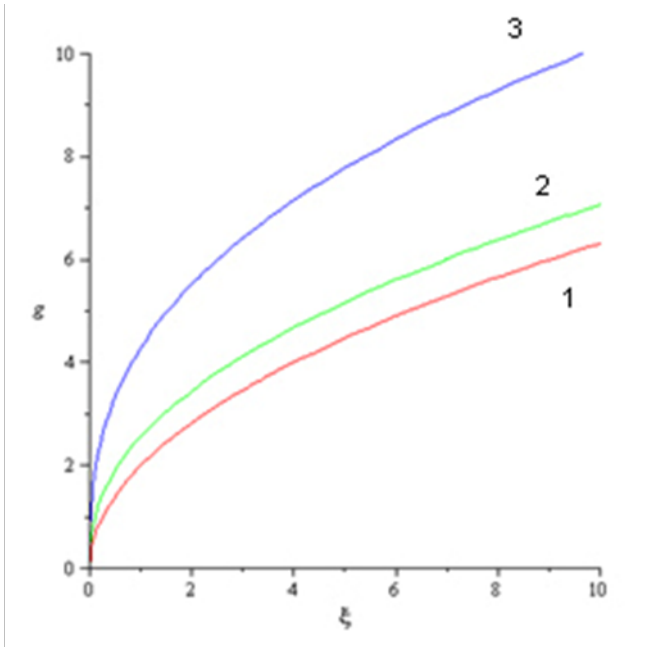


Рис. 10. К растеканию области, ограниченной параболой и ее обобщение:

$$4\xi = c_2 + g^2 - 2c_1g + c_1^2 \ln(c_1 + g)^2$$

$$(1 - c_1 = 0; c_2 = 0; 2 - c_1 = 1; c_2 = 0; 3 - c_1 = 10; c_2 = -100 \ln 100).$$

В этих предположениях решение  $y = \varphi(x, t_1)$ , полученное в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ), можно симметрично отразить относительно оси  $ox$ , продолжив его тем самым на нижнюю полуплоскость. Следует отметить, что наши предположения допускают излом контура в точках оси  $ox$  (как, например, в задаче о растекании «клина») и, безусловно, не допускают излома контура области в точках, не лежащих на оси  $ox$ .

**3.5.** Воспользуемся теперь уравнением растекания в виде (3.5). Пусть

$$q = g(\xi), \xi = x^2 / (\tau + \tau_0) \quad (3.17)$$

$$2gg'' + g'(g' + g/\xi + 1) = 0 \quad (3.18)$$

Частное решение этого уравнения  $g = g_0 = -\xi/2$  не имеет физического смысла ( $q$  не может быть отрицательным).

Будем искать решение уравнения (3.5) в виде:

$$q = g_0(\xi) + f(\tau)g(\xi) = -\xi/2 + f(\tau)g(\xi) \quad (3.19)$$

Подстановка (3.19) в (3.5) дает:

$$g(2f' \cdot (\tau + \tau_0) + f) = 2f^2(gg' + 2\xi gg'' + \xi g'^2) - \xi f(g' + 2\xi g'') \quad (3.20)$$

Итак, получили одно уравнение (3.20) для определения двух неизвестных функций  $f(\tau)$  и  $g(\xi)$ . Найдем его частное решение из выполнения следующих трех соотношений:

$$gg' + 2\xi gg'' + \xi g'^2 = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{f}(2f' \cdot (\tau + \tau_0) + f) = -\frac{\xi}{g}(g' + 2\xi g'') = c_0, \quad (3.22)$$

где  $c_0$  — произвольный параметр.

Решим сперва два последних уравнения:

$$2f' \cdot (\tau + \tau_0) + f = c_0 f,$$

$$f(\tau) = c_1 (\tau + \tau_0)^{(c_0-1)/2} \quad (3.23)$$

$2\xi^2 g'' + \xi g' + c_0 g = 0$  — однородное уравнение. Ищем его решение в виде

$$g = A\xi^\alpha.$$

В результате приходим к характеристическому уравнению относительно  $\alpha$ :

$$2\alpha^2 - \alpha + c_0 = 0,$$

$$\begin{cases} 1-8c_0 \geq 0 \\ \alpha_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-8c_0})/4, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$g(\xi) = A_1 \xi^{\alpha_1} + A_2 \xi^{\alpha_2}, c_0 \leq 1/8. \quad (3.25)$$

Мы нашли  $f(\tau), g(\xi)$ . Осталось удовлетворить уравнению (3.21). Предварительно упростим его с помощью уравнения (3.22):

$$\begin{aligned} -c_0 g^2 + \xi^2 g'^2 &= 0 \\ -c_0 g^2 + \xi^2 g'^2 &= 0 \end{aligned}$$

Подставим в последнее соотношение решение (3.25):

$$A_1^2 \xi^{2\alpha_1} (-c_0 + \alpha_1^2) + 2A_1 A_2 \xi^{\alpha_1 + \alpha_2} (-c_0 + \alpha_1 \alpha_2) + A_2^2 \xi^{2\alpha_2} (-c_0 + \alpha_2^2) = 0$$

которое выполняется при условии, что:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - c_0 = 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 - c_0 = 0 \\ \alpha_2^2 - c_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ c_0 = \alpha_1 \alpha_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

Однако (3.26) выполнимо, если только:

$$1-8c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 1/8 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{c_0} = 1/(2\sqrt{2})$$

Но, с другой стороны, из (3.24) имеем:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1/4 \Rightarrow c_0 = 1/16,$$

т.е. получили противоречие. Следовательно, общее решение (3.25) не имеет места.

Положим теперь:

$$A_1 = 0 \Rightarrow g(\xi) = A_2 \xi^{\alpha_2}, \alpha_2 = (1 - \sqrt{1-8c_0})/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\alpha_2^2 = 1 - 2\sqrt{1-8c_0} + 1 - 8c_0 \quad (3.27)$$

$$c_0 = \alpha_2^2 \Rightarrow 24c_0 = 2 - 2\sqrt{1-8c_0},$$

$$1 - 12c_0 = \sqrt{1-8c_0} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 12c_0 \geq 0 \\ 16c_0(9c_0 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow c_0 = \begin{cases} 0 \\ 1/9 - \text{неуд.} \end{cases}$$

В этом случае решение уравнения растекания принимает вид:

$$f(\tau) = c_1(\tau + \tau_0)^{-1/2}, g(\xi) = A_2\xi^0 = A_2,$$

$$q \equiv w^2 = -\frac{x^2}{2(\tau + \tau_0)} + \frac{A_3}{\sqrt{\tau + \tau_0}},$$

т.е. получили **известное решение задачи о растекании пластического слоя, ограниченного эллипсом**, у которого большая полуось лежит на оси  $x$  [13, 23]. Заметим, что при  $\tau_0 = 0$  решение описывает растекание окружности.

Если положить:

$$A_2 = 0 \Rightarrow g(\xi) = A_1\xi^{\alpha_1}, \alpha_1 = (1 + \sqrt{1-8c_0})/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\alpha_1^2 = 1 + 2\sqrt{1-8c_0} + 1 - 8c_0 \quad (3.28)$$

$$c_0 = \alpha_1^2 \Rightarrow 24c_0 = 2 + 2\sqrt{1-8c_0},$$

$$12c_0 - 1 = \sqrt{1-8c_0} \Rightarrow \begin{cases} 12c_0 - 1 \geq 0 \\ 16c_0(9c_0 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow c_0 = \begin{cases} 0 - \text{не удовл.} \\ 1/9 \end{cases},$$

И, согласно (3.19), (3.23), (3.28), получаем решение уравнения растекания следующего вида:

$$f(\tau) = c_1(\tau + \tau_0)^{-4/9}, g(\xi) = A_1\xi^{1/3} = A_1\left(\frac{x^2}{\tau + \tau_0}\right)^{1/3}$$



$$q \equiv w^2 = -\frac{x^2}{2(\tau + \tau_0)} + \frac{A_3 x^{2/3}}{(\tau + \tau_0)^{7/9}}, \quad (3.29)$$

Назовем полученное новое решение (3.29) обобщением решения задачи о растекании пластического слоя, ограниченного в плане эллипсом (рис. 11).

**3.6.** Пусть теперь:

$$q = g(\xi), \quad \xi = x^2/(\tau_0 - \tau) \quad (3.30)$$

тогда  $g(\xi)$  удовлетворяет уравнению:

$$2gg'' + g'(g' + g/\xi - 1) = 0 \quad (3.31)$$

Частное решение этого уравнения:

$$g = g_0 = \xi/2; \quad w(x, \tau) = \pm \sqrt{q^2} = \pm \frac{x}{\sqrt{2(\tau_0 - \tau)}}$$

описывает уже известное нам растекание клина.

Будем искать решение уравнения (3.5) в виде:

$$q = \xi/2 + f(\tau)g(\xi) = \frac{x^2}{2(\tau_0 - \tau)} + f(\tau)g(\xi) \quad (3.32)$$

Подстановка (3.32) в (3.5) дает:

$$g \left( 2f' \cdot (\tau_0 - \tau) - f \right) = 2f^2 \left( gg' + 2\xi gg'' + \xi g'^2 \right) + \xi f \left( g' + 2\xi g'' \right) \quad (3.33)$$

Итак, получили одно уравнение (3.33) для определения двух неизвестных функций  $f(\tau)$  и  $g(\xi)$ . Найдем частное решение (3.33) из выполнения следующих трех соотношений:

$$gg' + 2\xi gg'' + \xi g'^2 = 0, \quad (3.34)$$

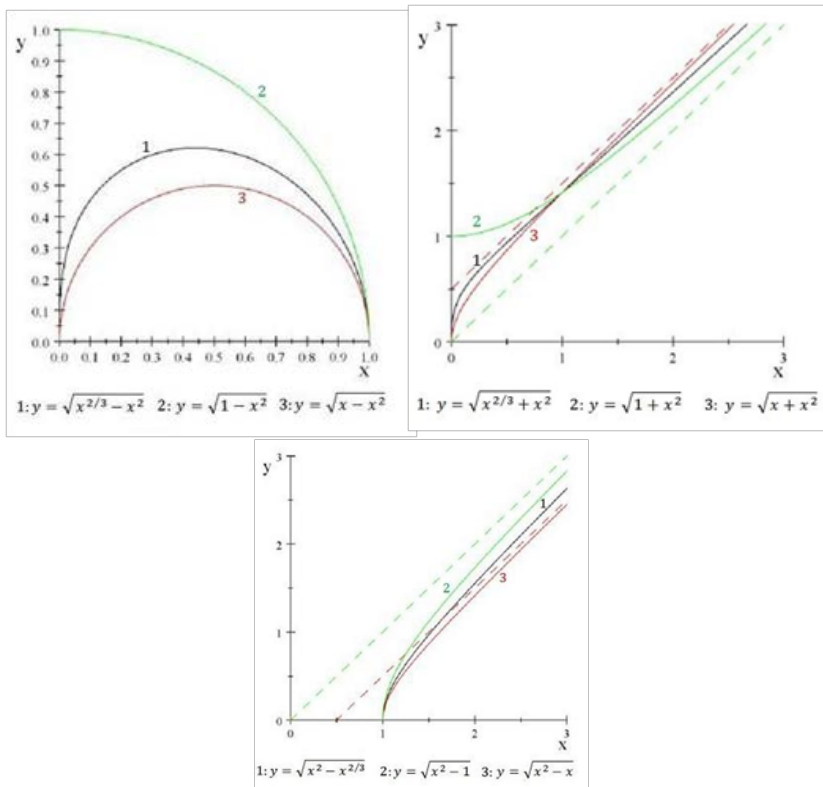


Рис. 11. К растеканию области, ограниченной кривой в форме «обобщенного» эллипса и «обобщенной» гиперболы

$$\frac{1}{f} \left( 2f' \cdot (\tau_0 - \tau) - f \right) = \frac{\xi}{g} \left( g' + 2\xi g'' \right) = c_0, \quad (3.35)$$

где  $C_0$  — произвольный параметр.

Решим сперва, как и в случае эллипса, два последних уравнения:

$$\begin{aligned} 2f' \cdot (\tau_0 - \tau) - f &= c_0 f, \\ f(\tau) &= c_1 (\tau_0 - \tau)^{-(c_0+1)/2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$2\xi^2 g'' + \xi g' - c_0 g = 0$$

— однородное уравнение. Ищем его решение в виде:

$$g = A\xi^\alpha$$

В результате приходим к характеристическому уравнению относительно  $\alpha$ :

$$2\alpha^2 - \alpha - c_0 = 0,$$

$$\begin{cases} 1 + 8c_0 \geq 0 \\ \alpha_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 + 8c_0})/4, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$g(\xi) = A_1 \xi^{\alpha_1} + A_2 \xi^{\alpha_2}, c_0 \leq 1/8. \quad (3.38)$$

Мы нашли  $f(\tau), g(\xi)$ . Осталось удовлетворить уравнению (3.34). Предварительно упростим его с помощью уравнения (3.35):

$$c_0 g^2 + \xi^2 g'^2 = 0.$$

Подставим в последнее соотношение решение (3.38):

$$A_1^2 \xi^{2\alpha_1} (c_0 + \alpha_1^2) + 2A_1 A_2 \xi^{\alpha_1 + \alpha_2} (c_0 + \alpha_1 \alpha_2) + A_2^2 \xi^{2\alpha_2} (c_0 + \alpha_2^2) = 0$$

Последнее уравнение выполняется, если только:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + c_0 = 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 + c_0 = 0 \\ \alpha_2^2 + c_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ c_0 = -\alpha_1 \alpha_2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Однако (3.39) выполнимо при условии, что

$$1 + 8c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = -1/8 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{-c_0} = 1/(2\sqrt{2})$$

Но, с другой стороны, из (3.37) имеем:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1/4 \Rightarrow c_0 = -1/16,$$

т.е. получили противоречие. Следовательно, общее решение (3.38) не имеет места. Положим:

$$\begin{aligned} A_1 = 0 &\Rightarrow g(\xi) = A_2 \xi^{\alpha_2}, \alpha_2 = (1 - \sqrt{1 + 8c_0})/4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16\alpha_1^2 = 1 - 2\sqrt{1 + 8c_0} + 1 + 8c_0, \\ c_0 = -\alpha_2^2 &\Rightarrow -24c_0 = 2 - 2\sqrt{1 + 8c_0}, \\ 1 + 12c_0 = \sqrt{1 + 8c_0} &\Rightarrow \begin{cases} 1 + 12c_0 \geq 0 \\ 16c_0(9c_0 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow c_0 = \begin{cases} 0 \\ -1/9 - \text{неуд.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

В этом случае решение уравнения растекания принимает вид:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1(\tau_0 - \tau)^{-1/2}, g(\xi) = A_2 \xi^0 = A_2 \\ q \equiv w^2 &= \frac{x^2}{2(\tau_0 - \tau)} + \frac{A_3}{\sqrt{\tau_0 - \tau}}, \end{aligned}$$

т.е. получили **известное решение задачи о растекании области, ограниченной в плане гиперболой** (рис. 12), причем с осью  $x$  может совпадать как действительная, так и мнимая ось гиперболы (зависит от знака  $A_3$ ).

Если положим:

$$\begin{aligned} A_2 = 0 &\Rightarrow f_2(\xi) = A_1 \xi^{\alpha_1}, \alpha_1 = (1 + \sqrt{1 + 8c_0})/4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16\alpha_1^2 = 1 + 2\sqrt{1 + 8c_0} + 1 + 8c_0, \\ c_0 = \alpha_1^2 &\Rightarrow -24c_0 = 2 + 2\sqrt{1 + 8c_0}, \\ -12c_0 - 1 = \sqrt{1 + 8c_0} &\Rightarrow \begin{cases} -12c_0 - 1 \geq 0 \\ 16c_0(9c_0 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow c_0 = \begin{cases} 0 - \text{неуд.} \\ -1/9 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41)$$

И, согласно (3.32), (3.36), (3.41), получаем решение уравнения растекания следующего вида:

$$f(\tau) = c_1(\tau_0 - \tau)^{-4/9}, g(\xi) = A_1 \xi^{1/3} = A_1 \left( \frac{x^2}{\tau_0 - \tau} \right)^{1/3},$$

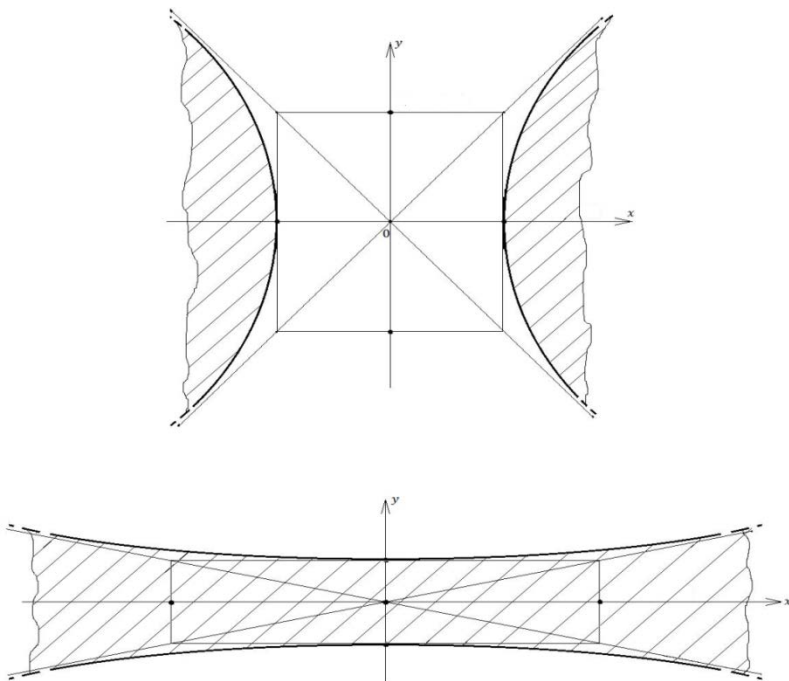


Рис. 12. К растеканию области, ограниченной гиперболой

$$q \equiv w^2 = \frac{x^2}{2(\tau_0 - \tau)} + \frac{A_3 x^{2/3}}{(\tau_0 - \tau)^{7/9}} \quad (3.42)$$

Назовем новое решение (3.42) по аналогии с эллипсом обобщением решения задачи о растекании пластического слоя, ограниченного в плане гиперболой (рис. 11).

В заключение представим некоторые другие возможные автомодельные переменные и соответствующие им обыкновенные дифференциальные уравнения; в частных случаях они приводят к известным точным решениям, однако полезно к ним обращаться при исследовании уравнения растекания и поиске новых решений исходной задачи.

**3.7.** Пусть:

$$w(x, \tau) = \tau^\beta g(\xi), \quad \xi = x\tau^{-\frac{1+2\beta}{2}}, \quad (3.43)$$

где  $\xi$  — некоторая автомодельная переменная, зависящая от произвольного параметра  $\beta$ , тогда  $g(\xi)$  удовлетворяет уравнению второго порядка:

$$(g^2 g')' + (1+2\beta)\xi g' - 2\beta g = 0 \quad (3.44)$$

При  $\beta = 0$  это уравнение имеет частное решение  $g = \text{const}$ , которое нами ранее описано.

В общем случае уравнение (3.44) является обобщенно-однородным уравнением, и путем понижения порядка его можно привести к уравнению Абеля II рода [21].

**3.8.** Пусть:

$$w(x, \tau) = (\tau_0 - \tau)^\beta g(\xi), \quad \xi = x(\tau_0 - \tau)^{-\frac{1+2\beta}{2}} \quad (3.45)$$

тогда  $g(\xi)$  удовлетворяет уравнению (ср. с (3.44)):

$$(g^2 g')' - (1+2\beta)\xi g' + 2\beta g = 0 \quad (3.46)$$

Поиск решения в виде  $g = A\xi^\alpha$  дает  $\alpha = 1$  и уравнение  $A(1-2A^2) = 0$ , дающее нам два частных решения уравнения (3.46) (для произвольных значений  $\beta$ ):

$$g = \pm \xi / \sqrt{2}$$

С учетом (3.45) имеем два решения уравнения (3.4):

$$w(x, \tau) = \pm \frac{x}{\sqrt{2(\tau_0 - \tau)}} \quad (3.47)$$

Эти решения описывают растекание клина (ось  $x$  является осью симметрии).

**3.9.** Замена:

$$w(x, \tau) = e^{\beta\tau} g(\xi), \quad \xi = xe^{-\beta\tau} \quad (3.48)$$

приводит к уравнению:

$$(g^2 g')' + 2\beta \xi g' - 2\beta g = 0, \quad (3.49)$$

а замена:

$$w(x, \tau) = e^{\beta(\tau_0 - \tau)} g(\xi), \quad \xi = x e^{-\beta(\tau_0 - \tau)} \quad (3.50)$$

приводит к

$$(g^2 g')' - 2\beta \xi g' + 2\beta g = 0 \quad (3.51)$$

Замены (3.48), (3.50) являются экспоненциальными аналогами подстановок (3.53), (3.55). А уравнения (3.49) и (3.51) можно рассматривать как пределы (при больших  $\beta$ ) для уравнений (3.44), (3.46). Эти уравнения также являются обобщенно-однородными и потому сводятся с понижением порядка к уравнению Абеля II рода.

При  $\beta = 0$  оба случая (3.48) и (3.50) совпадают, а функция  $g(\xi)$  при этом описывает растекание «кубической параболы», которое было представлено ранее.

## ГЛАВА 4

### ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Теория течения в тонком пластическом слое была развита на горячие процессы [1]. Исследована плоская задача о сжатии предварительно нагретой полосы холодными внешними телами. В результате интенсивного теплообмена образуются приконтактные слои затвердевания. Для определения истинной границы течения используется принцип минимума мощности внешних сил. В работе [15] получено решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине ( $\tau_s = \tau_s(z)$ ) в изотермической постановке. В [17] решена плоская задача о пластическом сжатии трехслойной полосы с кусочно-однородными и симметричными свойствами по толщине. В [18] решена задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя.

**4.1.** Ниже ставится и решается плоская задача о сжатии двухслойной биметаллической полосы в рамках модели жесткопластического тела (рис. 13). Предположим, что пластическое течение происходит только в «мягком» слое, а второй слой при этом остается жестким.

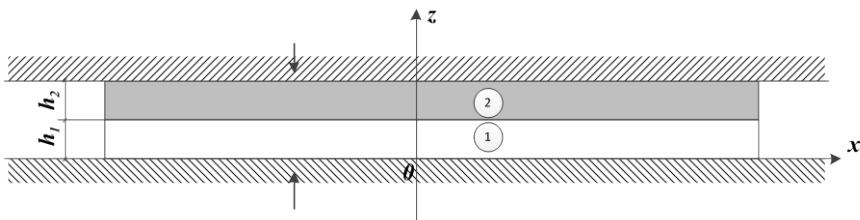


Рис. 13. Пластическая осадка биметаллической полосы

Выпишем замкнутую систему уравнений краевой задачи:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (4.1)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2, \quad (4.2)$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (4.3)$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4.3)$$

Краевые условия задачи:

$$z = 0: \sigma_{xz} = \tau_{s1}; v = 0 \quad (4.4)$$

$$z = h_1(t): \sigma_{xz} = -\tau_{s1}; v = -v_0 = -\frac{dh_1}{dt} \quad (4.5)$$

Кроме того, необходимо поставить краевые условия на неизвестной свободной границе  $F(x, z, t) = 0$ , которая в начальный момент задана уравнением  $F(x, z, t_0) \equiv l_0 - x = 0$ .

В рассматриваемом случае, при котором течение наблюдается в одном слое, остается в силе решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине ( $\tau_s = \tau_s(z)$ ) в изотермической постановке [15]:

$$\sigma_{xz} = az + b, \sigma_{zz} = -ax - c_0, \sigma_{xx} = -ax - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2},$$

$$v = -v_0 \frac{z}{h}, \quad u = v_0 \left( \frac{x}{h} + \frac{2}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2}} dz + c_1 \right),$$

в котором надо положить  $\tau_s(z) \equiv \tau_{s1} = const$ .

Постоянные  $a, b$  определяются из следующих краевых условий:

$$z = 0: \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b,$$

$$z = h_1: -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot h_1 + b,$$

из которых получаем:

$$b = \tau_{s1}, a = -\frac{2\tau_{s1}}{h_1}$$

Постоянная  $C_0$  находится из интегрального условия на свободной границе  $x = \bar{l}$ , ( $\bar{l} = \frac{l_0 h_0}{h(t)}$  — условная средняя граница):

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

откуда нетрудно убедиться, что:

$$c_0 = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} \left( 1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) \approx \tau_{s1} \left( \frac{2\bar{l}}{h_1} \right),$$

при этом мы учли условие тонкости слоя ( $h/\bar{l} \ll 1$ ).

Следовательно, поле напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \tau_{s1} \left( -\frac{2z}{h_1} + 1 \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0, \\ \sigma_{xx} &= \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 + 2\tau_{s1} \sqrt{1 - \left( -\frac{2z}{h_1} + 1 \right)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Теперь можем найти общее потребное усилие для осуществления процесса пластической осадки:

$$\begin{aligned} Q_{(1)} &= \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left( \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l} = \\ &= \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} (2\bar{l}) \left( 1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) \sim \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} (2\bar{l}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Итак, в рассматриваемом случае, при котором течет только «мягкий» слой, определили напряжения (4.7), а также величину потребного усилия  $Q$ . Кроме того, как нетрудно заметить, имеет место условие (4.9), при котором прямая II располагается ниже прямой I (рис. 14а).

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} < \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}, \quad (4.9)$$

которое подтверждает выполнимость условия (1.19) в области  $0 < z < h_1$ , занятой «мягким» слоем. Таким образом, в результате осадки пластического слоя уменьшается  $h_1$ .

до некоторого значения  $h_{10}$ , такого что:

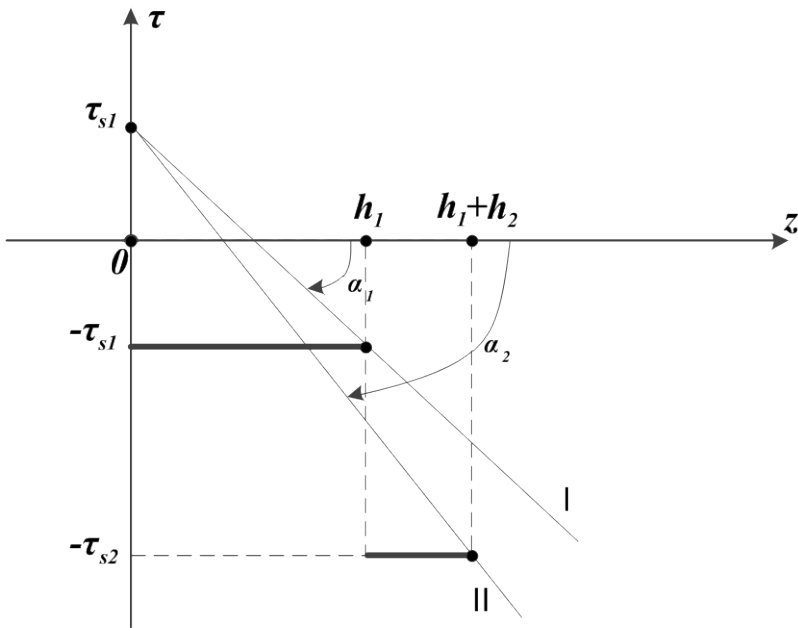


Рис. 14а. Пластическое течение в двухслойной полосе

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_0} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_0 + h_2}, \quad (4.10)$$

и в дальнейшем пластическое течение распространяется на весь объем двухслойной полосы.

Предположим теперь, что течет вся полоса. Для этого случая можем принять решение (4.7), в котором надо положить:

$$\tau_s(z) = \begin{cases} \tau_{s1}, & 0 < z < h_1 \\ \tau_{s2}, & h_1 < z < h_1 + h_2 \equiv h; \tau_{s1} \leq \tau_{s2} \end{cases}$$

Аналогично тому, что мы проделали в предыдущем случае, найдем постоянные  $a, b$  из соответствующих условий на контакте:

$$z = 0: \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b,$$

$$z = h_1 + h_2; -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot (h_1 + h_2) + b,$$

из которых следует, что:

$$b = \tau_{s1}, a = -\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}$$

Напряжения в области течения принимают вид:

$$\sigma_{xz} = -\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1}, \sigma_{zz} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}x - c_0, \quad (4.11)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}x - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - \left(-\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}z + \tau_{s1}\right)^2}$$

Заметим, что условие (1.19) относительно решения (4.7) выполняется теперь во всей области, занятой биметаллической полосой.

Иначе говоря, в рассматриваемом случае, прямая II располагается выше прямой I (рис. 14б), то есть:

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1} \quad (4.12)$$

**Утверждение 1.** Условия (4.9), (4.12) в точности совпадают с условием, выведенным в [1] из **принципа минимума мощности внешних сил**: истинному положению границы течения (неоднородного по толщине пластического слоя) в данном состоянии соответствует минимум мощности, потребной для протекания процесса. При заданном законе сближения плит минимуму мощности отвечает условие минимума внешних усилий.

Для подтверждения приведенного выше утверждения достаточно вычислить потребное усилие сжатия полосы относительно второго случая, при котором течет вся биметаллическая полоса:

$$Q_{(2)} = \left| \int_{-l}^l \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-l}^l \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2l \quad (4.13)$$

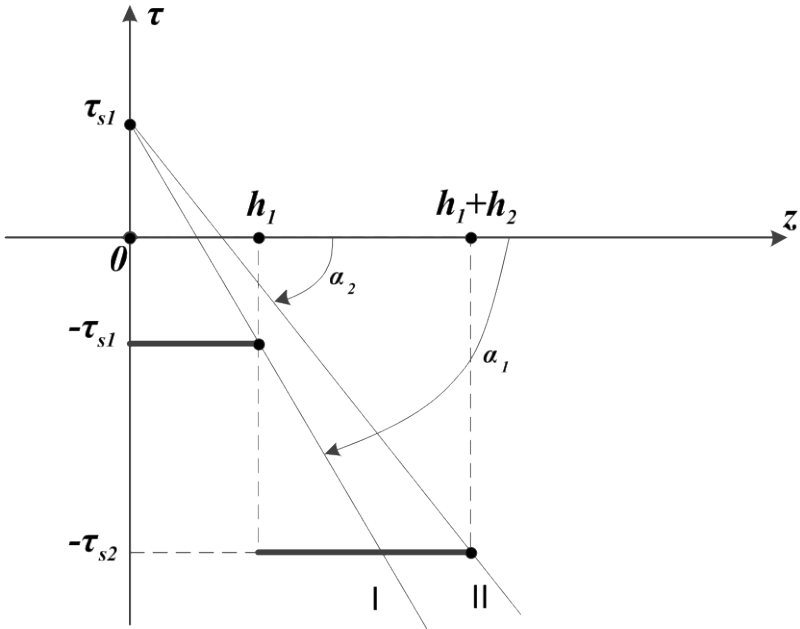


Рис. 146. Пластическое течение в двухслойной полосе

Найдем постоянную интегрирования  $C_0$ , входящую в (4.13):

$$\int_0^{h_1+h_2} \sigma_{xx}(x=\bar{l}, z) dz = 0,$$

$$\int_0^h \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} - c_0 + 2 \sqrt{\tau_s^2(z) - \left( -\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} z + \tau_{s1} \right)^2} \right) dz = 0,$$

$$c_0 = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} \left( 1 + O\left(\frac{h}{\bar{l}}\right) \right) \sim \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l},$$

где  $O\left(\frac{h}{\bar{l}}\right)$  — бесконечно-малая одного порядка с  $\frac{h}{\bar{l}}$ .

Подставим последнее выражение в (4.13):

$$Q_{(2)} = 2\bar{l} \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} \right) \left( 1 + O\left(\frac{h}{l}\right) \right) \sim 2\bar{l} \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \bar{l} \right) \quad (4.14)$$

Из (4.8) и (4.14) видно, что случаю пластического течения всей биметаллической полосы отвечает условие (4.12), которое, в свою очередь, совпадает с условием минимума внешних сил.

Преобразуем условие (4.12):

$$(\tau_{s1} + \tau_{s2})h_1 < 2\tau_{s1}(h_1 + h_2),$$

или разделив последнее на  $\tau_{s1}h_2$ , получим:

$$(h_1/h_2) < \frac{2}{(\tau_{s2}/\tau_{s1}) - 1} \quad (4.15)$$

Из соотношения (4.15) можем сделать следующий вывод. Примем, что  $\tau_{s1}, \tau_{s2}, h_1$  заданы. Тогда (4.15) налагает ограничения на  $h_2$ : чем разнороднее материалы слоев, тем большим следует принять относительную толщину слоя, имеющего больший предел текучести. Условие (4.15) подтверждается выводами, представленными в работах [18, 19].

**4.2.** В предыдущем разделе мы представили метод определения истинного положения границы течения неоднородного по толщине тонкого пластического слоя. А теперь, зная границу области течения, можем приложить сказанное к решению задач о пластическом сжатии многослойных пластин. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о пластическом сжатии биметаллической пластины (рис. 15) в плане формы кольца ( $a \leq r \leq b$ ), у которого внутренний конец остается неизменным (затекание в пазы в одном из тел инструмента), а внешний контур свободно растекается ( $b = b(t)$ ).

Предположим, что пластическое течение происходит во всем объеме так, что выполняется условие:

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1} \quad (4.16)$$

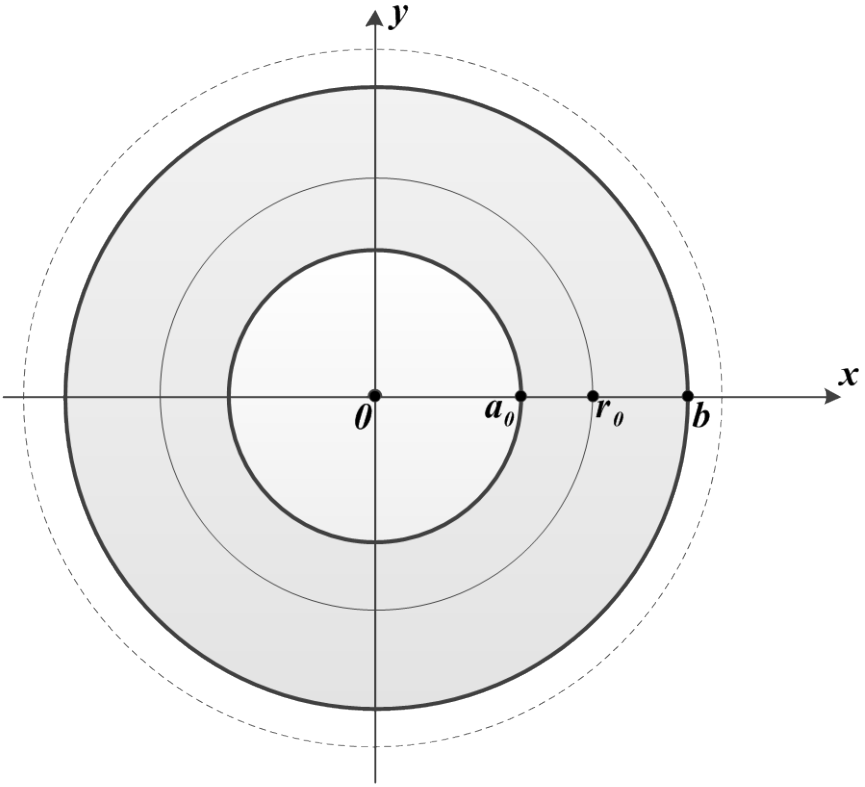


Рис. 15. Пластическая осадка тонкой пластины в плане формы кольца

Отметим, что граница раздела двух пластических сред  $h_1(t) \equiv z(t) = \frac{h_{10}}{h_{10} + h_{20}} h(t)$  определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} z; z(t = t_0) = h_{10}; 0 \leq z \leq h_1 + h_2.$$

Воспользуемся упрощенной постановкой задач ТТПС. Выпишем основные соотношения задачи в полярной системе координат:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mp \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}; \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \frac{d\lambda}{dt}, \quad (4.17)$$

$$r = a_0; \quad p = \frac{\sigma_{s1}h_1 + \sigma_{s2}h_2}{h_1 + h_2}; \quad r = b(t); \quad p = 2 \left( \frac{\sigma_{s1}h_1 + \sigma_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right). \quad (4.18)$$

Интегрируя уравнение равновесия (4.17) со стороны внутренней, а затем внешней границы области, и, приравнивая найденные значения контактного давления, определим из условия непрерывности неизвестную линию ребра поверхности давлений (линию ветвления течения)  $r = r_0$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) (r_0 - a_0) - 2\sqrt{3} \left( \frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right) = \\ & = \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) (b - r_0) - \sqrt{3} \left( \frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right), \end{aligned}$$

откуда с точностью до  $h/L$  получаем:

$$r_0 = \frac{1}{2}(b(t) + a_0) \quad (4.19)$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (4.17) с учетом условия на ребре  $w(r = r_0) = 0$ , находим:

$$w(r) = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( r - \frac{r_0^2}{r} \right) \quad (4.20)$$

Теперь с учетом условия (4.20) можем найти закон изменения свободной границы из решения задачи Коши:

$$w(b) = \frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( b - \frac{r_0^2}{b} \right) = \frac{(3b + a_0)(b - a_0)}{8b}; \quad b(t = t_0) = b_0.$$

В результате получаем в неявном виде зависимость  $b = b(t)$ :



$$8 \int \frac{db}{3b+a_0} + 8a_0 \int \frac{db}{(3b+a_0)(b-a_0)} = \int d\lambda,$$

$$\left( \frac{3b+a_0}{3b_0+a_0} \right)^{2/3} \left( \frac{b-a_0}{b_0-a_0} \right)^2 = e^{\lambda(t)} = \frac{h_0}{h(t)}$$

Выпишем теперь значение максимального контактного давления в точках ребра:

$$p_{\max} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} (r_0 - a_0) - 2\sqrt{3} \left( \frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2} \right) \approx \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h(t)} \left( \frac{b(t) - a_0}{2} \right).$$

## ГЛАВА 5

### ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В данном разделе рассматриваются такие течения пластического слоя, которые невозможно описать в рамках модели идеальной жидкости, в частности, растекание слоя, состоящего из разных сред. Для их корректного описания надо использовать модель вязкой жидкости, или более простую теорию пограничного слоя.

#### 5.1. Постановка краевой задачи (модель «вязкой жидкости») в размерных величинах

В процессах течения тонкого пластического слоя, как известно [1], достигаются большие давления, на порядок превышающие сдвиговые свойства материала, и, в начальном приближении, свойства материала пластического слоя близки к свойствам гидродинамической жидкости. При этом, однако, влияние сдвиговых свойств остается заметным в задачах растекания слоя, составленного из разных идеально-пластических сред. Пусть слой, составленный из разных идеально-пластических сред, сжимается между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис. 16).

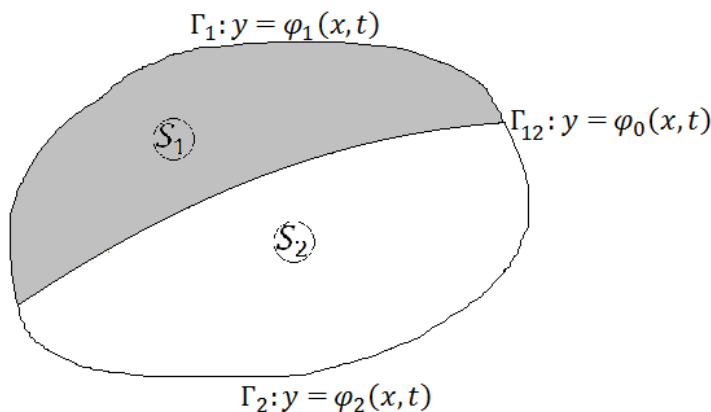


Рис. 16. Слой, составленный из двух идеально-пластических сред, в плане.

Тогда основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (5.3)$$

$p, u, v$  — контактное давление и скорости течения;  $\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk}$  ( $k=1,2$ ) — предел текучести пластического материала в области  $S_1$  и  $S_1$  соответственно;  $h = h(t)$  — известный закон изменения толщины слоя;  $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$  — степень деформации;  $h_0 = h(t_0)$ .

Выпишем условия на границе раздела двух пластических сред  $\Gamma_{12} : y = \varphi_0(x, t)$ :

$$\sigma_{11}^{(1)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(2)}, \quad (5.4)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(2)}, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v_k, \quad (5.6)$$

и свободной границе  $\Gamma_k : y = \varphi_k(x, t), (k=1,2)$ :

$$\sigma_{11}^{(k)} \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad (5.7)$$

$$\sigma_{12}^{(k)} \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = v_k, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(k)} &= -p_k + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u_k}{\partial x}; \\ \sigma_{12}^{(k)} &= \frac{1}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right); \\ \sigma_{22}^{(k)} &= -p_k + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v_k}{\partial y}.\end{aligned}$$

## 5.2. Краевая задача в безразмерных величинах. Упрощение краевой задачи

Пусть  $h_0, L_0, v_0, p_0$  — характерные значения толщины слоя, линейного размера слоя, скорости течения и контактного давления;  $\varepsilon = h_0/L_0 \ll 1$  — малый параметр, характеризующий тонкость пластического слоя. Примем, что  $p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon$ ,  $v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon$ . Тогда, в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1 \quad (5.11)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{3} \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (5.12)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{3} \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2 \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2 \quad (5.14)$$

где  $\delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2}$ .

Динамические условия (5.4), (5.5) на  $\Gamma_{12}$  (черточки над безразмерными величинами убираем) разрешим относительно контактного давления:

$$(p_1 - p_2) \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) = \varepsilon A, \quad p_1 - p_2 = \varepsilon B, \quad (5.15)$$

где

$$A \equiv \left[ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right],$$

$$B \equiv \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \left[ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right].$$

Как видно из (5.15),  $p_1 - p_2$  есть малый параметр, который определяется однозначно, если:

$$A + B \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad (5.16)$$

или:

$$\left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left( \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial x} - 1 \right) = 2 \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right).$$

Аналогично поступаем с динамическими условиями (5.7), (5.8) на свободной границе:

$$p_k \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) = \varepsilon A_k, \quad p_k = \varepsilon B_k, \quad (5.17)$$

где  $p_k$  — малый параметр, определяемый однозначно, если только

$$\left( \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_k^2}{\partial x} - 1 \right) = 2 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right). \quad (5.18)$$

Если отказаться от условий (5.16) и (5.18), то, в главном приближении, ( $\varepsilon = 0$ ) исходная краевая задача для «вязкой жидкости» сводится к известной задаче о растекании слоя, составленного из идеально-пластического материала, в приближении «идеальной жидкости» относительно искомых переменных  $u, v, p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \text{в } S_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{1}{\delta} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{1}{\delta} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \text{в } S_2 \\ p_1 &= p_2 \quad \text{на } \Gamma_{12}, \\ p_k &= 0 \quad \text{на } \Gamma_k (k=1,2). \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение несжимаемости (5.14), а также кинематические граничные условия (5.6) и (5.9) остаются без изменения.

### 5.3. Задача о свободном растекании пластического слоя, состоящего из разных сред, в постановке модели «идеальной жидкости»

В рамках упрощенной постановки ставится краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленной из двух разных сред. Пусть пластический слой постоянной толщины в начальный момент имеет форму клиновидной области и состоит из двух разных сред с начальными углами раствора  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно (рис. 17). Предположим, что такой слой свободно растекается между параллельно сближающимися жесткими шероховатыми плитами. Подобная задача, в условиях симметрии области, в постановке «модели идеальной жидкости» решена в [4].

Выберем неподвижную систему координат  $oxy$ , в которой в начальный момент  $t = t_0$  указанная область задается углом  $\beta_2 \geq 0$ . При этом уравнения границ растекающейся области в начальный момент заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : y &= k_1 x, k_1 > 0, \\ \Gamma_2 : y &= k_2 x, k_2 \leq 0, \\ \Gamma_{12} : y &= k_0 x, \end{aligned}$$

где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_0$  определяются через  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_2 &= -k_2, \\ \operatorname{tg} (\alpha_2 - \beta_2) &= k_0, \end{aligned}$$

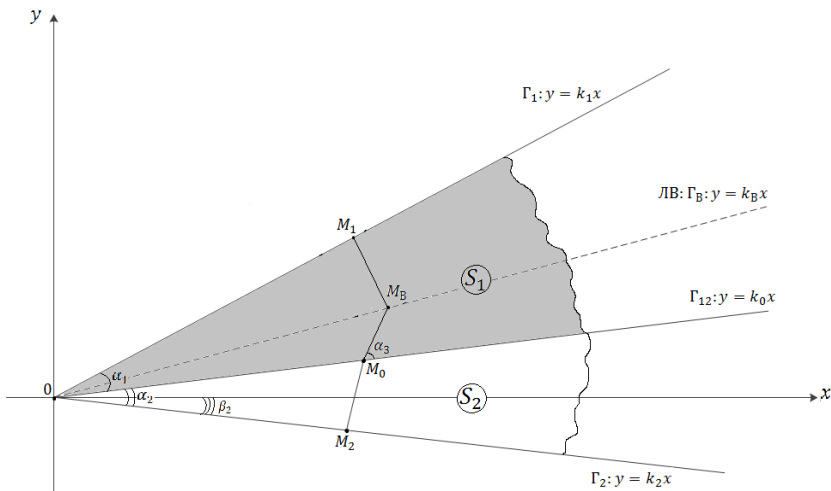


Рис. 17. О растекании в клиновидной области пластического слоя, состоящего из двух разных сред

$$\operatorname{tg} [\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2)] = k_1.$$

Выпишем основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости (в размерных величинах,  $t \geq t_0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

а также условия на неизвестной границе раздела двух сред  $\Gamma_{12}(y = \varphi_0(x, t), t > t_0)$ , которая в начальный момент задана уравнением

$$\varphi_0(x, t_0) = k_0 x.$$

$$p_1 = p_2,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v,$$

и на неизвестных свободных границах  $\Gamma_m (y = \varphi_m(x, t), t > t_0, m = 1, 2)$ , которые в начальный момент также известны ( $\varphi_m(x, t_0) = k_m x$ ):

$$p = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = v.$$

Здесь  $p, u, v$  — контактное давление и скорости течения;  $\sigma_{sk} = \sqrt{3} \tau_{sk} (k = 1, 2)$  — предел текучести пластического материала в области  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, причем для определенности положим, что  $\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2}$ ;  $h = h(t)$  — известный закон изменения толщины слоя;  $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$  — степень деформации;  $h_0 = h(t_0)$ .

Пусть  $L_0$  — характерное значение линейного размера слоя. Вводя безразмерные величины:

$$\varepsilon = h_0/L_0, \quad \delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2} \geq 1, \quad p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon, \quad v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon.$$

перепишем соотношения задачи в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1 \quad (5.20)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (5.21)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2 \quad (5.23)$$



$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_{12} \quad (5.25)$$

$$\bar{p} = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_k \quad (k=1,2). \quad (5.27)$$

Задача решается в безразмерных величинах. Для удобства записи черточки над безразмерными величинами ниже опускаем. Как известно [1], внутри области течения существует линия ветвления течения, образованная пересечением двух различных линий тока и на которой  $u^2 + v^2 = 0$ . С другой стороны, при  $h = h(t)$  линиями тока служат прямые, ортогональные к контуру свободно растекающегося пластического слоя. Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  — некоторая точка на линии раздела двух сред  $\Gamma_{12}$ . Для определенности положим, что:

$$\sigma_{s1} \sin \alpha_1 \geq \sigma_{s2} \sin \alpha_2. \quad (5.28)$$

Предположение (5.28) означает лишь, что линия ветвления течения в начальный момент  $t = t_0$  располагается в области  $S_1$ . Поэтому продолжим линию тока, исходящую из области  $S_2$ , в область  $S_1$ , отсчитывая от точки  $M_0 \in \Gamma_{12}$ . Для этого найдем угол преломления  $\pi/2 - \alpha_3$  линии тока в точке  $M_0$  [29]:

$$\begin{aligned} \frac{dp(s)}{ds} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cos \alpha_3, \\ \delta \cos \alpha_3 &= \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где  $s$  — параметр длины дуги вдоль линии  $\Gamma_{12}$ . Формула (5.29) означает, что при пересечении линии раздела двух пластических сред линия тока преломляется, причем угол преломления увеличивается при прохождении в «менее плотную» среду (аналогия с оптикой). Из (5.29) следует, что все линии тока входят в область  $S_2$  под постоянным углом к оси  $ox$ . Теперь, зная линию тока, исходящую из точки  $M_0 \in \Gamma_{12}$ , можем найти на ней точку  $M_B(x_B, y_B)$  ветвления течения из следующего условия:

$$\frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{1}{\delta} (OM_0 \sin \alpha_2) + \frac{2}{\sqrt{3h}} (M_0 M_B) = \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} \quad (5.30)$$

В (5.30) справа стоит выражение для контактного давления в точке  $M_B$ , найденного вдоль другой линии тока, исходящей от контура  $\Gamma_1$ , причем величина:

$$s = \frac{|k_1 x_B - y_B|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{k_1 x_B - y_B}{\sqrt{1+k_1^2}},$$

есть расстояние от точки  $M_B$  до границы  $\Gamma_1$ .

Находим оставшиеся в (5.30) величины:

$$OM_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0 \sqrt{1+k_0^2}$$

Уравнение прямой  $M_0 M_B$ :

$$y_0 - y = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) \cdot (x - x_0), \quad (5.31)$$

где  $\beta_0 \equiv \operatorname{arctg} k_0 \geq 0$ .

Из (5.29) получаем:

$$k_5 \equiv \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{k_0 \sin \alpha_2 + \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}{\sin \alpha_2 - k_0 \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}. \quad (5.32)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \operatorname{tg}[(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) + \operatorname{tg} \beta_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) \operatorname{tg} \beta_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2}; \\ \sin \alpha_2 &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{k_0 - k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} > 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Подставим (5.33) в (5.32) и найдем  $k_5$  в зависимости от  $k_2$ ,  $k_0$  и  $\delta$ :

$$k_5 = \frac{k_0(k_0 - k_2) + \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{(k_0 - k_2) - k_0 \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}} \quad (5.34)$$

В частности, при  $\delta = 1$ , (т.е. пластическая среда - однородная) из (5.34) получаем, что:

$$k_5 = -\frac{1}{k_2}.$$

Из (5.31) получаем:

$$M_0 M_B = \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} = |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2}, \quad (5.35)$$

где учтено, что

$$y_B = y_0 + k_5 (x_B - x_0) = k_0 x_0 + k_5 (x_B - x_0).$$

Подставим (5.33), (5.34), (5.35) в (5.30):

$$\frac{1}{\delta} \left( x_0 \sqrt{1 + k_0^2} \right) \sin \alpha_2 + |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2} = \frac{k_1 x_B - (y_0 + k_5 (x_B - x_0))}{\sqrt{1 + k_1^2}}$$

Разрешим последнее соотношение относительно  $x_B (x_B \geq x_0)$ :

$$x_B = x_0 \frac{f_1(k_1, k_2, k_0, \delta)}{f_2(k_1, k_2, k_0, \delta)}, \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv -\frac{1}{\delta} \sqrt{1 + k_0^2} \sin \alpha_2 + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \\ &= -\frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{1 + k_0^2} (k_0 - k_2)}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}}; \\ f_2 &\equiv \sqrt{1 + k_5^2} - \frac{k_1 - k_5}{\sqrt{1 + k_1^2}}. \end{aligned}$$

Как видно из (5.35), (5.36), линия ветвления (ЛВ) в момент  $t = t_0$  есть прямая:

$$y_B = k_B x_B, \quad k_B \equiv \frac{f_1 k_5 + f_2 (k_0 - k_5)}{f_1}. \quad (5.37)$$

В частности, при  $\delta = 1$  формула (5.37) упрощается:

$$k_B = \frac{k_2 \sqrt{1+k_1^2} + k_1 \sqrt{1+k_2^2}}{\sqrt{1+k_1^2} + \sqrt{1+k_2^2}},$$

$$\arctg k_B - \arctg k_2 = \arctg k_1 - \arctg k_B = \frac{1}{2} (\arctg k_1 - \arctg k_2).$$

Последняя формула означает, что для однородного пластического слоя линия ветвления равноотстоит от линий свободных контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Если дополнительно принять, что  $k_2 = -k_1$ , то получаем:

$$k_B = 0,$$

т.е. линия ветвления совпадает с осью  $ox$ .

Получим теперь зависимости для контактного давления и скорости течения в начальный момент. Рассмотрим сперва область  $S_{1B}$ , ограниченную линиями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_B$ . Линия тока, проходящая через точку  $M(x, y) \in S_{1B}$ :

$$y - y_B = -\frac{1}{k_1}(x - x_B)$$

Последнее условие, с учетом (5.37), разрешается относительно  $x_B$ :

$$x_B = \frac{k_1 y + x}{k_1 k_B + 1}$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x - y)}{\sqrt{1+k_1^2}},$$

$$V(x, y) = \frac{d\lambda}{dt} \Big|_{x_B = x} \sqrt{1 + \frac{1}{k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x) \sqrt{1+k_1^2}}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{k_1 k_B + 1} (y - k_B x).$$

$$u = -V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = -V \sin \beta_1 = -\frac{V k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) =$$

$$= -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 (y - k_B x)}{k_1 k_B + 1},$$

$$v = V \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = V \cos \beta_1 = \frac{V}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x)}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1} \quad (5.38)$$

где  $\beta_1 \equiv \arctg k_1 > 0$ .

Рассмотрим теперь область  $S_{B0}$ , ограниченную линиями  $\Gamma_B$  и  $\Gamma_{12}$ . Линия тока, проходящая через точку  $M(x, y) \in S_{B0}$ , имеет вид:

$$y - y_B = k_5(x - x_B).$$

Разрешим последнее условие относительно  $x_B$ :

$$x_B = \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p(M_B) + \frac{2}{\sqrt{3h}}(M_B M) = \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3h}} \sqrt{(y - y_B)^2 + (x - x_B)^2} = \frac{2}{\sqrt{3h}} \left( \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5} \right) \frac{(k_1 - k_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3h}} \left( \frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right) \sqrt{1+k_5^2}, \\ V(x, y) &= \frac{d\lambda}{dt}(M_B M) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \\ &= \frac{d\lambda}{dt} |x - x_B| \sqrt{1+k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) \sqrt{1+k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1+k_5^2} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$u = -V \cos(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V}{\sqrt{1+k_5^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5},$$

$$\begin{aligned} v &= -V \sin(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V \cdot \operatorname{tg}(\alpha_3 + \beta_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha_3 + \beta_0)}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) k_5 = \\ &= -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Рассмотрим, наконец, область  $S_{B2}$ , ограниченную линиями  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_2$ . Линия тока, проходящая через точку  $M(x, y) \in S_{B2}$ , имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{k_2}(x - x_0).$$

Разрешим последнее условие относительно  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{k_2 y + x}{k_2 k_0 + 1}.$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{|k_2 x - y|}{\sqrt{1+k_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{-k_2 x + y}{\sqrt{1+k_2^2}}.$$

Скорость течения в точке  $M_0$  допускает разрыв. Найдем скорость в точке  $M_0$ , со стороны рассматриваемой части области течения, используя непрерывность нормальной скорости, а также условие (5.39):

$$V(M_{02}) = V(M_{01}) \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1+k_5^2} \frac{y_0 - k_B x_0}{k_B - k_5} \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2}.$$

С другой стороны, согласно (5.29) и (5.33),

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \alpha_2}} = \frac{1+k_0 k_2}{\sqrt{(1+k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \\ \sin \alpha_3 &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} = \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2} \sin^2 \alpha_2} = \\ &= \frac{\sqrt{\delta^2 (1+k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta \sqrt{(1+k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \end{aligned}$$

В результате,

$$\begin{aligned} V(M_{02}) &= \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1+k_5^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1+k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} x_0, \\ V(x, y) &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (M_0 M) = V(M_{02}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\frac{d\lambda}{dt}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} &= V(M_{02})+\frac{d\lambda}{dt}(x_0-x)\frac{\sqrt{1+k_2^2}}{-k_2}=\frac{d\lambda}{dt}\Psi(x,y), \\
\Psi &\equiv \frac{1}{k_2k_0+1}\left[\Psi_1-\sqrt{1+k_2^2}(y-k_0x)\right], \\
\Psi_1 &\equiv \sqrt{1+k_5^2}\frac{k_0-k_B}{k_B-k_5}\frac{\sqrt{\delta^2(1+k_0k_2)^2+(\delta^2-1)(k_0-k_2)^2}}{\delta(k_2k_0+1)}(k_2y+x), \\
u(x,y) &= -V(M)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right)=-V(M)\sin\beta_2=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\Psi\cdot k_2}{\sqrt{1+k_2^2}}, \\
v(x,y) &= -V(M)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right)=-V(M)\cos\beta_2=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\Psi}{\sqrt{1+k_2^2}} \quad (5.41)
\end{aligned}$$

Итак, нашли распределение  $p, u, v$  во всей области течения в начальный момент. Покажем, что линии  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$  остаются прямыми. Допустим, что они остаются прямыми, то есть их можно задать уравнениями:

$$\Gamma_1: y = k_1(t)x \quad (5.42)$$

$$\Gamma_2: y = k_2(t)x \quad (5.43)$$

$$\Gamma_{12}: y = k_0(t)x$$

Подставим (5.42) в кинематические условия (5.27):

$$\Gamma_1: \Gamma_1: \dot{k}_1x - k_1 \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_Bx)}{k_1k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_Bx)}{k_1k_B + 1},$$

в которой использованы формулы (5.38) относительно скоростей, а  $y = k_1x$ . Или:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1: \dot{k}_1 - \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1^2(k_1 - k_B)}{k_1k_B + 1} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 - k_B}{k_1k_B + 1} \\
\Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} &= \frac{(k_1 - k_B)(1 + k_1^2)}{k_1k_B + 1}. \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Аналогично получаем дифференциальное уравнение относительно  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_2: \dot{k}_2 x + k_2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\Psi \cdot k_2}{\sqrt{1+k_2^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\Psi}{\sqrt{1+k_2^2}},$$

где  $\Psi$  определяется из (5.41), в которой  $y = k_2 x$ :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi_0 x, \\ \Psi_0 &\equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[ \Psi_2 - \sqrt{1+k_2^2} (k_2 - k_0) \right], \\ \Psi_2 &\equiv \sqrt{1+k_5^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1+k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} (k_2^2 + 1) \end{aligned}$$

или

$$\Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} = -\Psi_0 \sqrt{1+k_2^2} \quad (5.45)$$

В частности, при  $\delta = 1$  и  $k_2 = -k_1$  формулы (5.44) и (5.45) упрощаются:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} &= k_1 (1+k_1^2) \\ \Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} &= k_2 (1+k_2^2), \quad \Psi_0 = -k_2 \sqrt{1+k_2^2}, \end{aligned}$$

т.е. получили известное дифференциальное уравнение задачи о растекании однородного пластического слоя, занимающей область формы клина.

И, наконец, третье дифференциальное уравнение (5.25) относительно  $\Gamma_{12}$ :

$$\Gamma_{12}: \dot{k}_0 x - k_0 \frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5}.$$

где использованы формулы (5.40) для скоростей, в которых  $y = k_0 x$ . Или,

$$\Gamma_{12}: \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B)(k_0 - k_5)}{k_B - k_5} \quad (5.46)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (5.44), (5.45), (5.46) в общем случае решается численными методами. В результате получаем законы (5.42) изменения границ пластических областей в процессе растекания.



Таким образом, мы представили в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, «в модели идеальной жидкости», причем:

1. Показано, что границы этих клиньев остаются прямыми в процессе растекания. Выведены уравнения для эволюции их границ.

2. Установлено, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Выведена формула для нахождения линии ветвления течения.

## ГЛАВА 6

### ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ ПО УПРУГО-ДЕФОРМИРУЕМЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

#### 6.1. Необходимые сведения из теории дифференциальных уравнений

Пусть задано нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0, p \equiv u_x, q \equiv u_y.$$

Всякое решение характеристической системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \frac{dy}{ds} = F_q, \frac{du}{ds} = F_p p + F_q q, \frac{dp}{ds} = -(F_x + F_u p), \frac{dq}{ds} = -(F_y + F_u q), \quad (6.2)$$

удовлетворяющее уравнению (6.1), называют характеристической полоской, а пространственную кривую  $x(s), y(s), u(s)$ , несущую такую полоску, называют характеристической кривой. Имеет место **теорема**:

Если характеристическая полоска имеет один общий элемент  $(x, y, u, p, q)$  с интегральной поверхностью  $u = u(x, y)$  уравнения (6.1), то эта полоска целиком принадлежит упомянутой интегральной поверхности.

Напомним еще одну **теорему**:

Пусть  $C : x = x(t), y = y(t), u = u(t)$  — заданная пространственная кривая, которая совместно с заданными функциями  $p(t), q(t)$  образует начальную полоску  $C_1(x, y, u, p, q)$ , удовлетворяющую условию полоски:

$$\frac{du}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}, \quad (6.3)$$

и соответственно уравнению (6.1); и пусть вдоль этой полоски:

$$\Delta = F_p y_t - F_q x_t \neq 0. \quad (6.4)$$

Тогда, в некоторой окрестности  $C_1$  существует одна и только одна интегральная поверхность, содержащая данную полоску.

В задаче о течении пластического слоя на плоскости [1,7] уравнение (6.1) относительно контактного давления  $u = u(x, y)$  в области  $S$  имеет вид:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2 - \frac{4\tau_s^2(u)}{(h_0(x, y) + \bar{w}u)^2} = 0, \quad (6.5)$$

где  $u = u(x, y)$  — контактное давление в слое,  $\tau_s = \tau_s(u)$  — известный закон упрочнения материала пластического слоя;  $h_0 = h_0(x, y)$  — заданная толщина пластического слоя (если инструменты считать недеформируемыми), определяемая законом сближения поверхностей тел инструмента;  $\bar{w}u$  — нормальные (к срединной поверхности слоя) упругие перемещения точек на контактной поверхности, которые будем задавать в виде модели обобщенного винклеровского основания:

$$\bar{w}u = \sum_{i=1}^n a_i u^i, \quad (6.6)$$

где  $a_i (i = 1, \dots, n)$  — известные из опыта константы, характеризующие свойства контактирующих тел. В частности, если  $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ , соотношения (6.6) переходят в известную простейшую модель винклеровского упругого основания.

Пусть  $h_0(x, y) = h_0 = const$ . В этом случае пластический слой течет между параллельными плоскостями тел инструмента. Выпишем для него характеристическую систему (6.2):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= F_p = 2p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q = 2q, \\ \frac{du}{ds} &= F_p p + F_q q = 2(p^2 + q^2) = 2 \cdot \frac{4\tau_s^2(u)}{\left(h_0 + \sum_{i=1}^n a_i u^i\right)^2} \equiv 2\varphi(u), \\ \frac{dp}{ds} &= -F_u p = \varphi'(u) p, \quad \frac{dq}{ds} = -F_u q = \varphi'(u) q. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из двух последних уравнений системы (6.7) получаем:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p}{q}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \quad \frac{p}{q} = \frac{p_0}{q_0} = const, \quad (6.8)$$

т.е. вдоль характеристических кривых величина  $\frac{p}{q}$  остается постоянной.

Из третьего уравнения системы (6.7) после интегрирования получаем:

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\phi(u)} = 2s, \quad (6.9)$$

т.е. контактное давление  $u = u(s)$  вдоль характеристик определяется в квадратурах. Здесь  $u = u_0$  — значение контактного давления в точке контура  $\partial S$  рассматриваемой области.

Таким же образом можем проинтегрировать два последних уравнения системы (6.7) вдоль характеристических линий:

$$p(s) = p_0 \exp\left(\int_0^s \phi'(u(s))\right), q(s) = q_0 \exp\left(\int_0^s \phi'(u(s))\right). \quad (6.10)$$

Покажем еще, что характеристические линии в этом случае ( $h_0 = const$ ) будут прямыми. Действительно, из первых двух соотношений системы (6.7) получаем, что вдоль характеристик имеет место:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_q}{F_p} = \frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0},$$

или после интегрирования:

$$y(s) = \left(\frac{q_0}{p_0}\right)x(s) + y_0, \quad (6.11)$$

т.е. характеристическими линиями служат прямые, выходящие из начальной полоски  $C(\mu) = \partial S(\mu)$ , где  $\mu$  — параметр, изменяющийся вдоль контура области течения.

Выберем вместо  $S$  длину дуги  $\bar{s}$  вдоль характеристик, так что, согласно (6.7), получаем:

$$d\bar{s}^2 = dx^2 + dy^2 = 4(p^2 + q^2)ds^2,$$

$$d\bar{s} = 2\sqrt{p^2 + q^2} ds = 2\left(\frac{2\tau_s}{h}\right) ds = \frac{4\tau_s}{h} ds. \quad (6.12)$$

С учетом (6.11) система (6.7) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\bar{s}} &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \frac{dy}{d\bar{s}} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \frac{du}{d\bar{s}} &= \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{2\tau_s}{h}, \\ \frac{dp}{d\bar{s}} &= \frac{\varphi'(u)p}{2\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \frac{dq}{d\bar{s}} = \frac{\varphi'(u)q}{2\sqrt{p^2 + q^2}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

## 6.2. Постановка и решение полуобратной задачи течения в тонком пластическом слое

Рассмотрим задачу о течении пластического слоя в фиксированной области  $S_0(x, y)$  между двумя сближающимися поверхностями упругодеформируемых тел инструмента (рис. 18). Требуется найти контактные давления  $p(x, y)$ , а также нормальные упругие перемещения  $w(x, y)$  контактных поверхностей внешних тел из решения следующей задачи [7]:

$$F(x, y, p, p_x, p_y) \equiv p_x^2 + p_y^2 - \frac{4\tau_s^2}{(h_0(x, y) + \tilde{w}p)^2} = 0, \quad (6.14)$$

$$w(\bar{x}) = \iint_{(S_0)} (K_1(\bar{x}, \bar{x}') + K_2(\bar{x}, \bar{x}')) p(\bar{x}') d\bar{x}', \quad \bar{x} \equiv (x, y), \quad (6.15)$$

$$p|_{\partial S_0} = P_0, \quad (6.16)$$

Здесь  $h_0(x, y)$  — заданная толщина слоя, если инструменты считались бы недеформируемыми;  $K_i(\bar{x}, \bar{x}'), i=1, 2$  — известные из эксперимента ядра, определяющие упругие свойства тел инструмента, и зависящие от свойств контактирующих тел, состояния поверхностей контакта, формы и размеров воздействующих тел. Предполагается, что  $h_0(x, y)$  — слабо изменяющаяся функция координат, так что  $|\partial h_0 / \partial x| \ll 1, |\partial h_0 / \partial y| \ll 1$ .

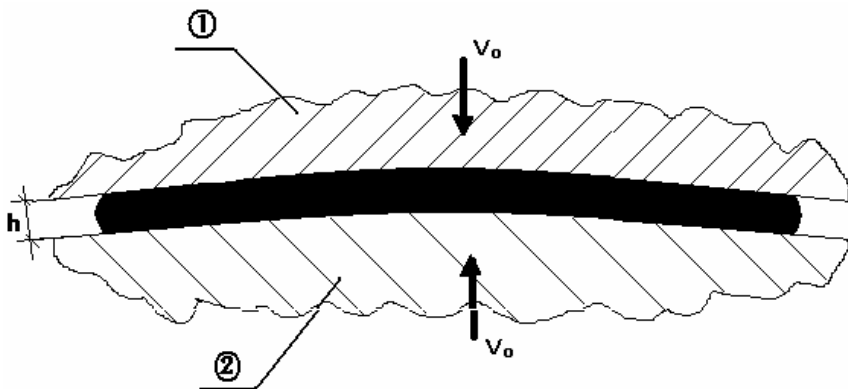


Рис. 18. Пластическое течение в тонком слое по упруго-деформируемым поверхностям

Для решения задачи (6.14)–(6.16) в работе [7] предложен метод последовательных приближений, при этом вопрос о сходимости метода остается открытым. В работах [25, 26] зависимость (6.15) задавалась в виде модели винклеровского упругого основания ( $w(x, y) = \lambda p(x, y)$ ); на ее основе исследовано влияние упругих деформаций контактирующих тел на процесс растекания пластического слоя; с их учетом решены задачи растекания пластического слоя в областях, ограниченных кривыми второго порядка.

Будем считать, что задачу (6.14)–(6.16) мы умеем решать, так что ее решение  $w = w_1(x, y), p = p_1(x, y)$  нам известно. Рассмотрим теперь другую задачу о течении пластического слоя переменной, но уже заданной толщины:

$$h(x, y) = h_0(x, y) + w_1(x, y), \quad (6.17)$$

между недеформируемыми поверхностями твердых тел, занимающего ту же область  $S_0(x, y)$ :

$$p_x^2 + p_y^2 - \frac{4\tau_s^2}{h^2(x, y)} = 0, \quad (6.18)$$

причем, с краевым условием (6.16), совпадающим с условием предыдущей задачи о течении пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям.

Будем предполагать, что решение последней задачи существует и единственно. Решения двух представленных выше задач относительно контактного давления  $p(x, y)$ , как нетрудно представить, совпадают.

Положим теперь  $h(x, y) = h = const$ . Тогда, из (6.17) получаем:

$$h_0(x, y) = h - w_1(x, y). \quad (6.19)$$

Таким образом, получили следующий интересный результат: мы восстановили ту начальную толщину  $h_0(x, y)$  слоя, которая в результате пластической осадки дает конечное тонкостенное изделие требуемой постоянной толщины  $h$ .

Заметим, что искомая начальная толщина  $h_0(x, y)$  получается, если из заданной постоянной величины  $h$  вычесть поправку  $w_1(x, y)$ , которая определяется по формуле (6.15) после подстановки в них найденного в результате решения второй задачи контактного давления  $p(x, y)$ .

Приведем примеры решения полуобратных задач.

а) Течение пластического слоя в круговой области ( $r \leq R$ ).

Пусть  $h, \tau_s$  — заданные геометрические и механические характеристики. В соответствии с формулой (6.19) найдем ту начальную толщину  $h_0(x, y)$  слоя, которая в результате пластической штамповки обеспечивает получение тонкого кругового диска постоянной толщины  $h$ .

Контактное давление в круговом слое, как известно, имеет вид:

$$p(r) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(R - r), r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R. \quad (6.20)$$

В случае, если для контактирующих тел инструмента принять модель винклеровского упругого основания, то для искомой начальной поправки к толщине слоя получим:

$$w_1(x, y) = w_1(r) = \lambda p = \lambda \left( \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(R - r) \right). \quad (6.21)$$

Если внешние тела подчиняются обобщенной модели винклеровского упругого основания, то:

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k p^k, \quad (6.22)$$

где  $p(x, y)$  определено формулой (6.20), а коэффициенты  $a_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — известные из опыта характеристики материалов пластического слоя и упругих тел инструмента.

Если же для упругих перемещений тел инструмента выбрать общий закон связи (6.15), то  $w_1(x, y)$  могут быть найдены аналогичным образом, подставив в формулу (6.15) зависимость (6.20) относительно  $p(x, y)$ .

б) Течение пластического слоя в прямоугольнике ( $|x| \leq a, |y| \leq b, a \geq b$ ).

Контактное давление, как известно, в центральной области ( $|x| \leq b$ ) имеет вид:

$$p(y) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(b - y),$$

достигая наибольшего значения на оси  $Ox$  (в точках ребра поверхности давлений). И соответственно рассмотренному в предыдущей задаче, можем найти распределение нормальных упругих перемещений под штампом для каждого из выбранных моделей упругого тела инструмента.

### 6.3. Обобщение постановки краевой задачи о растекании пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям

Рассматривается задача определения контура  $y = \varphi(x, t)$  свободно растекающегося на плоскости слоя известной толщины  $h(t)$  (если воздействующие тела считать недеформируемыми), в начальный момент имеющего форму односвязной выпуклой области, ограниченной  $y = \varphi_0(x, t_0)$  и симметричного относительно оси  $OX$ . В случае винклеровской модели упругого тела, для толщины слоя имеем:  $H(x, y, t) = h(t) + \lambda p(x, y, t)$ .

В [25] выведено точное нелинейное дифференциальное уравнение для определения контура  $y = \varphi(x, \tau)$  свободно растекающегося слоя между упруго деформируемыми по Винклеру поверхностями [7]:



$$\begin{aligned}
& \frac{2}{D} \left\{ \frac{AF}{D^2} \left[ \sqrt{E} \frac{8E^2}{15} - \sqrt{D\varphi\varphi' + E} \left( \frac{(D\varphi\varphi' + E)^2}{5} - 2E \frac{(D\varphi\varphi' + E)}{3} + E^2 \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{BF + AM}{D} \left[ \sqrt{E} \left( -\frac{2E}{3} \right) - \sqrt{D\varphi\varphi' + E} \left( \frac{(D\varphi\varphi' + E)}{3} - E \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + BM \left[ \sqrt{E} - \sqrt{D\varphi\varphi' + E} \right] \right\} = \dot{\varphi}(x, t) [h(t) + k\lambda\sigma_s], \quad (6.23)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A(x, t) &\equiv \frac{\varphi''(x, t)}{\varphi'^2(x, t)}; B(x, t) \equiv \frac{1 + \varphi'^2(x, t)}{\varphi'(x, t)}; D(x, t) \equiv \frac{4\lambda\tau_s \sqrt{1 + \varphi'^2(x, t)}}{\varphi'^2(x, t)}; \\
E(t) &\equiv (h + k\lambda\sigma_s)^2; F(x, t) \equiv \frac{-2\lambda\tau_s \dot{\varphi}'(x, t)}{\varphi'^2(x, t) \sqrt{1 + \varphi'^2(x, t)}}; \\
M(t) &\equiv (h + k\lambda\sigma_s) \frac{dh}{dt}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\tau = \tau(t) = \ln \left( \frac{h_0}{h(t)} \right)$  — степень деформации,  $d\tau/dt > 0$ .

В частном случае растекания пластического слоя по недеформируемым поверхностям оно переходит в известное уравнение [13]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \varphi^2 \varphi''_{xx} - \varphi(1 + \varphi_x'^2) = 0.$$

В предположении малости параметра  $\lambda(\lambda p \ll h_0)$ , отвечающего за нормальные упругие перемещения воздействующих тел, уравнение (6.23) можно преобразовать к виду:

$$L(\varphi) = \lambda L_1(\varphi), \quad (6.24)$$

где

$$L(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \varphi^2 \varphi''_{xx} - \varphi(1 + \varphi_x'^2),$$

$$L_1(\varphi) = \frac{2\tau_s}{h^2} \varphi^2 \left( \frac{\varphi\varphi''}{3} + \frac{1+\varphi_x'^2}{2} \right) \left( \frac{\frac{\partial\varphi'_x}{\partial\tau}}{\varphi'_x\sqrt{1+\varphi_x'^2}} - \sqrt{1+\varphi_x'^2} \right).$$

В безразмерных величинах  $\left( \bar{x} = \frac{x}{l}, \tau = \ln \frac{h_0}{h(t)}, \chi_1 = \frac{h_0}{l}, \lambda_0 = \frac{2\lambda_s l}{h_0^2} \right)$

дифференциальное уравнение (6.24) принимает следующий вид:

$$L(\bar{\varphi}) = \lambda_0 L_2(\bar{\varphi}),$$

где

$$L(\bar{\varphi}) = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\tau} - \frac{\bar{\varphi}^2\bar{\varphi}''}{2} - \bar{\varphi}(1+\bar{\varphi}'^2);$$

$$L_2(\bar{\varphi}) = e^{2\tau} \left[ \bar{\varphi}^2 \left( \frac{\bar{\varphi}\bar{\varphi}''}{3} + \frac{1+\bar{\varphi}'^2}{2} \right) \left( \frac{\frac{\partial\bar{\varphi}'}{\partial\tau}}{\bar{\varphi}'\sqrt{1+\bar{\varphi}'^2}} - \sqrt{1+\bar{\varphi}'^2} \right) \right].$$

Ниже для удобства записи штрихи над безразмерными величинами опускаем.

В работе [25] представлены некоторые классы решений  $\varphi = \varphi_0(x, \tau)$  задач растекания пластического слоя по недеформируемым поверхностям в области, первоначально ограниченной кривыми второго порядка (эллипсом, гиперболой, параболой, парой пересекающихся прямых).

Решение «возмущенной» дифференциальной задачи (6.24) будем искать в виде:

$$\varphi(x, \tau) = \varphi_0(x, \tau) + \lambda_0 \varphi_1(x, t), \quad (6.25)$$

где  $\varphi_0(x, t)$  — известное решение соответствующей невозмущенной задачи.

После подстановки 6.25) в (6.24) с учетом очевидного условия:

$$L(\varphi_0) = 0,$$

получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно  $\varphi_1(x, \tau)$  с известной правой частью:

$$L_3(\varphi_1) = L_2(\varphi_0), \quad (6.26)$$

где

$$L_3(\varphi_1) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2}(\varphi_0^2 \varphi_1'' + 2\varphi_0 \varphi_1 \varphi_0'') - 2\varphi_0 \varphi_0' \varphi_1' - \varphi_1(1 + \varphi_0'^2).$$

Левую часть уравнения (6.26) можно преобразовать к виду:

$$L_3(\varphi_1) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2}(\varphi_0^2 \varphi_1)'' - \varphi_1.$$

Дифференциальное уравнение (6.26) замыкается начальным условием

$$\varphi_1(x, 0) = 0. \quad (6.27)$$

Приведем решения конкретных задач растекания в постановке (6.26), (6.27).

#### **6.4. Задача о растекании пластического слоя, первоначально занимающей на плоскости клиновидную область, близкую к полуплоскости ( $\varphi' > 1 \Rightarrow \varphi'^2 \gg 1$ )**

Известно, что решение «невозмущенной» задачи для случая полуплоскости имеет вид:

$$\varphi_0(x, \tau) = A(\tau)x, \quad (6.28)$$

где

$$A(\tau) = \frac{e^{2\tau} A_0}{\sqrt{1 + A_0^2 - e^{2\tau} A_0^2}}. \quad (6.29)$$

Упростим правую часть в уравнении (6.26):

$$L_2(\varphi_0) \sim -e^{2\tau} \varphi_0^2 \varphi_0' \left( \frac{\varphi_0 \varphi_0''}{3} + \frac{\varphi_0'^2}{2} \right) = -e^{2\tau} \frac{1}{2} \varphi_0^2 \varphi_0'^3 = -\frac{1}{2} e^{2\tau} A^5 x^2.$$

Тогда,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} A^2 (2\varphi_1 + 4x\varphi_1' + x^2 \varphi_1'') - \varphi_1 = -\frac{1}{2} e^{2\tau} A^5 x^2. \quad (6.30)$$

Ищем решение уравнения (6.30) в виде:

$$\varphi_1(x, \tau) = c_0(\tau) x^2. \quad (6.31)$$

Его решение:

$$c_0(\tau) = \int_0^\tau \left[ -\frac{1}{2} A^5(z) e^{2z - \int_0^z [6A^2(\zeta) + 1] d\zeta} \right] dz. \quad (6.32)$$

Формула (6.29) накладывает ограничения на времена  $\tau = \tau(t)$ , при которых выражение под квадратным радикалом принимает положительные значения:

$$\tau(t) < \tau_0,$$

где  $\tau_0 \equiv \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{A_0^2} \right)$ .

В частности, из (6.29) видно, что  $A = A(\tau)$  возрастает, то есть клиновидная область тупого угла в «невозмущенном» движении расширяется, приближаясь к полуплоскости.

С другой стороны,

$$\varphi(x, \tau) = \varphi_0(x, \tau) + \lambda_0 \varphi_1(x, \tau),$$

или

$$y = A(\tau)x + \lambda_0 c_0(\tau) x^2, \quad (6.33)$$

где  $A(\tau)$  и  $c_0(\tau)$  определены формулами (6.29) и (6.32), причем, как следует из (6.33),

$$\varphi(x, \tau) < \varphi_0(x, \tau).$$

Мы получили следующий интересный **результат**:

Учет упругих деформаций тел инструмента приводит к замедлению процесса расширения области растекания, представляющего в «невозмущенном» движении (течение по недеформируемым поверхностям) клиновидную область тупого угла раствора.

### 6.5. Задача о растекании пластического слоя, занимающего область, ограниченную в начальный момент параболой $y^2 = a_0x + b_0$

Решение «невозмущенной» задачи в этом случае имеет вид [25]:

$$y^2 \equiv \varphi_0^2(x, \tau) = a(\tau)x + b(\tau), a(\tau) = a_0e^{2\tau}, b(\tau) = e^{2\tau} \left[ b_0 + \frac{a_0^2}{8}(e^{2\tau} - 1) \right], \quad (6.34)$$

причем полагаем, что  $a(\tau) < 0, b(\tau) > 0$ .

Запишем (6.34) в безразмерных координатах:

$$\bar{\varphi}_0^2 = \bar{a}\bar{x} + \bar{b}, \quad (6.35)$$

где обозначено:

$$\bar{a}(\tau) \equiv \frac{a(\tau)}{l}, \bar{b}(\tau) \equiv \frac{b(\tau)}{l^2}.$$

Ниже используется формула (6.35), где «черточки» над переменными опускаем.

Будем искать решение уравнения растекания вблизи точки  $x_0 = -\frac{b}{a}$ , и примем, что:

$$\varphi'_0(x) > 1 \Rightarrow \varphi_0'^2 \gg 1.$$

Тогда,

$$L_2(\varphi_0) \sim -e^{2\tau} \varphi_0'^2 \varphi_0' \left( \frac{\varphi_0 \varphi_0''}{3} + \frac{\varphi_0'^2}{2} \right), \quad (6.36)$$

Подставим (6.34), (6.36) в (6.26):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} [2a\varphi_1' + (ax+b)\varphi_1''] - \varphi_1 = -\frac{1}{2} e^{2\tau} \left( \frac{a^3}{24} \right) \frac{1}{\sqrt{ax+b}}.$$

Умножим последнее уравнение на  $\sqrt{ax+b}$ :

$$\sqrt{ax+b} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \varphi_1 \sqrt{ax+b} + \frac{\sqrt{ax+b}}{2} [2a\varphi_1' + (ax+b)\varphi_1''] - \frac{a^3}{24} e^{2\tau} \quad (6.37)$$

Ищем решение (6.37) в виде:

$$\varphi_1 = (ax+b) \sum_{k=0}^{\infty} c_k (ax+b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (ax+b)^{k+v}, \quad (6.38)$$

с неизвестными коэффициентами  $c_k = c_k(\tau), k=0,1,2,\dots$

Дифференцируем (6.38) и подставим в (6.37). Заметим, что в результате получим слагаемые, содержащие линейное относительно  $x$  выражение  $(\dot{ax} + \dot{b})$ , которые не позволяют приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $(ax+b)$ , а следовательно, не можем получить уравнения для определения неизвестных коэффициентов  $c_k(\tau)$ . Однако можно рассмотреть случай малых времен ( $\tau \ll 1$ ), так что имеем  $\dot{a}(\tau) \sim 2a(\tau)$ ,  $\dot{b}(\tau) \sim 2b(\tau)$ . С учетом последнего, уравнение (6.37) переходит в систему рекуррентных алгебраических соотношений относительно  $c_k(\tau)$ :

$$c_0(\tau) = \frac{a(\tau)}{18} e^{2\tau}, \quad c_0(\tau) < 0; \quad c_1(\tau) = \frac{8\dot{c}_0(\tau)}{15a^2(\tau)};$$

$$c_2(\tau) = \frac{8}{35a^2(\tau)} (\dot{c}_1 + 2c_1) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, найдена поправка к «невозмущенному» решению задачи о растекании пластического слоя в параболической области, вызванная упругими деформациями тел инструмента:

$$y = \varphi(x, \tau) = \varphi_0(x, \tau) + \lambda_0 \varphi_1(x, t),$$

$$\varphi(x, \tau) = (ax + b) + \lambda_0 \left[ c_0 \sqrt{ax + b} + c_1 (ax + b) \sqrt{ax + b} + \dots \right].$$

**6.6. Задача о растекании пластического слоя в области, ограниченной в начальный момент времени  $\tau = 0$  гиперболой  $y^2 = a_0x^2 + b_0, a_0 > 0, b_0 < 0$**

Решение «невозмущенной» задачи в этом случае имеет вид:

$$y^2 = \varphi_0^2(x, \tau) = a(\tau)x^2 + b(\tau), a(\tau) > 0, b(\tau) < 0. \quad (6.39)$$

В безразмерных координатах:

$$\bar{\varphi}_0^2 = \bar{a}x^2 + \bar{b}, \left( \bar{a} \equiv a(\tau), \bar{b} \equiv \frac{b(\tau)}{l^2} \right), \quad (6.40)$$

где

$$a(\tau) = c_1 e^{2\tau} (1 - c_1 e^{2\tau})^{-1} = \frac{c_1 e^{2\tau}}{1 - c_1 e^{2\tau}}, b(\tau) = c_2 e^{2\tau} (1 - c_1 e^{2\tau})^{-1/2} = \frac{c_2 e^{2\tau}}{\sqrt{1 - c_1 e^{2\tau}}},$$

$$c_1 = \frac{a_0}{1 + a_0}, \quad c_2 = \frac{b_0}{\sqrt{1 + a_0}}.$$

Так как  $a_0 > 0$ , то  $c_1 \in (0; 1)$ .

Решение (6.40) справедливо до момента  $\tau = \tau_1$ , при которых выражение под квадратным корнем положительно:

$$\tau < \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + a_0}{a_0} \right) \equiv \tau_1.$$

Ниже «штрихи» над безразмерными величинами для удобства убираем.

Ищем решение уравнения (6.26) вблизи вершины гиперболы

$x_0 = \sqrt{-\frac{b(\tau)}{a(\tau)}}$ , в которой  $\varphi'_0(x, \tau) > 1 \Rightarrow \varphi_0'^2 \gg 1$ . Тогда:

$$L_2(\varphi_0) \sim -e^{2\tau} \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + b}} \left( \frac{ab}{3} + \frac{a^2 x^2}{2} \right), \quad (6.41)$$

Подставим (6.40), (6.41) в (6.26):



$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = (1+a)\varphi_1 + 2ax\varphi_1' + \frac{1}{2}(ax^2+b)\varphi_1'' - e^{2\tau} \frac{ax}{\sqrt{ax^2+b}} \left( \frac{ab}{3} + \frac{a^2x^2}{2} \right).$$

Умножим на  $\sqrt{ax^2+b}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+b} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} &= (1+a)\sqrt{ax^2+b} \cdot \varphi_1 + 2ax\sqrt{ax^2+b} \cdot \varphi_1' + \\ &+ \frac{1}{2}(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b} \cdot \varphi_1'' - e^{2\tau} ax \left( \frac{ab}{3} + \frac{a^2x^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Ищем решение (6.42) в виде степенного ряда:

$$\varphi_1 = \sqrt{ax^2+b} \cdot \sum_0^{\infty} c_k(\tau) x^k,$$

с неизвестными коэффициентами  $c_k = c_k(\tau)$ . Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях, в результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений специального типа относительно коэффициентов  $c_k(\tau)$ .

Решение выписанной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями:

$$c_0(0) = c_1(0) = c_2(0) = \dots = 0,$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} c_0(\tau) = c_1(\tau) = c_2(\tau) = 0, c_3(\tau) = \frac{1}{9} \frac{a^2}{b} e^{2\tau}, c_{2k}(\tau) = 0, k \geq 2, \\ c_5(\tau) = \frac{1}{10b^2} \left( \frac{\dot{b}}{2} c_3 + b\dot{c}_3 - (1+a)bc_3 - \frac{31}{2} abc_3 + \frac{a^3}{3} e^{2\tau} \right), \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Отметим, что из условия  $b(\tau) < 0$  следует, что  $c_3(\tau) < 0$ .

Итак, найдена поправка к решению «невозмущенной» задачи о растекании пластического слоя в гиперболической области, вызванная упругими деформациями упругих тел инструмента:

$$y = \varphi(x, \tau) = \varphi_0(x, \tau) + \lambda_0 \varphi_1(x, t),$$

$$\varphi(x, \tau) = \sqrt{(ax^2 + b)} + \lambda_0 \left[ \frac{\sqrt{(ax^2 + b)}}{\sqrt{(ax^2 + b)}} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 (\tau) x^3 + \dots) \right].$$

Как видно из последнего решения, учет упругих деформаций тел инструмента замедляет процесс расширения области растекания, ограниченной гиперболой. Аналогичный вывод имеет место и в представленных выше задачах о растекании области, близкой к полуплоскости, и о растекании области, ограниченной параболой.

## ГЛАВА 7

# НЕСВОБОДНОЕ РАСТЕКАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОСТИ. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В данном разделе приводятся и анализируются результаты экспериментов по осадке и растеканию между сближающимися жесткими плитами тонких образцов из модельного материала, имеющих форму прямоугольника в плане. Течение ограничено неподвижными стенками штампа, которые расположены вдоль длинных сторон прямоугольных образцов. Выявлены количественные закономерности наблюдаемого течения, и в частности показано, что профиль (скоростей) перемещений является выпуклым в направлении течения, а не постоянным.

Обсуждаются общая и упрощенная постановки краевой задачи с непроницаемыми и свободными границами. Показано, что результаты проведенных экспериментов принципиально невозможно описать с помощью решения задачи в упрощенной постановке. В рамках общей постановки найдено приближенное аналитическое решение задачи, которое хорошо согласуется с результатами эксперимента вдали от свободной границы и центральной части образца.

Следует отметить, что до недавнего времени практически все исследования проводились в рамках упрощенной модели «идеальной жидкости» [7, 13, 24], что не всегда может быть корректно. Касательные напряжения могут возникать на границе двух разных сред или на неподвижной твердой границе. Именно такие течения рассматривались в [28, 29]. В этих работах показано, что модель идеальной жидкости дает некорректное решение для течения двух контактирующих сред, оно не удовлетворяет всем условиям на границе сред. В [30] изложены результаты экспериментов по пластической осадке образцов прямоугольной в плане формы, зажатых между неподвижными по ширине прямоугольника жесткими стенками, а также образцов в форме сектора между неподвижными радиальными стенками.

Ниже приводятся результаты экспериментов, проведенных с помощью исследовательского комплекса на базе испытательной машины INSTRON с компьютерной регистрацией параметров технологического процесса. Измерение координат искаженной сетки проведено на инструментальном микроскопе УИМ-21, оснащенный комплексом компьютерной обработки измеряемых характеристик.

Также в рамках модели «вязкой жидкости» получено аналитическое решение задачи об осадке и растекании зажатой между неподвижными жесткими стенками полосы. Для прямоугольного в плане образца такое решение является приближенным и наиболее близко, как показывает эксперимент, описывает течение вдали от свободной границы и центральной части образца.

### 7.1. Постановка краевой задачи об осадке тонкого пластического слоя формы прямоугольника в плане

Пусть слой из идеально-пластического материала сжимается между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис. 19а).

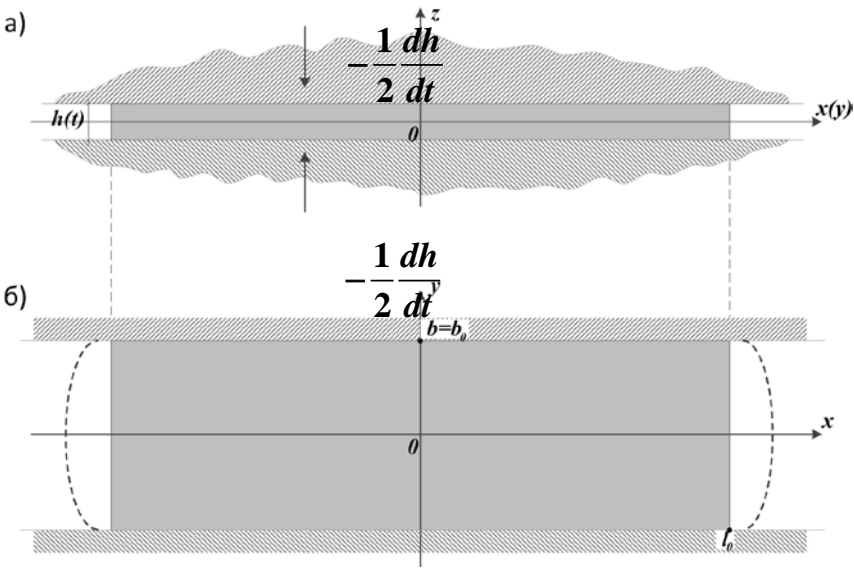


Рис. 19. Растекание пластического образца в поперечном разрезе (а), и в плане (б).

В плане (в плоскости  $Oxy$ ) это будет двумерная область течения с подвижными (пунктирные линии) и непроницаемыми ( $y = \pm b_0$ ) границами (рис. 19б).

Основные уравнения течения в такой двумерной области, согласно [1], имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

где  $p$ ,  $u$ ,  $v$  — контактное давление и компоненты скорости течения;  $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$  — предел текучести пластического материала в рассматриваемой области;  $h = h(t)$  — известный закон изменения толщины слоя. Величина  $\lambda(t) = \ln(h(t_0)/h(t))$  характеризует степень деформации, где  $t_0$  — некоторый начальный момент времени.

На свободной (подвижной), заранее неизвестной, границе  $\Gamma_F: F(t, x, y) = 0$ , задаются три граничных условия: динамическое условие равенства нулю вектора напряжений (по двумерной теории)

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = 0, \quad (7.3)$$

эквивалентное двум скалярным:

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = 0, \quad \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 = 0, \quad (7.4)$$

где  $\vec{n} = (n_1, n_2) = \nabla F / |\nabla F|$  вектор нормали к границе, а компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  имеют вид:

$$\sigma_{11} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{22} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y},$$

а также кинематическое условие «материальности» границы:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial F / \partial t}{|\nabla F|},$$

или

$$\partial F / \partial t + \vec{v} \cdot \nabla F = 0, \quad (7.5)$$

из которого можно определить движение самой свободной границы.

На неподвижной (непроницаемой) границе  $\Gamma_R: G(x, y) = 0$  достаточно задать два условия: динамическое условие равенства предельному значению величины тангенциальной составляющей вектора напряжений:

$$\left| \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau} \right| = \left| \sigma_{11} n_1 n_2 + \sigma_{12} (n_2^2 - n_1^2) - \sigma_{22} n_1 n_2 \right| = \tau_s, \quad (7.6)$$

где  $\vec{\tau} = (n_2, -n_1)$  касательный к границе вектор, и кинематическое условие непроницаемости стенки:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = 0,$$

или

$$\vec{v} \cdot \nabla G = 0. \quad (7.7)$$

Условий (7.4)–(7.7) достаточно для решения краевой задачи с подвижными и неподвижными границами в области течения, описываемого системой уравнений (7.1)–(7.3).

Чтобы перейти к безразмерному описанию задачи, определим характерные величины длины  $l_0$ , скорости  $v_0 = -(dh(t=t_0)/dt)/\varepsilon$  и контактного давления  $p_0 = \sigma_s/\varepsilon$ , где  $\varepsilon = h_0/l_0 \ll 1$  — малый параметр, характеризующий относительную толщину пластического слоя (толщина слоя обезразмеривается на  $h_0$ , время на  $l_0/v_0$ ). Тогда, в безразмерных величинах уравнения (7.1)–(7.3) будут иметь вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta u - \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta v - \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda'. \quad (7.10)$$

где  $\lambda' = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$ . Отметим наличие малого параметра  $\varepsilon$  в членах со старшими производными.

Рассмотрим граничные условия для прямоугольной в начальной момент области течения. Используя симметрию области, рассмотрение можно провести только для первого квадранта плоскости. Тогда на неподвижной стенке  $y = b_0$  ( $G(x, y) \equiv y - b_0$ ) должны быть выполнены условия непроницаемости:

$$v = 0, \quad (7.11)$$

и постоянства касательного напряжения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\sqrt{3}\lambda'. \quad (7.12)$$

Поскольку  $u$  должно быть четно, а  $v$  нечетно относительно оси симметрии  $y = 0$ , на ней должны выполняться два условия:

$$v = 0, \quad (7.13)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (7.14)$$

На другой оси симметрии  $x = 0$ , в силу четности  $v$  и нечетности  $u$ , должно быть:

$$u = 0, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (7.16)$$

Постановка задачи завершается условиями на неизвестной свободной границе  $F(t, x, y) = 0$ , из которых кинематическое условие имеет вид:

$$\partial F / \partial t + u \partial F / \partial x + v \partial F / \partial y = 0, \quad (7.17)$$

а условия равенства нулю компонент вектора напряжений, в данном случае нормальной и касательной к границе:

$$\sigma_{11}n_1^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + \sigma_{22}n_2^2 = 0,$$

$$\sigma_{11}n_1n_2 + \sigma_{12}(n_2^2 - n_1^2) - \sigma_{22}n_1n_2 = 0,$$

где

$$\sigma_{11} = -p + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3\lambda'} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\sigma_{12} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{22} = -p + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3\lambda'} \frac{\partial v}{\partial y},$$

приводят к одному условию для давления:

$$\begin{aligned} & \left( p - \frac{2\varepsilon}{3} \right) \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{2\varepsilon}{3\lambda'} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (7.18)$$

а также к еще одному условию совместности, не связанному с давлением:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (7.19)$$

Уравнения (7.8)–(7.10) с условиями (7.11)–(7.19) составляют краевую задачу растекания прямоугольной в начальный момент области в полосе с неподвижными границами.

Заметим, что касательное напряжение  $\sigma_{12}$  на осях симметрии и свободной границе равно нулю, тогда как на неподвижной стенке оно имеет постоянное ненулевое значение, соответственно в точке пересечения оси  $x=0$  с неподвижной стенкой, а также в точке пересечения свободной границы с неподвижной стенкой касательное напряжение терпит разрыв. Понятно, что вблизи этих точек решение задачи ведет себя достаточно сложно и не может быть одномерным.

## 7.2. Постановка и решение задачи в рамках модели «идеальной жидкости»



В упрощенной модели «идеальной жидкости» ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения (7.8)–(7.10) имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda'. \quad (7.22)$$

Эта система уравнений имеет более низкий порядок и, вследствие этого, требует меньшего количества граничных условий. Решение задачи, удовлетворяющее на неподвижной стенке  $y = b_0$  и оси симметрии  $y = 0$  условию:

$$v = 0, \quad (7.23)$$

а на оси  $x = 0$  условию:

$$u = 0, \quad (7.24)$$

легко может быть найдено:

$$\begin{aligned} u &= \lambda' x, \\ v &= 0, \\ p &= p_0 - 2x / (\sqrt{3}h), \end{aligned} \quad (7.25)$$

где  $p_0$  — константа интегрирования, которая может быть найдена из динамического условия (7.18) на свободной границе, с учетом обезразмеривания и пренебрежения малым параметром,

$$p = 0, \quad (7.26)$$

тогда как кинематическое условие (7.17) служит для определения самой границы  $x = x_f(t)$

$$\lambda' x_f(t) = x_f'(t), \quad (7.27)$$

Из последнего соотношения интегрированием (и с учетом обезразмеривания) находим:

$$x_f h = \text{const} = 1, \quad (7.28)$$

а следовательно, из предыдущего условия (7.26):

$$p_0 = 2/(\sqrt{3}h^2), \quad (7.29)$$

и окончательно для давления получаем:

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}h^2}(1 - xh).$$

Мы получили точное аналитическое решение (7.25), (7.28), (7.29) задачи о растекании прямоугольника в полосе с неподвижными границами в рамках модели «идеальной жидкости». Можно проверить, что это решение удовлетворяет условию совместности (7.19) для  $F(t, x, y) = x - x_f(t)$  тождественно.

Течение оказалось одномерным, зависящим только от координаты  $x$ , и, очевидно, противоречащим результатам экспериментов, из которых видно, что реальное течение слоя зависит также от координаты  $y$ .

### 7.3. Решение задачи в рамках модели «вязкой жидкости»

Пользуясь протяженностью области течения в направлении  $x$ , попробуем найти простое аналитическое решение задачи вдали от оси  $x = 0$ . И для этого положим, что в рассматриваемой области течения:

$$v(x, y) \equiv 0. \quad (7.30)$$

Тогда из уравнения неразрывности (7.10) интегрированием получаем:

$$u(x, y) = \lambda [x + g(y)], \quad (7.31)$$

где функцию  $g(y)$  необходимо определить из других уравнений. Уравнение (7.9) дает  $p = p(x)$ , и тогда из (7.8) следует:

$$p'(x) = \frac{\varepsilon}{3} g''(y) - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h}.$$

где в левой части функция аргумента  $x$ , а в правой функция  $y$  (и параметра  $h(t)$ ). Следовательно, переменные разделяются и мы имеем систему с произвольной константой (функцией времени)  $k$ ,

$$\begin{cases} g''(y) = k = \text{const}, \\ p'(x) = \frac{\varepsilon k}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}h}. \end{cases} \quad (7.32)$$

Интегрирование первого из уравнений (7.32) дает с учетом граничных условий (7.12), (7.14):

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}}{2b_0} y^2, \quad k = -\frac{\sqrt{3}}{b_0}, \quad (7.33)$$

где  $c$  неопределенная пока константа интегрирования. Тогда (7.31) дает:

$$u(x, y) = \lambda \left[ x - \frac{\sqrt{3}}{2b_0} y^2 + c \right]. \quad (7.34)$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (7.34) соответствует скорости течения в модели «идеальной жидкости», в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе также, как на других границах, равно нулю.

Полагая, что для некоторого произвольного, но достаточно отдаленного от центра сечения  $x = x_0$ , расход течения «вязкой жидкости» совпадает с расходом течения «идеальной жидкости», получаем условие:

$$\int_0^{b_0} \left[ c - \sqrt{3}y^2 / (2b_0) \right] dy = 0,$$

из которого определяем константу  $c = \frac{\sqrt{3}}{6} b_0$  и окончательную формулу для скорости:

$$u(x, y) = \lambda \left[ x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (7.35)$$

Интегрирование второго уравнения системы (7.32) с учетом уже известной из (7.33) константы  $k$  дает:

$$p(x) = p_0 - \frac{x}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\varepsilon}{b_0} \right), \quad (7.36)$$

с константой интегрирования  $p_0$ . Видно, что давление (также, как при  $\varepsilon = 0$ ) не зависит от  $y$ , но зависит от  $\varepsilon$ , тем самым, отличаясь от давления в модели «идеальной жидкости» чуть большим градиентом по  $x$ .

Полагая, что некоторое сечение  $x = x_f(t)$  есть условная свободная граница ( $x_f h = 1$ ), где нормальное напряжение равно нулю:

$$(\sigma_{11}) = -p + 4\varepsilon/3 = 0,$$

находим  $P_0$ :

$$p_0(t) = \frac{2x_f}{\sqrt{3}h} + \left( \frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \varepsilon.$$

При достаточно большом  $x_f$  последним (третьим) слагаемым в правой части можно пренебречь, тогда:

$$p_0(t) = \frac{x_f}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\varepsilon}{b_0} \right),$$

и давление в (7.36) имеет более простой вид:

$$p \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\varepsilon}{b_0} \right) (x_f - x). \quad (7.37)$$

Приближенное аналитическое решение (7.30), (7.35), (7.37), полученное в рамках модели «вязкой жидкости», мы будем сравнивать с экспериментальными данными ниже.

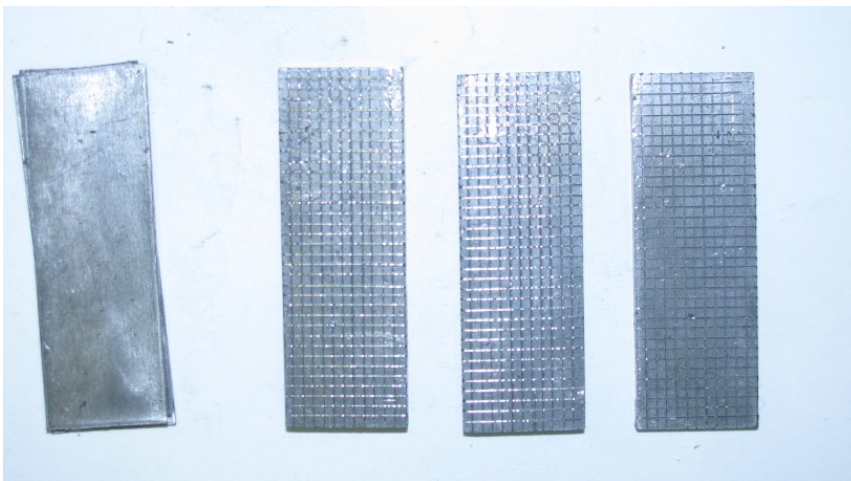
#### **7.4. Экспериментальное исследование процесса пластической осадки тонких образцов прямоугольной в плане формы в штампе с неподвижными стенками**

С целью выяснения процесса растекания пластического слоя вблизи неподвижных границ, были проведены серии экспериментов по пластической осадке образцов прямоугольной в плане формы между неподвижными по ширине прямоугольниками стенками. Для чего была сконструирована и изготовлена специальная штамповая оснастка (рис. 20), подготовлены исходные образцы, показанные на рис. 21. В качестве модельного материала для них использовался свинец.

Каждый из четырех образцов составлен из двух тонких полос толщиной  $h_{01} = h_{02} = 2$  мм (общая толщина  $h_0 = 4$  мм), длиной  $2l_0 = 70$  мм и шириной  $2b_0 = 25$  мм. На поверхность одной из них

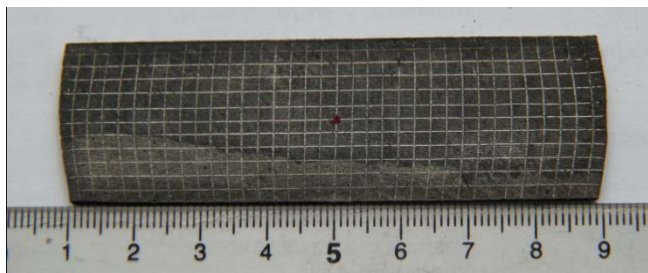


*Рис. 20.* Штамповая оснастка для проведения экспериментов по пластической осадке тонких прямоугольных образцов

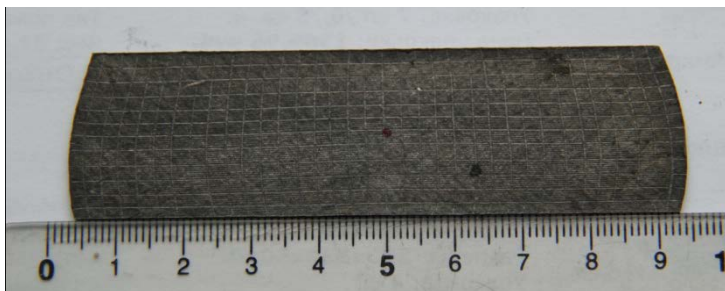


*Рис. 21.* Исходные образцы свинцовых полос с нанесенной координатной сеткой ( $2l_0 = 70$  мм;  $2b_0 = 25$  мм;  $h_0 = 4$  мм)

наносилась координатная сетка с шагом  $\Delta l = 2 \text{ мм}$  с помощью инструментального микроскопа УИМ-21. Полоса деформировалась в штампе так, что в процессе осаждения размер  $b_0$  оставался неизменным. В результате эксперимента в каждом отмеченном рисками сечении  $x_0 = \text{const}$  отслеживали поле перемещений. Было зафиксировано три последовательных деформированных состояния при конечной толщине образцов:  $h_1 = 3.5 \text{ мм}$ ,  $h_2 = 3.2 \text{ мм}$ ,  $h_3 = 2.9 \text{ мм}$ . В каждом из полученных состояний фотографировали образец с текущей искаженной координатной сеткой (рис. 22). Видно, что (горизонтальные) линии тока остаются прямыми, параллельными неподвижным границам прямоугольной пластины. Однако вертикальные сечения (риски) заметно искривляются, принимая форму (параболических) дуг.

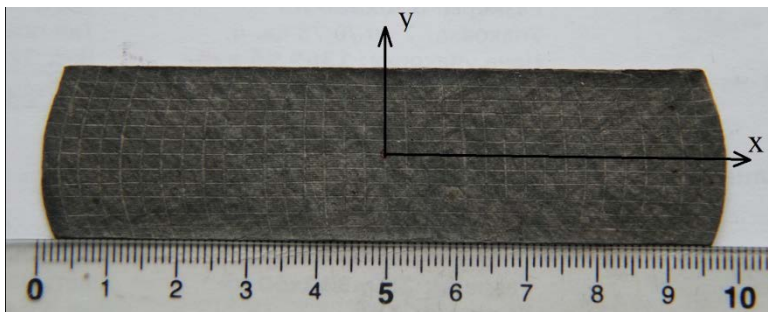


а)  $h_1 = 3.5 \text{ мм}$



б)  $h_2 = 3.2 \text{ мм}$

Рис. 22. Образцы в трех последовательных деформированных состояниях



в)  $h_3 = 2.9 \text{ мм}$

Рис. 22. Образцы в трех последовательных деформированных состояниях

Теоретическое описание выявленных особенностей течения материала проводилось в рамках модели «вязкой жидкости».

### 7.5. Сравнение экспериментальных измерений с теоретическими результатами

Напомним, в каждом из полученных состояний фотографировали образец с текущей искаженной координатной сеткой и проводили измерения координат узловых точек вблизи неподвижной границы  $x_{\min}$  (точнее, для линии тока  $y = 10$ ) с минимальным перемещением начального сечения  $x_0$ , и на средней линии тока ( $y = 0$ )  $x_{\max}$  с максимальным перемещением сечения  $x_0$ . По измеренным координатам узловых точек находили перемещение данной узловой точки  $U = x - x_0$ . Для сравнения в таблицы добавлены также теоретические значения перемещений и координат заданных узловых точек, которые получены интегрированием первой из формул (7.25) для модели «идеальной жидкости»  $U, x^{ideal}$  и формулы (7.35) для «вязкой жидкости»  $U, x^{visc}$ , с переходом к размерным величинам (рис. 23).

В первом образце (рис. 24 и табл. 1) мы видим удовлетворительное соответствие результатов эксперимента с данными модели «вязкой жидкости» для всех трех начальных сечений. То, что для сечений 20 и 30 мм экспериментальные минимальные значения превышают значения для «идеальной жидкости», видимо, говорит о погрешности измерения толщины слоя (она чуть меньше заявленной).

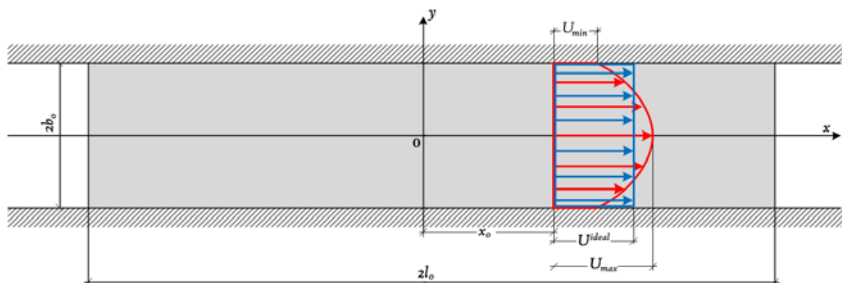


Рис. 23. Профили перемещений в задаче растекания прямоугольника в полосе с неподвижными границами для моделей «вязкой» (красный цвет) и «идеальной» (синий цвет) жидкости

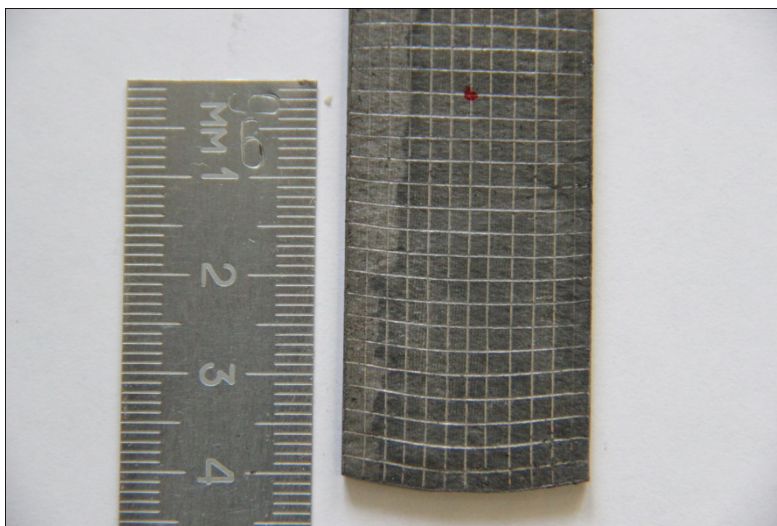


Рис. 24. Координатная сетка для образца с  $h_1 = 3.5$  мм

Во втором образце (рис. 25) заметна несимметричность растекания относительно оси  $x$ , поэтому минимальное перемещение в табл. 2 взято средним между двумя границами, а максимальное выбрано по факту, а не на оси  $y = 0$ .



Таблица 1. Координаты и перемещения точек с минимальным и максимальным перемещением для толщины образца  $h_1 = 3.5$  мм и начальных сечений  $x_0 = 12, 20, 30$  мм.

$x_0$	$x_{\min}$	$U_{\min}$	$x_{\max}$	$U_{\max}$	$x_{\min}^{\text{visc}}$	$U_{\min}^{\text{visc}}$	$x_{\max}^{\text{visc}}$	$U_{\max}^{\text{visc}}$	$x^{\text{ideal}}$	$U^{\text{ideal}}$
12	13.50	1.50	14.50	2.50	13.24	1.24	14.23	2.23	13.71	1.71
20	23.00	3.00	24.00	4.00	22.38	2.38	23.37	3.37	22.86	2.86
30	34.50	4.50	36.00	6.00	33.81	3.81	34.80	4.80	34.29	4.29

Таблица 2. Координаты и перемещения точек с минимальным и максимальным перемещением для толщины образца  $h_1 = 3.2$  мм и тех же начальных сечений.

$x_0$	$x_{\min}$	$U_{\min}$	$x_{\max}$	$U_{\max}$	$x_{\min}^{\text{visc}}$	$U_{\min}^{\text{visc}}$	$x_{\max}^{\text{visc}}$	$U_{\max}^{\text{visc}}$	$x^{\text{ideal}}$	$U^{\text{ideal}}$
12	14.50	2.50	15.5	3.50	14.17	2.17	15.90	3.90	15.00	3.00
20	25.00	5.00	26.5	6.50	24.17	4.17	25.90	5.90	25.00	5.00
30	37.50	7.50	39.5	9.50	36.67	6.67	38.40	8.40	37.50	7.50

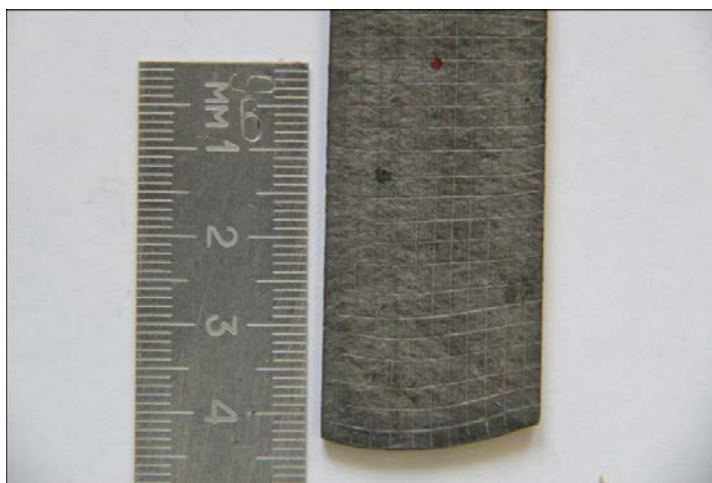
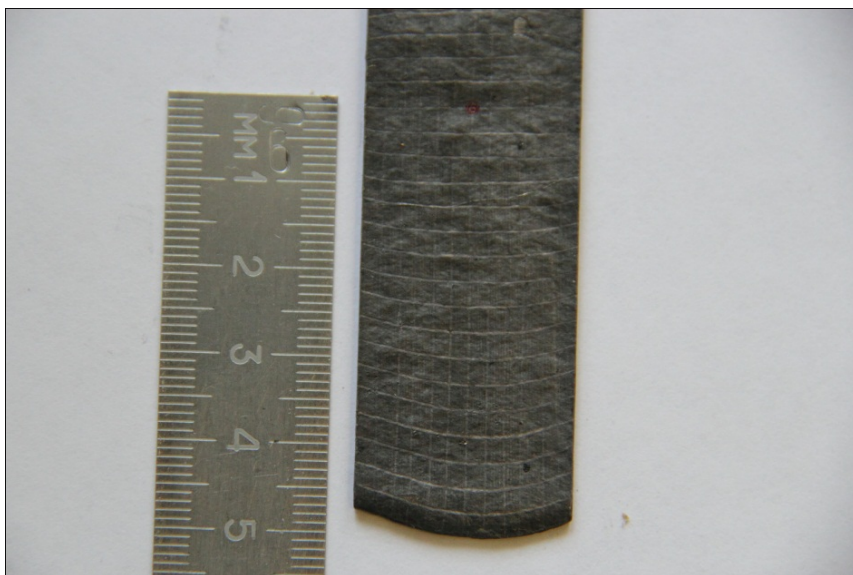


Рис. 25. Координатная сетка для образца с  $h_2 = 3.2$  мм

В третьем образце (*рис. 26* и *табл. 3*) результаты экспериментов и теории (по модели «вязкой жидкости»), с учетом некоторой несимметричности растекания образца, наиболее близки.

Анализ экспериментальных результатов подтверждает заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы от перемещения частиц в средней части полосы, как-то, вертикальные в начальном состоянии сечения  $x_0 = const$  искривляются в виде параболических дуг в процессе осадки полосы. Теоретические результаты по минимальным и максимальным перемещениям, полученные из аналитического решения задачи в рамках модели «вязкой жидкости», достаточно близки к экспериментальным измерениям.



*Рис. 26.* Координатная сетка для образца с  $h_3 = 2.9$  мм

Таким образом, результаты экспериментов по пластической осадке тонкого прямоугольного в плане образца в штампе с неподвижными боковыми стенками показали, что они находятся в противоречии с точным решением краевой задачи, поставленной в рамках упрощенной модели «идеальной жидкости». Корректное описание течения удастся получить только в рамках общей модели, модели «вязкой жидкости». Для течения в средней части области, вдали от центра и свободной границы, было най-

Таблица 3. Координаты и перемещения точек с минимальным и максимальным перемещением для толщины образца  $h_1 = 2.9$  мм и тех же начальных сечений

$x_0$	$x_{\min}$	$U_{\min}$	$x_{\max}$	$U_{\max}$	$x_{\min}^{\text{visc}}$	$U_{\min}^{\text{visc}}$	$x_{\max}^{\text{visc}}$	$U_{\max}^{\text{visc}}$	$x^{\text{ideal}}$	$U^{\text{ideal}}$
12	15.50	3.50	17.00	5.00	15.29	3.29	17.92	5.92	16.55	4.55
20	27.00	7.00	29.00	9.00	26.33	6.33	28.95	8.95	27.59	7.59
30	41.00	11.00	43.50	13.5	40.12	10.12	42.75	12.75	41.38	11.38

айдено аналитическое решение задачи. Это решение достаточно хорошо описывает течение пластического слоя, а расчетные перемещения близки не только качественно, но и количественно к данным экспериментов.

### 7.6. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме сектора

В [28-30] рассматриваются такие течения пластического слоя, которые невозможно описать в рамках модели «идеальной жидкости», и в частности, растекание слоя, составленного из разных сред. Для их корректного описания надо использовать более общую модель «вязкой жидкости».

С целью выяснения влияния касательных напряжений (осредненных по толщине слоя) на кинематику течения, и в особенности, вблизи неподвижных границ, были проведены следующие эксперименты:



Рис. 27. Оснастка, предназначенная для проведения эксперимента по пластической осадке тонкой полосы формы сектора в плане

1) пластическая осадка слоя прямоугольной формы в плане между неподвижными (по ширине прямоугольника) границами;

2) пластическая осадка слоя формы сектора в плане между неподвижными радиальными границами.

Ниже остановимся на втором эксперименте. Для проведения второй серии экспериментов, по аналогии с первой, были изготовлены штамповая оснастка (рис. 27) и пара свинцовых пластин формы сектора в плане ( $R_0 = 45 \text{ мм}; h_0 = 4 \text{ мм}; \varphi_0 = 45^\circ$ ), (рис. 28).

Пластина, расположенная в канале оснастки, осаживалась так, что центральный угол оставался неизменным. Координатная сетка в виде концентрических дуг окружностей наносилась на одну из внутренних поверхностей. Проводились измерения минимального значения перемещения  $u_b(R) = u(R; \varphi = 22.5^\circ)$  вблизи неподвижной границы ( $\varphi = 22.5^\circ$ ) и максимального значения  $u_m(R) = u(R, \varphi = 0)$  в средней по ширине точке ( $y = 0$ ), (рис. 28).

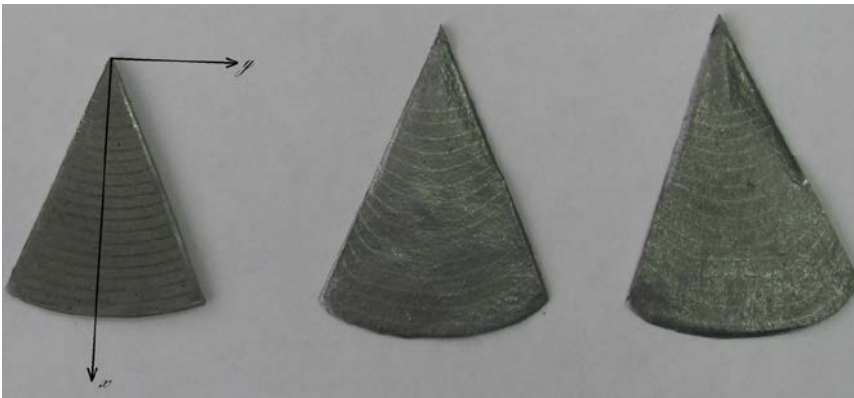


Рис. 28. Образец в начальном и деформированном состоянии  
( $R_0 = 45 \text{ мм}; h_0 = 4 \text{ мм}; \varphi_0 = 45^\circ; \Delta h/h_0 = 0.42$ )

Определяли абсолютную  $\Delta u(R) = u_m - u_b$  и относительную  $\Delta u/u_m$  величины отклонения перемещения в сечении  $R = \text{const}$  (табл. 4).

Таблица 4. Координаты и перемещения в эксперименте по осадке пластического слоя формы сектора в плане ( $h_1 = 2.32$  мм;  $\Delta h_1 = h_0 - h_1 = 1.68$  мм;  $F = 164$  кН).

$R$	$u_m(R)$	$u_b(R)$	$\Delta u(R) = u_m - u_b$	$\Delta u/u_m$
16.42	0	0.08	-	-
18.53	0.27	0	0.27	-
20.59	0.91	0.15	0.76	0.83
22.35	1.53	0.25	1.28	0.83
24.52	2.58	0.51	2.07	0.80
26.63	3.30	0.65	2.65	0.80
28.50	3.80	1.18	2.70	0.70
30.65	4.71	2.41	2.30	0.49
32.28	5.76	1.93	3.83	0.66
34.53	5.50	2.19	3.31	0.60
36.29	6.50	2.76	3.74	0.57
38.41	6.82	2.73	4.09	0.60
40.41	7.71	4.18	3.53	0.45
42.36	8.41	5.08	3.33	0.39

Анализ результатов эксперимента во второй серии опытов также подтверждает заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы: окружные в начальном состоянии риски ( $R = const$ ) перестают быть дугами окружностей в процессе осадки. Полученные экспериментальные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости». Действительно, представленная задача в модели «идеальной жидкости» описывается следующими уравнениями в полярной системе координат:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\frac{\partial p}{r \partial \varphi} = -\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

с краевыми условиями:

$$\varphi = 0 : v = 0; \varphi = b_0 : v = 0;$$

а на свободной границе:

$$p = \sigma_s$$

Ее решение имеет вид:

$$v = 0; u = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \frac{r}{2};$$

$$p = -\frac{2\tau_s}{h} \left( r - R_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}} \right) + \sigma_s.$$

Согласно этому решению, первоначально окружные риски остаются окружностями в процессе течения, что не согласуется с экспериментальными данными.

Представленные результаты экспериментов (искривление сетки вблизи неподвижной границы) подтверждают, что корректное описание рассматриваемых течений возможно только в рамках более общей модели «вязкой жидкости».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии центральное место занимает теория течения в тонком пластическом слое, разработанная А.А. Ильюшиным в качестве руководства при проведении расчетов технологических процессов пластической обработки материалов давлением, таких как штамповка и прессование тонкостенных деталей и элементов конструкций, тонколистовая прокатка. В ней раскрывается современное состояние развития проблемы математического моделирования контактных задач пластического течения в тонком слое. Приведены распространенные в практических приложениях постановки краевых задач. Выписаны аналитические решения большого числа задач, проведен их качественный анализ. В книге изложены результаты экспериментальных исследований конкретных практических задач, проводится их сравнение с аналитическими решениями. Даны рекомендации при выборе исходной математической модели исследуемой задачи.

Безусловно, в указанной области исследований остается множество открытых проблем. К их числу можно отнести проблему математической постановки краевых задач контактного взаимодействия упругих и пластических тел в процессах с развитыми формоизменениями, проблема активного использования промежуточных «смазочных» сред на контактных поверхностях, снижающих накопленные повреждения и увеличивающих ресурс пластичности, проблема проектирования экономичных, энергосберегающих технологических процессов.

И конечно, как перечисленные, так и множество других нерешенных проблем требуют предварительного изучения и анализа имеющихся подходов и методов, применяемых в расчетах прикладных задач.

## Список литературы

1. Ильющин А.А. Труды (1946-1966), т.2 Пластичность // Физматлит, 2004, 480с.
2. Prandtl L.// ZAMM. 1923. 3(6). P.401-406.
3. Унксов Е.П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. М.: Машгиз. 1955.280с.
4. Безухов В.Н. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане. Канд. дисс., М., МГУ, 1955, 78с.
5. Арутюнов Ю.С, Гонор А.Л. Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане // Изв.АН СССР. 1963. №1. с.166-171.
6. Кийко И.А. Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического вещества // Докл. АН СССР. 1964. т. 157. № 3. с. 551–553.
7. Кийко И.А. Теория пластического течения / М.: МГУ. 1978. 75 с.
8. Кийко И.А. Обобщение задачи Л.Прандтля о сжатии полосы на случай сжимаемого материала // Вестн.Моск.Ун-та. 2002. №4. с.47-52.
9. Кийко И.А., Кадымов В.А. Обобщения задачи Л.Прандтля о сжатии полосы // Вестн.Моск.Ун-та. Сер.1. 2003. №4. с.50-56.
10. Ивлев Д.Д. и др. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород// М.: Физматлит. 2008. 832с.
11. Григорян С.С. Об одной задаче Л.Прандтля и теории течения пластического вещества по поверхностям// ДАН СССР. 1981. Т.257. №5. с. 1075-1077.
12. Мохель А.Н., Салганик Р.Л. Тонкий пластический слой с произвольным контуром, сжимаемый между жесткими плитами // ДАН СССР. 1987. т.293. №4. с.809-813.
13. Кийко И.А. Пластическое течение металлов// В сб. «Научные основы прогрессивной техники и технологии». М.,1985. С.102-133.
14. Белов Н.А., Кадымов В.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Известия РАН МТТ. 2011. №1. С.46-58.
15. Кузнецов А.И.//Archiwum Mech.Stos.,2, 12(1960).p.163-171.
16. Kadymov V. Mathematical modeling of contact problems of plastic flow // Nonlinear Anal.Theory &Appl. Gr.Br.,v.S0,№8,1997.
17. Kadymov V., Wille R.//ZAMM,v.75(1995),№S1.p.293-284.
18. Георгиевский Д.В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Изв.РАН. МТТ.2006.№1. С.47-59.
19. Победря Б.Е., Гузей И.Л. Математическое моделирование деформирования композитов с учётом термодиффузии // Математическое моделирование систем и процессов. 1998. № 6. С. 82-91.



20. Георгиевский Д.В. Возмущения поверхностей скольжения в пространственной теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 3. С. 45-50.
21. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения. М., Физматлит, 2002, 432с.
22. Кадымов В.А. Автомодельные уравнения в задаче растекания пластического слоя на плоскости и их решения. Вестник ТулГУ, 2009, т.15, вып.2, с.38-44.
23. Кадымов В.А., Белов Н.А. О точных решениях уравнения растекания пластического слоя на плоскости // Тр.межд.научно-техн.конф. «Совр.метал.матер.и технол.(СММТ'2011)»,СПбГПУ. 2011. с.33-36.
24. Кийко И.А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями // ПММ. 2011. т. 75. вып.1. с.15-26.
25. Кадымов В.А., Быстриков С.К. Некоторые новые решения нестационарных задач растекания пластического слоя по деформируемым поверхностям // Изв. Тул.ГУ, сер.Матем., Мех., Инф. 2006, т.11, в.2 –с.54-60.
26. Кадымов В.А., Михайлова И.А. Полуобратные задачи течения тонкого пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям // Тр. расшир. научного семинара «Проблемы фундаментальной механики в теории обработки давлением», М.,МГТУ «МАМИ»,2008.-с.151-161.
27. Кийко И.А.Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // ПММ, 2006. т.70. вып.2. с.344-351.
28. Кадымов В.А., Белов Н.А. О растекании между сближающимися жесткими плитами пластического слоя, состоящего из разных сред // Матер.межд.научн.конф. «Совр.пробл. матем.,мех. и инф-ки». Тула:ТулГУ. 2012. с.150-157
29. Кадымов В.А. Задача о растекании пластического слоя, состоящего из разных сред //Известия МАМИ. №2(27). 2012. V.2. P.323-330.
30. Кадымов В.А., Сосенушкин Е.Н., Белов Н.А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора.// Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206-212.

### Сведения об авторе...

Кадымов Вагид Ахмедович — доктор физико-математических наук; профессор факультета прикладной математики и информатики Московского государственного государственного экономического университета; профессор кафедры прикладной математики и механики Московского государственного университета приборостроения и информатики; член Немецкого общества математиков и механиков (GAMM); член Европейского научного общества (EUROMECH); автор более 150 научных работ и научно-технических отчетов; 20 учебно-методических пособий. Имеет 2 монографии, 2 авторских свидетельства.

### ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

1. Mathematical modeling of contact problems of plastic flow. Журн. "Nonlinear Analysis, Theory and Appl.", т.30, №8, 1997.
2. Некоторые новые решения нестационарных задач растекания пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям (в соавторстве). Журн. Изв. Тул.ГУ, 2006.
3. Обобщения постановок краевых задач теории течения тонких пластических слоев и новые решения (в соавторстве). В сб. «Упр. и неупругость», матер. межд. н. симп. по пробл. мех. деф. тв. тел, посв. 95-летию А.А.Ильюшина. М.: МГУ, 2006.
4. Анализ краевой задачи течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами (в соавторстве). Журн. Изв. РАН, МТТ, №1, 2011.
5. Задача о растекании пластического слоя, состоящего из разных сред. Журн. Изв. МАМИ, №2(27), т.2, 2012.

## Содержание

Введение. Краткий обзор современного состояния проблемы .....	3
ГЛАВА 1. Теория течения в тонком пластическом слое .....	6
1.1. Задача Прандтля: решение и следствия .....	6
1.2. Обобщение задачи Прандтля .....	11
1.3. Постановка краевой задачи об осадке и растекании тонкого пластического слоя на плоскости .....	15
1.4. Постановка задачи в рамках модели «идеальной жидкости» .....	18
1.5. Течение пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям .....	18
ГЛАВА 2. Точные решения задач течения в тонком пластическом слое .....	20
2.1. Прямая задача: требуется восстановить линию условного контура $\Gamma_0$ по известному действительному контуру $\Gamma$ , на которой задано контактное давление $p = p(s)$ , где $S$ — параметр, изменяющийся вдоль действительного контура .....	20
2.2. Обратная задача: по известной линии условного контура $\Gamma_0$ , на которой контактное давление принимает постоянное значение $p_0$ , требуется найти распределение контактного давления $p(s)$ вдоль заданного действительного контура .....	22
2.3. Обратная задача: требуется выбрать контактное давление $p(s)$ вдоль контура $\Gamma \equiv \partial S : F(X; Y) \equiv Y - f(X) = 0$ области $S(x, y)$ , занятой пластическим слоем постоянной толщины $h = h(t)$ , так, чтобы наибольшего значения $p^*$ контактное давление достигало в заданной точке $M(x; y) \in S$ .....	23
2.4. Осесимметричная задача о пластической осадке и растекании тонкого кольцевого слоя .....	25