ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНКЛЮЗИВНОГО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 041CD9B1001CAF77894D606F5F479EB1E9
Владелец: Сахарчук Елена Сергеевна
Действителен: с 26.09.2022 до 26.09.2023

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методической работе

_____________ Е.С. Сахарчук

«17» 04 2022 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Дифференциальные уравнения

наименование дисциплины

01.03.02 «Прикладная математика и информатика

шифр и наименование направления подготовки

вычислительная математика и информационные технологии

направленность (профиль)

Москва 2022

Разработчик:

МГГЭУ, доцент кафедры прикладной математики
место работы, занимаемая должность

____________ Нуцубидзе Д.В. ______14.03______________ 2022 г
подпись Ф.И.О. Дата

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики

(протокол № 4 от «21» 03 2022 г.)

на заседании Учебно-методического совета МГГЭУ

(протокол № 1 от «27» 08 2022 г.)

Согласовано:

Представитель работодателя
или объединения работодателей ______________________ / Васильев Е.В. /
научный сотрудник, ФГБУ ГНЦ Федеральный медицинский биофизический центр имени А.И. Бурназяна ФМБА России

(должность, место работы)
«29» 03 2022 г.

Начальник учебно-методического управления
________________И.Г. Дмитриева
«27» 08 2022 г.

Начальник методического отдела
________________Д.Е. Гапеенок
«27» 08 2022 г.

Декан факультета
________________ Е.В. Петрунина
«27» 08 2022 г.

Содержание

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине **«Дифференциальные уравнения».**

Оценочные средства составляются в соответствии с рабочей программой дисциплины и представляют собой совокупность контрольно-измерительных материалов (типовые задачи (задания), контрольные работы, тесты и др.), предназначенных для измерения уровня достижения обучающимися установленных результатов обучения.

Оценочные средства используются при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Таблица 1 - Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения дисциплины

Код и содержание компетенции	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.
	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.
	ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1. Знает основы теории систем и системного анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимизации и исследования операций, нечетких вычислений, математического и имитационного моделирования.
	ОПК-3.2. Умеет применять методы теории систем и системного анализа, математического, статистического и имитационного моделирования для автоматизации задач принятия решений в области профессиональной деятельности.
	ОПК-3.3. Владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий.
ПК-2. Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Знает основные теоремы и формулы математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, теоретических основ информатики, численных методов, функционального анализа.
	ПК-2.2. Умеет применять основные теоремы и формулы математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, теоретических основ информатики, численных методов.
	ПК-2.3. Владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.

Конечными результатами освоения дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках контактной работы, включающей различные виды занятий и самостоятельной работы, с применением различных форм и методов обучения(табл. 2).

Таблица 2 - Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины:

Код компетенции	Уровень освоения компетенций	Индикаторы достижения компетенций	Вид учебных занятий[1], работы, формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенций[2]	Контролируемые разделы и темы дисциплины[3]	Оценочные средства, используемые для оценки уровня сформированности компетенции[4]
ОПК – 1 *ОПК – 3* *ПК – 2*		Знает			
	Недостаточный уровень	ОПК-1.1. Студент не способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук. Не знает основ математики, дифференциальных уравнений. ОПК-3.1. Студент не знает основных теории дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики. ПК-2.1. Студент не способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат. Не знает основных теорем и формул геометрии, дискретной математики, дифференциальных	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.

[1] Лекционные занятия, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа…
[2] Необходимо указать активные и интерактивные методы обучения (например, интерактивная лекция, работа в малых группах, методы мозгового штурма и т.д.), способствующие развитию у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств.
[3] Наименование темы (раздела) берется из рабочей программы дисциплины.
[4] Оценочное средство должно выбираться с учетом запланированных результатов освоения дисциплины, например:
«Знать» – собеседование, коллоквиум, тест…
«Уметь», «Владеть» – индивидуальный или групповой проект, кейс-задача, деловая (ролевая) игра, портфолио.

		уравнений.			
	Базовый уровень	ОПК-1.1. Студент усвоил основные содержания материала, но имеет несистематизированные знания об основах математик и дифференциальных уравнениях. ОПК-3.1. Студент усвоил основные содержания материала, но имеет несистематизированные знания об основных теориях дискретной математики, теориях вероятностей и математической статистики. ПК-2.1. Студент усвоил основные содержания материала, но имеет несистематизированные знания об основных теоремах и формулах геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнениях.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.
	Средний уровень	Студент способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале. ОПК-1.1. Студент знает основы математики, дифференциальных уравнений. ОПК-3.1. Студент знает основные теории дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики. ПК-2.1. Студент знает основные	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.

		теоремы и формулы геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений.		производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	
	Высокий уровень	ОПК-1.1. Студент знает, понимает, выделяет главные положения в изученном материале и способен дать краткую характеристику основным идеям проработанного материала дисциплины. ОПК-1.1. Студент знает основы математики, дифференциальных уравнений. ОПК-3.1. Студент знает основные теории дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики. ПК-2.1. Студент знает основные теоремы и формулы геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.
		Умеет			
	Базовый уровень	ОПК-1.2. Студент испытывает затруднения при решении стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний. ОПК-3.2. Студент испытывает затруднения при применении математического аппарата. ПК-2.2. Студент испытывает затруднения при применении основных теорем и формул	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.

		геометрии, дискретной математики и дифференциальных уравнения.		Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	
	Средний уровень	ОПК-1.2. Студент умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных знаний. ОПК-3.2. Студент умеет применять математический аппарат. ПК-2.2. Студент умеет применять основные теоремы и формулы геометрии, дискретной математики и дифференциальных уравнений. Но допускает незначительные ошибки при решении задач.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.
	Высокий уровень	ОПК-1.2. Студент умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных знаний. ОПК-3.2. Студент умеет применять математический аппарат. ПК-2.2. Студент умеет применять основные теоремы и формулы геометрии, дискретной математики и дифференциальных уравнений.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.

				Раздел 9. Вариационное исчисление.	
		Владеет			
	Базовый уровень	ОПК-1.3. Студент на базовом уровне владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности. ОПК-3.3. Студент на базовом уровне владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий. ПК-2.3. Студент на базовом уровне владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.
	Средний уровень	ОПК-1.3. Студент на среднем уровне владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности. ОПК-3.3. Студент на среднем уровне владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.

		применения информационных систем и технологий. ПК-2.3. . Студент на среднем уровне владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.		Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	
	Высокий уровень	ОПК-1.3. Студент на высоком уровне владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности. ОПК-3.3. Студент на высоком уровне владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий. ПК-2.3. . Студент на высоком уровне владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации, подготовка и сдача экзамена.	Раздел 1. Основные понятия. Раздел 2. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка Раздел 5. Краевые задачи. Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений. Раздел 7 Теория устойчивости. Раздел 8. Уравнения в частных производных первого порядка. Раздел 9. Вариационное исчисление.	Текущий контроль – опрос, контрольная работа.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Таблица 3

№	Наименование оценочного средства	Характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	Опрос	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам

3. ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценивание результатов обучения по дисциплине Алгебра и геометрия осуществляется в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

Предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль (осуществление контроля всех видов аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающегося с целью получения первичной информации о ходе усвоения отдельных элементов содержания дисциплины) и промежуточная аттестация (оценивается уровень и качество подготовки по дисциплине в целом).

Показатели и критерии оценивания компетенций, формируемых в процессе освоения данной дисциплины, описаны в табл. 4.

Таблица 4.

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения
ОПК-1 ОПК-3 ПК-2		Знает	
	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	*ОПК-1.1.* *ОПК-3.1.* *ПК-2.1.*	*Не знает значительной части материала курса, не способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале дисциплины*
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»	*ОПК-1.1.* *ОПК-3.1.* *ПК-2.1.*	*Знает не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения в его применении*
	Средний уровень Оценка «хорошо»	*ОПК-1.1.* *ОПК-3.1.* *ПК-2.1.*	*Знает основную часть материала курса, способен применить изученный материал на практике, испытывает незначительные затруднения в решении задач*
	Высокий уровень Оценка «отлично»	*ОПК-1.1.* *ОПК-3.1.* *ПК-2.1.*	*Показывает глубокое знание и понимание материала, способен применить изученный материал на практике*
		Умеет	
	Базовый уровень	*ОПК-1.2.* *ОПК-3.2.* *ПК-2.2.*	*Умеет воспроизвести не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения при решении практических задач*
	Средний уровень	*ОПК-1.2.* *ОПК-3.2.* *ПК-2.2.*	*Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, испытывает незначительные затруднения в решении задач*
	Высокий уровень	*ОПК-1.2.* *ОПК-3.2.* *ПК-2.2.*	*Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, показывает глубокое знание и понимание материала, способен решить задачу при изменении формулировки*
		Владеет	
	Базовый уровень	*ОПК-1.3.* *ОПК-3.3.* *ПК-2.3.*	*Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, усвоил основное содержание материала дисциплины, но имеет пробелы в усвоении материала. Имеет несистематизированные знания основных разделов дисциплины.*
	Средний уровень	*ОПК-1.3.* *ОПК-3.3.* *ПК-2.3.*	*Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале. Испытывает незначительные затруднения в решении задач.*
	Высокий уровень	*ОПК-1.3.* *ОПК-3.3.* *ПК-2.3.*	*Свободно владеет навыками теоретического и экспериментального исследования, показывает глубокое знание и понимание изученного материала*

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения

Задания в форме опроса:

Опрос используется для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине в качестве проверки результатов освоения терминологии. Каждому студенту выдается свой собственный, узко сформулированный вопрос. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия, института, категории.

Контрольная работа

Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу

5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации

Раздел 1. Основные понятия.

1) Определение обыкновенного дифференциального уравнения.
2) Определение частного и общего решения, связь между ними.
3) Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.
4) Понятие задачи Коши.
5) Теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (без доказательства).
6) Геометрическая интерпретация обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
7) Уравнение радиоактивного распада.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1) Обыкновенные дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
2) Однородные уравнения первого порядка.
3) Понятие ортогональных траекторий.
4) Линейные дифференциальные уравнения первого порядка - основные свойства решения однородных и неоднородных уравнений.
5) Метод вариации произвольной постоянной.
6) Уравнение Бернулли.
7) Уравнение Рикатти.
8) Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
9) Условие полного дифференциала.
10) Интегрирующий множитель.
11) Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной.
12) Решение дифференциальных уравнений методом введения параметра.
13) Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро.
14) Понятие особого решения.
15) Методы приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
16) Метод последовательных приближений.

17) Метод Эйлера. Метод неопределенных коэффициентов.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения n-го порядка.

1) Линейная зависимость и независимость функций.
2) Понятие линейной зависимости и независимости функций.
3) Определитель Вронского. Свойства.
4) Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка.
5) Общие понятия. Понятие частного и общего решения.
6) Задача Коши.
7) Теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (без доказательства).
8) Дифференциальные уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка. Решение дифференциальных уравнений n-го методом введения параметра.
9) Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
10) Общие понятия. Свойства.
11) Однородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
12) Структура общего решения.
13) Понятие фундаментальной системы решений.
14) Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
15) Структура общего решения. Формула Лиувилля - Остроградского.
16) Однородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
17) Метод Эйлера. Понятие Характеристического уравнения.

Раздел 4. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка.

1) Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
2) Метод вариации произвольной постоянной.
3) Неоднородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
4) Метод неопределенных коэффициентов.

Раздел 5. Краевые задачи.

1) Понятие краевой задачи.
2) Решение краевой задачи с помощью функции Грина.

Раздел 6. Системы дифференциальных уравнений.

1) Системы дифференциальных уравнений.
2) Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка.
3) Нахождение интегрируемых комбинаций.
4) Системы линейных дифференциальных уравнений.
5) Теоремы о решениях системы линейных дифференциальных уравнений.
6) Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Раздел 7. Теория устойчивости.

1) Теория устойчивости.
2) Основные понятия. Простейшие типы точек покоя.
3) Второй метод А. М. Ляпунова.
4) Исследование на устойчивость по первому приближению.
5) Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена.
6) Случай малого коэффициента при производной высшего порядка.

7) Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

8) Теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Раздел 8. Уравнения в частных производных.

Уравнения в частных производных первого порядка. Основные понятия. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Связь с векторным полем. Характеристики. Теорема об общем решении уравнения в частных производных первого порядка.

Раздел 9. Вариационное исчисление.

1) Вариационные задачи с неподвижными границами.
2) Вариация и ее свойства.
3) Уравнение Эйлера.
4) Система уравнений Эйлера.
5) Уравнение Эйлера–Пуассона.
6) Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
7) Метод вариаций в задачах с подвижными границами.
8) Простейшая задача с подвижными границами.
9) Задача с подвижными границами.

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

Контрольные задания:

1. Тестовый вопрос 1:
а) вариант ответа 1;
б) вариант ответа 2;
в) вариант ответа 3;
г) вариант ответа 4;

2. Тестовый вопрос 2:
а) вариант ответа 1;
б) вариант ответа 2;
в) вариант ответа 3;
г) вариант ответа 4;

3. Тестовый вопрос 3:
а) вариант ответа 1;
б) вариант ответа 2;
в) вариант ответа 3;
г) вариант ответа 4;

Комплект заданий для контрольной работы по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Контрольная работа № 1

Вариант №1

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $xydx + (x + 1)dy = 0.$

2. $x\frac{dx}{dt}+t=1.$

Геометрические и физические задачи:

3. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2?

Однородные уравнения:

4. $(x+2y)dx-xdy=0.$

5. $(y+\sqrt{xy}dx=xdy.$

Контрольная работа № 1

Вариант №2

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy.$

2. $y'=\cos(y-x).$

Геометрические и физические задачи:

3. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная b?

Однородные уравнения:

4. $(x-y)dx-(x+y)dy=0.$

5. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y.$

Контрольная работа № 1

Вариант №3

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0. y(0)=1.$

2. $y'-y=2x-3.$

Геометрические и физические задачи:

3. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен 2a?

Однородные уравнения:

4. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$

5. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0.$

Контрольная работа № 1

Вариант №4

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $y'ctgx+y=2, y(x)\to 1$ при $x\to 0.$

2. $(x+2y)y'=1, y(0)=-1.$

Геометрические и физические задачи:

3. Найти кривые, у которых точка пересечение любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касание?

Однородные уравнения:

4. $2x^3y'=y(2x^2-y^2).$

5. $(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 3)dy = 0.$

Контрольная работа № 1

Вариант №5

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 0.$
2. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$

Геометрические и физические задачи:

3. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этим осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношение 1:2?

Однородные уравнения:

4. $y^2 + x^2y' = xyy'.$
5. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$

Контрольная работа № 1

Вариант №6

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $xy' + y = y^2, y(1) = 0{,}5.$
2. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$, y(x) ограничено при $x \to \infty$.

Геометрические и физические задачи:

3. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количество?

Однородные уравнения:

4. $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$
5. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$

Контрольная работа № 1

Вариант №7

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $2x^2yy' + y^2 = 2.$
2. $xydx + (x + 1)dy = 0.$

Геометрические и физические задачи:

3. Согласно опытам. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

Однородные уравнения:

4. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}.$
5. $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy.$

Контрольная работа № 1

Вариант №8

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $y' - xy^2 = 2xy.$
2. $x^2y' - \cos 2a = 1; y(+\infty) = 9\pi/4.$

Геометрические и физические задачи:

3. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью?

Однородные уравнения:

4. $xy' = y - xe^{y/x}$.

5. $y' = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$.

Контрольная работа № 1

Вариант №9

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $e^{-s}(1 + \frac{ds}{dt}) = 1$.

2. $xy' + y = y^2, y(1) = 0{,}5$.

Геометрические и физические задачи:

3. Тело охладилось за 10 мин от 100^{o} до 60^{o}. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20^{o}. Когда тело остынет до 25^{o}?

Однородные уравнения:

4. $xy' - y = (x + \square)ln\frac{x+y}{x}$.

5. $(y' + 1)ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$.

Контрольная работа № 1

Вариант №10

Уравнения с разделяющимися переменными:

1. $z' = 10^{x+z}$.

2. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 5$.

Геометрические и физические задачи:

3. В сосуде, содержащий 1 кг воды при температуры 20^{o}, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельная теплоемкость 0,2 и температура 75^{o}. Через минуту вода нагрелась на 2^{o}. Когда температура воды и предмета будет отличаться одна от другой на 1^{o}? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими.

Однородные уравнения:

4. $xy' = ycosln\frac{y}{x}$.

5. $y' = \frac{y+2}{x+1} + tg\frac{y-2x}{x+1}$.

Контрольная работа №2

Вариант №1

Линейные уравнения первого порядка:

1. $xy' - 2y = 2x^4$.

2. $(2e^y - x)y' = 1$.

3. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Контрольная работа №2

Вариант №2

Линейные уравнения первого порядка

1. $(2x + 1)y' = 4x + 2y.$
2. $(sin^2 y + xctgy)y' = 1.$
3. $xy' - 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$

Уравнения в полных дифференциалах

4. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №3

Линейные уравнения первого порядка:

1. $y' + ytgx = secx.$
2. $(2x + y)dy = ydx + 4lnydy.$
3. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №4

Линейные уравнения первого порядка

1. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$
2. $y' = \frac{y}{3x-y^2}.$
3. $y'x^3 siny = xy' - 2y.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + lnx)dy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №5

Линейные уравнения первого порядка:

1. $x^2 y' + xy + 1 = 0.$
2. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1).$
3. $(2x^2 ylny - x)y' = y.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №6

Линейные уравнения первого порядка:

1. $y = x(y' - xcosx).$
2. $y' + 2y = y^2 e^x.$

3. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx - \sqrt{x^2-y}dy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №7

Линейные уравнения первого порядка:

1. $2x(x^2+y)dx = dy.$
2. $(x+1)(y'+y^2) = -y.$
3. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $(1 + y^2 sin2x)dx - 2ycos^2xdy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №8

Линейные уравнения первого порядка:

1. $(xy' - 1)lnx = 2y.$
2. $y' = y^4cosx + ytgx.$
3. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $3x^2(1 + lny)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$

Контрольная работа №2

Вариант №9

Линейные уравнения первого порядка:

1. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$
2. $xy^2y' = x^2 + y^2$
3. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $\left(\frac{x}{siny} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)cosy}{cos2y-1}dy = 0.$

Контрольная работа №2

Вариант №10

Линейные уравнения первого порядка:

1. $(x + y^2)dy = ydx.$
2. $xydy = (y^2 + x)dx$
3. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$

Уравнения в полных дифференциалах:

4. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$

Контрольная работа №3

Вариант №1

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $y'^2 - y^2 = 0.$
2. $y'^2 + xy = y^2 + xy'.$
3. $x = y'^3 + y'.$
4. $y = xy' - y'^2.$

Разные уравнения первого порядка:

5. $xy' + x^2 + xy - y = 0.$

Контрольная работа №3

Вариант №2

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $8y'^3 = 27y.$
2. $xy'(xy' + y) = 2y^2.$
3. $x({y'}^2 - 1) = 2y'.$
4. $y + xy' = 4\sqrt{y'}.$

Разные уравнения первого порядка:

5. $2xy' + y^2 = 1.$

Контрольная работа №3

Вариант №3

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2.$
2. $xy'^2 - 2yy' + x = 0.$
3. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}.$
4. $y = 2xy' - 4y'^3.$

Разные уравнения первого порядка:

5. $\left(2x{y'}^2 - y\right)dx + xdy = 0.$

Контрольная работа №3

Вариант №4

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $y^2({y'}^2 + 1) = 1.$
2. $xy'^2 = y(2y' - 1)$
3. $y'(x - ln\, y') = 1.$
4. $y = xy' - (2 + y').$

Разные уравнения первого порядка:

5. $(xy' + y)^2 = x^2y'.$

Контрольная работа №3

Вариант №5

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $y'^2 - 4y^3 = 0.$
2. $y'^2 + x = 2y$
3. $y = y'^2 + 2y'^3.$

4. $y'^3 + y^2 = xyy'$.

Разные уравнения первого порядка:

5. $y - y' = y^2 + xy'$.

Контрольная работа №3

Вариант №6

Уравнение, не разрешенные относительно производной

1. $y'^2 = 4y^2(1 - y)$.
2. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$
3. $y' = \ln(1 + y'^2)$.
4. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

Разные уравнения первого порядка

5. $(x + 2y^3)y' = y$.

Контрольная работа №3

Вариант №7

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $xy'^2 = y$.
2. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$
3. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$.
4. $xy' - y = \ln y'$.

Разные уравнения первого порядка:

5. $y'^3 - y'^{e^{2x}} = 0$.

Контрольная работа №3

Вариант №8

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $yy'^3 + x = 1$.
2. $(xy' + 3y)^2 = 7x$
3. $y = (y' - 1)e^{y'}$.
4. $xy'(y' + 2) = y$.

Разные уравнения первого порядка:

5. $x^2y' = y(x + y)$.

Контрольная работа №3

Вариант №9

Уравнение, не разрешенные относительно производной

1. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.
2. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$
3. $y'^4 - y'^2 = y^2$.
4. $2y'^2(y - xy') = 1$.

Разные уравнения первого порядка

5. $(1 + x^2)dy + xydx = 0$.

Контрольная работа №3

Вариант №10

Уравнение, не разрешенные относительно производной:

1. $4(1-y)=(3y-2)^2y'^2$.
2. $y'(2y-y')=y^3sin^2x$
3. $y'^2-y'^3=y^2$.
4. $2xy'-y=\ln y'$.

Разные уравнения первого порядка:

5. $y'^2+2(x-1)y'-2y=0$.

Контрольная работа №4

Вариант №1

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $x^2y''=y'^2$.
2. $2yy''=y^2+y'^2$.
3. $xy^{IV}=1$.
4. $yy''=2xy'^2,\ y(2)=2, y'(2)=0{,}5$.

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y''+y'-2y=0$.

Контрольная работа №4

Вариант №2

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $2xy'y''=y'^2-1$.
2. $y''^3+xy''=2y'$.
3. $y'''=2xy''$.
4. $2y'''-3y'^2=0,\ y(0)=-3, y'(0)=1, y''(0)=-1$.

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y''+4y'+3y=0$.

Контрольная работа №4

Вариант №3

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $y^3y''=1$.
2. $y''^2+y'=xy''$.
3. $xy^{IV}+y'''=e^x$.
4. $x^2y''-3xy'=\frac{6y^2}{x^2}-4y,\ y(1)=1, y'(1)=4$.

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y''-2y'=0$.

Контрольная работа №4

Вариант №4

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $y'^2+2yy''=0$.
2. $y''+y'^2=2e^{-y}$.

3. $yy''' + 3y'y'' = 0.$
4. $y''' = 3yy',\ y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 4{,}5.$

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

Контрольная работа №4

Вариант №5

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $y'' = 2yy'.$
2. $xy''' = y'' - xy''.$
3. $y'y''' = 2y''^2.$
4. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y',\ y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2.$

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

Контрольная работа №4

Вариант №6

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $yy'' + 1 = y'^2.$
2. $y''^2 = y'^2 + 1.$
3. $yy'' = y'(y' + 1).$
4. $yy'' = 2xy'^2,\ y(2) = 2, y'(2) = 0{,}5.$

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y'' + 2y' + 10y = 0.$

Контрольная работа №4

Вариант №7

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $y''(e^x + 1) + y' = 0.$
2. $y'' = e^y.$
3. $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0.$
4. $2y''' - 3y'^2 = 0,\ y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1.$

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y'' + 4y = 0.$

Контрольная работа №4

Вариант №8

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $y''' = y''^2.$
2. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0.$
3. $yy'' + y'^2 = 1.$
4. $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y,\ y(1) = 1, y'(1) = 4.$

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y''' - 8y = 0.$

Контрольная работа №4

Вариант №9

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $yy'' = y'^2 - y'^3$.
2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.
3. $y'' = xy' + y + 1$.
4. $y''' = 3yy',\ y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 4{,}5$.

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y^{IV} - y = 0$.

Контрольная работа №4

Вариант №10

Уравнение, допускающие понижение порядка

1. $y''' = 2(y'' - 1)ctgx$.
2. $y^4 - y^3y'' = 0$.
3. $xy'' = 2yy' - y'$.
4. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y',\ y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2$.

Линейные уравнение с постоянными коэффициентами

5. $y^{IV} + 4y = 0$.

Контрольная работа №5

Вариант №1

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $y^{IV} + 64y = 0$.
2. $y''' - 3y' + 2y = 0$.
3. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-y}$.
4. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.
5. $y'' + 2y' + y = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2$.

Контрольная работа №5

Вариант №2

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $y'' - 2y' + y = 0$.
2. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.
3. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$.
4. $y'' - 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.
5. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$.

Контрольная работа №5

Вариант №3

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $4y'' + 4y' + y = 0$.
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.
3. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

4. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^{x} + e^{x}\sin 2x$.
5. $y'' - 2y' = 2e^{x}, y(1) = -1, y'(1) = 0$.

Контрольная работа №5
Вариант №4
Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
1. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.
2. $y'' + y = 4xe^{x}$.
3. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
4. $y'' - 2y' + y = 2xe^{x} + e^{x}\sin 2x$.
5. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y(0) = y'(0) = 0$.

Контрольная работа №5
Вариант №5
Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
1. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.
2. $y'' - y = 2e^{x} - x^{2}$.
3. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$.
4. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^{2} - 3x\sin x$.
5. $y''' - y' = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1$

Контрольная работа №5
Вариант №6
Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
1. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.
2. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$.
3. $y'' + y = xsin\, x$.
4. $y''' + y' = \sin x + xcosx$.
5. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$.

Контрольная работа №5
Вариант №7
Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
2. $y'' - 3y' + 2y = sinx$.
3. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.
4. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^{2}$.
5. $y^{IV} + y'' = 2cosx, y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0$.

Контрольная работа №5
Вариант №8
Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
1. $y''' - y'' - y' + y = 0$.
2. $y'' + y = 4sinx$.
3. $y'' - 5y' = 3x^{2} + sin5x$.

4. $y'' - 6\square' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}\sin x.$
5. $y'' + 2y' + y = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2.$

Контрольная работа №5

Вариант №9

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$
2. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}.$
3. $y'' - 2y' + 2y = e^x + xcosx.$
4. $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - cosx).$
5. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$

Контрольная работа №5

Вариант №10

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. $y^V + 8y''' + 16y' = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = xcosx.$
3. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}cosx.$
4. $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5xsinx.$
5. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0.$

Контрольная работа №6

Вариант №1

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z; \\ \dot{z} = 2x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$
3. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$
4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №2

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = y - x + z\ ; \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$
3. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №3

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z; \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №4

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z\ ; \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №5

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = z + x\ ; \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №6

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$; $(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2y \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №7

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$; $(\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №8

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$; $(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t} \\ \dot{y} = -2x + 2t \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №9

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$; $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{matrix}$

Контрольная работа №6

Вариант №10

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z; \ (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1) \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3t + 3e^t \end{cases}$

4. $\dot{x} = Ax, A = \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{matrix}$

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

Вопросы к зачету:

1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.
2. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.
3. Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной.
4. Уравнение Бернулли. Уравнение Рикатти.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие Эйлера. Интегрирующий множитель.
6. Принцип сжатых отображений.
7. Теорема существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
8. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных условий.
9. Особые точки. Особые решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
10. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра для уравнений вида $F(x, y, y') = 0$.
11. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро.
12. Теорема существования и единственности решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.
13. Особые точки и особые решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.
14. Сведение уравнений n-го порядка к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка. Теорема существования и единственности решения уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$.
15. Простейшие случаи понижения порядка.
16. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства линейного оператора.
17. Теоремы о решениях линейного однородного уравнения n-го порядка. Фундаментальная система решений.
18. Формула Остроградского–Лиувилля.

19. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Различные случаи корней характеристического уравнения.

20. Уравнения Эйлера. Преобразование уравнения Эйлера в уравнение с постоянными коэффициентами.

21. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Теоремы о решениях линейного неоднородного уравнения.

22. Метод вариации постоянных.

23. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.

24. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов. Периодические решения дифференциальных уравнений.

25. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний.

26. Краевая задача.

27. Решение краевых задач методом функции Грина. Свойства функции Грина. Построение функции Грина.

28. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Геометрическая и физическая интерпретация решения системы дифференциальных уравнений.

29. Интегрирование системы путем сведения к одному уравнению более высокого порядка.

30. Нахождение интегрируемых комбинаций.

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

Вопросы к экзамену:

1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.
2. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.
3. Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной.
4. Уравнение Бернулли. Уравнение Рикатти.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие Эйлера. Интегрирующий множитель.
6. Принцип сжатых отображений.
7. Теорема существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
8. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных условий.
9. Особые точки. Особые решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
10. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра для уравнений вида $F(x, y, y') = 0$.
11. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро.
12. Теорема существования и единственности решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.
13. Особые точки и особые решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.
14. Сведение уравнений n-го порядка к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка. Теорема существования и единственности решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.
15. Простейшие случаи понижения порядка.

16. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства линейного оператора.
17. Теоремы о решениях линейного однородного уравнения n-го порядка. Фундаментальная система решений.
18. Формула Остроградского–Лиувилля.
19. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Различные случаи корней характеристического уравнения.
20. Уравнения Эйлера. Преобразование уравнения Эйлера в уравнение с постоянными коэффициентами.
21. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Теоремы о решениях линейного неоднородного уравнения.
22. Метод вариации постоянных.
23. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
24. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов. Периодические решения дифференциальных уравнений.
25. Метод малого параметра и его применение в теории квазилинейных колебаний.
26. Краевая задача.
27. Решение краевых задач методом функции Грина. Свойства функции Грина. Построение функции Грина.
28. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Геометрическая и физическая интерпретация решения системы дифференциальных уравнений.
29. Интегрирование системы путем сведения к одному уравнению более высокого порядка.
30. Нахождение интегрируемых комбинаций.
31. Системы линейных дифференциальных уравнений. Теоремы о решениях системы линейных дифференциальных уравнений.
32. Метод вариации постоянных.
33. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Различные случаи корней характеристического уравнения.
34. Определение устойчивости решения системы дифференциальных уравнений по Ляпунову.
35. Определение асимптотической устойчивости. Точка покоя.
36. Простейшие типы точек покоя.
37. Второй метод Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
38. Теорема Четаева о неустойчивости.
39. Исследование на устойчивость по первому приближению.
40. Теорема Ляпунова об исследовании по первому приближению.
41. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена. Теорема Гурвица.
42. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка.
43. Определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Теорема Малкина.
44. Теорема Ковалевской о существовании и единственности решения уравнения в частных производных.
45. Линейные однородные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики уравнений.
46. Теорема об общем решении уравнения $\sum_{i=1}^{n} X_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$.

47. Однородные и неоднородные уравнения в частных производных от функции n переменных.

48. Вариационное исчисление. Вариация функционала и ее свойства.

49. Основная теорема вариационного исчисления.

50. Основная лемма вариационного исчисления.

51. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.

52. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

53. Функционалы вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n)dx$. Система уравнений Эйлера.

54. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка — $\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)dx$. Уравнение Эйлера–Пуассона.

55. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных — $\iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{y}\right)dxdy$. Уравнение Остроградского.

56. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.Условие трансверсальности.

57. Вариационная задача на условный экстремум. Связи вида $\varphi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$.

58. Теорема об экстремуме функционала $\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1^{'}, ..., y_n^{'}\right)dx$ при наличии условий $\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ ($i = 1,2,...,m$; $m < n$).

59. Изопериметрическая задача.

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

Методические материалы к курсу «Дифференциальные уравнения»

Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Понятие дифференциального уравнения.

Определение. Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F\left(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

между независимым переменным x, его функцией y и производными $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Функция $y = \varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения (1.1), если после замены y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x)$, …, $y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ − уравнение превращается в справедливое тождество.

Дифференциальное уравнение I-го порядка имеет вид:

$$F(x; y; y') = 0 \tag{1.2}$$

Дифференциальное уравнение I-го порядка (1.2), разрешенное относительно y', записывается в виде:

$$y' = f(x; y) \tag{1.3}$$

и называется дифференциальным уравнением I порядка, разрешенным относительно производной.

График решения дифференциального уравнения будем называть интегральной кривой.

2. Дифференциальное уравнение радиоактивного распада.

Задача. За 30 дней распалось 50 % первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько дней останется 1 % вещества от первоначального количества?

Решение. Закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

Обозначим через Q(t) количество радиоактивного вещества в момент времени t.

За промежуток времени от t до t + Δt распадается количество вещества равное, с одной стороны − $Q(t + \Delta t) - Q(t)$, с другой стороны, согласно закону радиоактивного распада − $kQ(t')\Delta t$, где $t' \in (t; t+\Delta t)$, k − коэффициент пропорциональности. Следовательно, имеем равенство:

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) \approx - kQ(t')\Delta t,$$

Или

$$\frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} \approx -kQ(t').$$

Считая функцию $Q(t)$ дифференцируемой и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -kQ(t)$$

или

$$Q'(t) = -kQ(t)$$

Решением полученного дифференциального уравнения является функция:

$$Q(t) = C \cdot e^{-kt}.$$

При t = 0 имеем: $Q(0) = C = Q_0$ − первоначальное количество вещества.

Следовательно, распад радиоактивного вещества описывает функция:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}..$$

По условию задачи имеем:

$$Q(t)\ \Big|_{t=30} = \frac{1}{2}Q_0$$

или

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-kt}\Big|_{t=30} = Q_0 \cdot e^{-30k}$$

или

$$e^{30k} = 2,$$

т.е.

$$30k = \ln 2.$$

Следовательно:

$$k = \frac{1}{30}\ln 2;$$

Таким образом, получили:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{30}t};$$

Осталось найти такой момент времени *t* когда $Q(t) = \frac{1}{100}Q_0$.

Имеем:

$$\frac{1}{100}Q_0 = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{30}t} \Rightarrow -\ln 100 = -\frac{\ln 2}{30}t \Rightarrow$$

$$t = \frac{30\ln 100}{\ln 2} \approx \frac{60\ln 10}{\ln 2} \approx \frac{60\cdot 2{,}303}{0{,}693} \approx 199.$$

Таким образом, 1 % от первоначального вещества останется примерно через 199 дней.

Ответ: 199 дней.

Из рассматриваемого примера видно, что дифференциальному уравнению вида

$$y' = -ky$$

удовлетворяют очень много функций, а именно функции вида

$$y = ce^{-kx}.$$

В теории дифференциальных уравнений вечным теоретическим вопросом является вопрос о том, насколько много решений имеет дифференциальное уравнение. Оказывается, что каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, и поэтому приходится ставить вопрос не о числе решений данного дифференциального уравнения, а о том, как можно описать совокупность всех решений данного дифференциального уравнения. Ответ на этот вопрос дает теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения.

3. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши.

Теорема (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка).

Пусть

$$y' = f(x;y) \tag{1.3}$$

дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть функция *f = (x;y)* задана на некотором открытом множестве D плоскости R^2.

Пусть функции *f(x;y)* и $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \in C(D)$..

Тогда:

1) $\forall\,(x_0;y_0) \in D$ существует решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее условию:

$$\varphi(x_0) = y_0$$

2) если два решения $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ уравнения (1.3) совпадает хотя бы для одного значения $x=x_0$, т.е. если $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, то эти решения тождественно равны для всех тех значений переменного *x*, для которых они оба определены.

Геометрическое содержание теоремы заключается в том, что через каждую точку $(x_0;y_0)\in D$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.3).

Интегральная кривая − график решения $y=\varphi(x)$ уравнения (1.3).

Задача Коши. Пусть дано дифференциальное уравнение I порядка $y'=f(x;y)$. Пусть функция $f(x;y)$ определена в области $D\in R^2$, $(x_0;y_0)\in D$;

Решить задачу Коши для уравнения (1.3), значит найти функцию $y=\varphi(x)$ такую, что:

а) $y=\varphi(x)$ − решение уравнения (1.3);

б) $\varphi(x_0)=y_0$.

Условие $y_0=\varphi(x_0)$ − будем называть начальным условием.

Определение (общее решение дифференциального уравнения I порядка).

Пусть

$$y'=f(x;y) \text{ -} \tag{1.3}$$

дифференциальное уравнение, где функция *f(x;y)* определена в области $D\in R^2$; функцию $y=\varphi(x;c)$ будем называть общим решением уравнения (1.3), если:

а) $\forall c$ функция $y=\varphi(x;c)$ решение уравнения (1.3);

б) $\forall(x_0;y_0)\in D\ \ \exists c_0:\ \varphi(x_0;c_0)=y_0$, т.е. для каждой точки $(x_0;y_0)\in D\ \ \exists c_0$: график функции $y=\varphi(x;c_0)$ проходит через точку $(x_0;y_0)$;

Определение (частного решения дифференциального уравнения I порядка).

Решение уравнения (1.3)

$$y=\varphi(x;c_0)$$

проходящее через точку $(x_0;y_0)\in D$ называется его частным решением.

4. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение I порядка

$$y'=f(x;y), \tag{1.3}$$

где функция *f(x;y)* определена в области $D\in R^2$. Это уравнение задает в каждой точке (*x*;*y*) области D значение углового коэффициента касательной к проходящему через эту точку графику решения уравнения (1.3). Т.е. для каждой точки (*x;y*) можно вычислить производную $\frac{dy}{dx}$. Следовательно, дифференциальное уравнение (1.3) в каждой точке области D задает направление касательной, определяемое значением *f(x;y).*

Множество таких направлений образуют поле направлений дифференциального уравнения (1.3).

Следовательно, нахождение решения дифференциального уравнения (1.3) заключается в нахождении кривой, называемой интегральной кривой, направления касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля.

Пример 4.1. $y' = \dfrac{y}{x}$

Имеем: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$. В каждой точке, отличной от точки (0;0), угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению $\dfrac{y}{x}$; т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в ту же точку *(x,y).*

Очевидно, что интегральными кривыми в данном случае будут прямые $y=cx$,т.к. направление этих прямых всюду совпадает с направлением поля.

5. Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x) \tag{5.1}$$

В этом простейшем случае, как следует из курса интегрального исчисления, общее решение уравнения (5.1) записывается в виде:

$$y = \int f(x)dx + C\,, \tag{5.2}$$

которое содержит произвольную постоянную C. Если известно начальное условие

$$y(x_0) = y_0\,,$$

то соответствующее частное решение имеет вид:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx. \tag{5.3}$$

6. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными.

Определение. Дифференциальное уравнение вида:

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \tag{6.1}$$

называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными.

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ − непрерывные функции. Предположим, что функция $y(x)$ является решением уравнения (6.1). Тогда при подстановке функции $y(x)$ в уравнение (6.1), получим тождество, интегрируя которое получим:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C\,, \tag{6.2}$$

где C - произвольная постоянная.

Пример 6.1. Решим уравнение: $xdx + ydy = 0$.

Имеем:

$$\int xdx + \int ydy = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C\,,$$

− семейство окружностей с центром в начале координат.

7. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения вида:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{7.1}$$

называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Уравнения (7.1) можно привести к уравнению с разделенными переменными, а именно к виду:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

или

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)\cdot dx$$

Заметим, что при делении на функцию $f_2(y)$ можно потерять частное решение, а именно решение $y = y(x)$ при котором функция $f_2(y)$ обращается в нуль, а если функция $f_2(y)$ разрывная, то возможно появление лишних решений.

Пример 7.1. Решим уравнение: $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$.

Имеем: $x(1+y^2)dx = y(1+x^2)dy \Rightarrow \dfrac{ydy}{1+y^2} = \dfrac{xdx}{1+x^2} \Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + C \Rightarrow$ $(1+y^2) = C(1+x^2)$.

8. Понятие ортогональных траекторий.

Определение. Ортогональными траекториями заданного семейства кривых называются линии, пересекающие линии данного семейства под прямым углом.

Пример 8.1. Найдем ортогональные траектории семейства парабол $y = ax^2$.

Угловые коэффициенты − k_1 и k_2, касательных к кривым данного семейства и к искомым ортогональным траекториям должны в каждой точке удовлетворять условию ортогональности:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Для семейства парабол $y = ax^2$, т.к. $a = \dfrac{y}{x^2}$, находим:

$$k_1 = 2ax = 2\cdot\frac{y}{x^2}\cdot x = \frac{2y}{x}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий имеет вид:

$$y' = -\frac{x}{2y},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y},$$

или

$$2ydy + xdx = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, получим:

$$\frac{x^2}{2}+y^2=C^2$$

– семейство эллипсов.

9. Дифференциальные уравнения вида $y'=f(ax+by)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by), \tag{9.1}$$

где a и b – постоянные величины. Уравнение (9.1) заменой переменной

$$z = ax + by$$

преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Действительно:

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$$

или

$$\frac{dz}{dx}=a+b\cdot f(x)$$

или

$$\frac{dz}{a+b\cdot f(z)}=dx$$

– уравнение с разделенными переменными.

Пример 9.1. Решим уравнение: $y'=2x+y$.

Сделаем замену переменной:

$$z = 2x+y$$

Тогда получим:

$$z'=2+y' \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=2+z \Rightarrow \quad \frac{dz}{2+z}=dx \Rightarrow \quad \ln(2+z)=x+C \Rightarrow \quad 2+z=e^{x+c} \Rightarrow$$

$z=e^{x+c}-2$.

Учитывая замену, получим:

$$y=e^{x+c}-2x-2.$$

10. Задача о концентрации.

Задача. В сосуд, содержащий 10 литров чистой воды, непрерывно поступает раствор со скоростью 2 литра в минуту, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение. Пусть $y(t)$ количество соли в сосуде в момент времени t. Рассмотрим временной интервал $\left(t;\ \ t+\Delta t\right)$.

За время Δt в сосуд поступает $0{,}3 \cdot 2 \cdot \Delta t$ кг соли, а вытекает $-\dfrac{y(t')}{10} \cdot 2 \cdot \Delta t$ кг. соли, где $t' \in (t; t + \Delta t)$.

Следовательно, можно написать, что

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx 0{,}6\Delta t - 0{,}2y(t')\Delta t,$$

или

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx 0{,}6 - 0{,}2y(t').$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta t \to 0$, получим:

$$y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t).$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, получим:

$$\frac{dy}{0{,}6 - 0{,}2y} = dt \Rightarrow \frac{dy}{y - 3} = -0{,}2dt \Rightarrow \ln(y - 3) = -0{,}2t \ \Rightarrow y = 3 + Ce^{-0{,}2t}.$$

Учитывая начальное условие

$$y(0) = 0,$$

получим:

$$c = -3.$$

Следовательно,

$$y = 3 - 3e^{-0{,}2t}.$$

При $t = 5$ получаем:

$$y(5) = 3 - 3e^{-1} \approx 1{,}9 \text{ кг.}$$

Ответ. Через 5 минут в сосуде будет 1,9 кг соли.

11. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Функция $f(x; y)$ называется однородной функцией первого порядка, если $f(tx; ty) = f(x; y)$.

Пример 11.1. Функция $f(x; y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ однородная функция первого порядка.

Действительно: $f(tx; ty) = \dfrac{tx + ty}{tx - ty} = \dfrac{t(x + y)}{t(x - y)} = \dfrac{x + y}{x - y} = f(x; y)$.

Пример 11.2. Функция $f(x; y) = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ однородная функция второго порядка.

Действительно: $f(tx; ty) = \dfrac{t^2x^2 - t^2xy + t^2y^2}{t^2x^2 + t^2xy + t^2y^2} = \dfrac{t^2(x^2 - xy + y^2)}{t^2(x^2 + xy + y^2)} = f(x; y)$.

Замечание. Если $f(x; y)$ однородная функция первого порядка, то $f(x; y) = f\left(1; \dfrac{y}{x}\right)$

.

Пример 11.3. Рассмотрим функцию $f(x; y) = \dfrac{x + y}{x - y}$.

Имеем – $f(x;y)=\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{y}{x}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}=f\left(1;\dfrac{y}{x}\right)$.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(x;y) \tag{1.3}$$

называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка, если функция $f(x,y)$ является однородной функцией первого порядка.

Учитывая замечание, уравнение (1.3) можно записать в виде

$$y'=f\left(1;\frac{y}{x}\right) \tag{1.3'}$$

Для решения однородного дифференциального уравнения первого порядка введем новую функцию:

$$z=\frac{y}{x}$$

или

$$y=zx$$

Тогда

$$y'=z'x+z$$

Подставляя в уравнение (1.3'), получим:

$$z'x+z=f(1;z)$$

или

$$z'x=f(1;z)-z \tag{11.1}$$

Полученное уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, учитывая особенности решения уравнения с разделяющимися переменными, найдем решение уравнения (11.1). Сделав обратную замену, найдем решение уравнения (1.3).

Пример 11.4. Решим уравнение: $y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$.

Так как уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, сделав замену $\dfrac{y}{x}=z$, или $y=zx$ получим:

$y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x} \;\Rightarrow\; z'x+z=z+tgz \;\Rightarrow\; z'x=tgz \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{\sin z}{\cos z} \;\Rightarrow\; \dfrac{\cos z}{\sin z}dz=\dfrac{dx}{x}$ и $\sin z=0 \;\Rightarrow\; \ln|\sin z|=\ln|x|+C$ и $z=\pi\kappa \;\Rightarrow\; \sin z=Cx$ и $z=\pi\kappa \;\Rightarrow\; \sin\dfrac{y}{x}=Cx$ и $\dfrac{y}{x}=\pi\kappa$ $\Rightarrow\; \sin\dfrac{y}{x}=Cx$

и $y=\pi\kappa x$. Так как решение $y=\pi\kappa x$ получается из решения $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$ при $C=0$ то общее решение заданного уравнения является функция $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$.

Ответ. $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

Рассмотрим уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{11.2}$$

1) Если $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\kappa$ то $y'=f(\kappa)$. Решением полученного уравнения является функция $y=f(\kappa)\cdot x+c$.

2) Если прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ пересекаются, то уравнение (11.2) приводится к однородному путем переноса начала координат в точку пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Пример 11.5. Решим уравнение:

$$y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

Найдем точку пересечения прямых x-y+1=0 и x+y−3=0.

Имеем:

$$\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=-1\\ x+y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

Сделаем замену переменных:

$$x = X+1,$$
$$y = Y+2.$$

Тогда

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+1-Y-2+1}{X+1+Y+2-3}$$

или

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}. \tag{11.3}$$

Полученное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Сделаем замену Y=zX. Тогда $Y'=z+Xz'$ и после подстановки в уравнение (11.3), получим:

$$z+Xz'=\frac{X-Xz}{X+Xz}.$$

Итак:

$$z+Xz'=\frac{X-Xz}{X+Xz} \quad\Rightarrow\quad Xz'+z=\frac{1-z}{1+z} \quad\Rightarrow\quad Xz'=\frac{1-z}{1+z}-z=\frac{1-z-z-z^2}{1+z} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dX}\cdot X=-\frac{z^2+2z-1}{z+1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z+1}{z^2+2z-1}dz=-\frac{dX}{X} \quad \text{и} \quad z^2+2z-1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln\left|z^2+2z-1\right|=-\ln|x|+C \quad \text{и}$$

$$z=-1\pm\sqrt{2}\ \Rightarrow$$

$$z^2+2z-1=\frac{C}{x^2} \quad \text{и} \quad z=-1\pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y^2}{X^2}+2\frac{Y}{X}-1=\frac{C}{X^2} \quad \text{и} \quad \frac{Y}{X}=-1\pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow$$
$Y^2+2YX-X^2=C$ и

$Y=(-1\pm\sqrt{2})\cdot X \quad \Rightarrow \quad (y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C$ и $(y-2)=(-1\pm\sqrt{2})\cdot(x-1) \Rightarrow$

$y^2+2xy-x^2-2x-6y+7=C$ и $(y-2)=(-1\pm\sqrt{2})\cdot(x-1)$.

Ответ. $y^2+2xy-x^2-2x-6y+7=C$ и $(y-2)=(-1\pm\sqrt{2})\cdot(x-1)$.

3) Если прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ параллельны, то $a_2x+b_2y=\kappa(a_1x+b_1y)$, т.е.

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\kappa(a_1x+b_1y)+c_2}\right).$$

Получили уравнение вида:

$$y'=f(ax+by),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 11.6. Решим уравнение:

$$y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$$

Так как

$$\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}=\frac{(2x+y)+1}{2(2x+y)-3}$$

Сделаем замену

$$2x+y=z \text{ или } y=z-2x.$$

Тогда $y'=z'-2$ и уравнение примет вид:

$$z'-2=\frac{z+1}{2z-3}.$$

Имеем:

$$z'-2=\frac{z+1}{2z-3}\Rightarrow z'=\frac{z+1}{2z-3}+2\Rightarrow z'=\frac{5z-5}{2z-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=\frac{5(z-1)}{2z-3}\Rightarrow\frac{2z-3}{z-1}dz=5dx \quad \text{и}$$
$z=1 \Rightarrow$

$$2\int\frac{z-\frac{3}{2}}{z-1}dz=5\int dx \quad \text{и} \quad z=1 \quad \Rightarrow \quad 2z-\ln|z-1|=5x+C \quad \text{и} \quad z=1 \quad \Rightarrow$$
$2(2x+y)-\ln|2x+y-1|=5x+C$

и $2x+y=1 \Rightarrow (2y-x)-\ln|2x+y-1|=C$ и $2x+y-1=0$.

Ответ. $(2y-x)-\ln|2x+y-1|=C$ и $2x+y-1=0$.

12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{12.1}$$

где *p(x)* и *q(x)* некоторые функции переменной *x*, будем называть линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Если *q(x)=0*, то уравнение (12.1) называется линейным однородным уравнением

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (12.2)$$

которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделив переменные, решим уравнение (12.2). Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + C \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (12.3)$$

Функция, заданная равенством (12.3), является решением уравнения (12.2).

Для решения уравнения (12.1) применим метод вариации произвольного постоянного. Решение уравнения (12.1) будем искать в виде:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (12.3)$$

Найдем y':

$$y' = C'e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$

(12.4)

Для определения функции *C(x),* функцию *y(x),* заданную равенством (12.3), и функцию $y'(x)$, заданную равенством (12.4), подставим в уравнение (12.1). Имеем:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Таким образом, имеем:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \qquad (12.5)$$

Подставляя полученное значение *C(x)* в (12.3), получим:

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx) \qquad (12.6)$$

Таким образом, решение уравнения (12.1) задается формулой (12.6).

Пример 12.1. Решим уравнение: $y' - \frac{1}{x}y = x^2$.

Здесь $p(x) = -\frac{1}{x}$ и $q(x) = x^2$. Следовательно:

$$y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}(C + \int x^2 e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx) = e^{\ln|x|}(C + \int x^2 e^{-\ln|x|}dx) = x(C + \int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx) = x(C + \frac{x^2}{2}) = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Ответ. $y = Cx + \frac{x^3}{2}$.

13. Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{13.1}$$

называется уравнением Бернулли.

Если $n = 0$, то это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Если $n = 1$, это уравнение с разделяющимися переменными.

При $n \neq 0$ и $n \neq 1$ разделим обе части уравнения (13.1) на y^n. Получим:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x) \tag{13.2}$$

Введем новую переменную:

$$\frac{1}{y^{n-1}} = z$$

Тогда:

$$\frac{1}{y^{n-1}} = z \Rightarrow y^{1-n} = z \Rightarrow (y^{1-n})' = z' \Rightarrow (1-n)y^{-n} \cdot y' = z' \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{1}{1-n}z'.$$

Подставляем в уравнение (13.2), получим:

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x)$$

или

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Разрешив уравнение относительно функции $z(x)$ и учитывая замену, находим функцию $y(x)$.

Пример 13.1. Решим уравнение: $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x^2}{2y}$.

Имеем:

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{y},\ n = -1,$$

или

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = x^2.$$

Сделав замену

$$z = y^2$$

Тогда

$$z' = 2y \cdot y'$$

Получим:

$$z' - \frac{1}{x}z = x^2.$$

Из примера 12.1 получаем ответ:

$$z = y^2 = x(C + \frac{x^2}{2}).$$

Ответ. $y^2 = x(C + \dfrac{x^2}{2})$.

14. Уравнение Риккати.

Определение. Уравнение вида

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \qquad (14.1)$$

будем называть уравнением Риккати.

При $f(x) = 0$ – имеем уравнение Бернулли.

В общем виде уравнение Рикатти не решается, но можно заменой переменной преобразовать в уравнение Бернулли, если известно одно частное решение $y = y_2(x)$.

Рассмотрим функцию $z = y(x) - y_2(x)$, где $y(x)$ решение уравнения (14.1).

Тогда

$$y = z + y_2 \text{ и } y' = z' + (y_2)'$$

Подставляя в уравнение (14.1) следует:

$$z' + (y_2)' + p(x)(z + y_2) + q(x)(z + y_2)^2 = f(x)$$

или

$$z' + (y_2)' + p(x)z + p(x)y_2 + q(x)z^2 + 2q(x)zy_2 + q(x)(y_2)^2 = f(x)$$

Учитывая, что функция $y_2(x)$ является решением уравнения (14.1), получим

$$z' + (p(x) + 2q(x)y_2)z = -q(x)z^2 \qquad (14.2)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли относительно функции $z(x)$ с $n = 2$.

Пример 14.1. Решим уравнение: $y' - y^2 = -\frac{2}{x^2}$.

Имеем:

$$p(x) = 0,\ q(x) = -1,\ f(x) = \frac{2}{x^2}.$$

Легко проверить, что функция $y_2(x) = \frac{1}{x}$ является решением заданного уравнения.

Действительно,

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (y_2)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

Введем новую функцию:

$$z(x) = y(x) - \frac{1}{x}$$

или

$$y(x) = z(x) + \frac{1}{x}.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$z' - \frac{1}{x^2} - (z + \frac{1}{x})^2 = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow z' - \frac{1}{x^2} - z^2 - 2z \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow z' - \frac{2}{x} \cdot z = z^2.$$

Разделим на z^2:

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} = 1$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли, которое решается с помощью замены:

$$u(x) = \frac{1}{z}.$$

Тогда:

$$\frac{1}{z} = u \Rightarrow z^{-1} = u \Rightarrow (z^{-1})' = u' \Rightarrow -z^{-2}z' = u' \Rightarrow \frac{z'}{z^2} = -u'.$$

Подставляя в уравнение

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z} = 1$$

получим:

$$-u' - \frac{2}{x}u = 1 \Rightarrow u' + \frac{2}{x}u = -1 \Rightarrow u = e^{-\int\frac{2}{x}dx}(C - \int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx) = e^{-2\ln x}(C - \int e^{2\ln x}dx) = \frac{1}{x^2}(C - \frac{x^3}{3}).$$

Таким образом:

$$u = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{3} = \frac{3C - x^3}{3x^2}$$

Т.к.

$$z = \frac{1}{u}$$

то имеем:

$$z = \frac{3x^2}{3C - x^3}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{3x^2}{3C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Ответ. $y = \dfrac{3x^2}{3C - x^3} + \dfrac{1}{x}.$

15. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Определение. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (15.1)$$

Если левая часть дифференциального уравнения (15.1) является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е.

$$dU = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

то уравнение (15.1) называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

В этом случае дифференциальное уравнение (15.1) можно записать в виде:

$$dU(x,y) = 0.$$

Если функция $y = y(x)$ является решением уравнения (15.1), то

$$dU(x, y(x)) = 0$$

и, следовательно, функция

$$U(x, y(x)) = C,$$

где C – постоянная, является общим решением уравнения (15.1).

Пример 15.1. Решим уравнение: $ydx + xdy = 0$.

Уравнение в полных дифференциалах, т.к.

$$ydx + xdy = d(xy).$$

Следовательно, функция $xy=C$ является общим решением заданного уравнения.

Теорема. Для того чтобы левая часть уравнения (15.1) являлась полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $U(x, y)$ такова, что

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

С другой стороны, по определению дифференциала функции двух переменных имеем:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy$$

Следовательно,

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

В силу независимости смешанной производной второго порядка от порядка дифференцирования, имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Достаточность. Пусть $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Покажем, что можно найти функцию $U(x,y)$ такую, что $dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$.

Выберем функцию $U(x,y)$ так, чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$$

т.е.

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ произвольная функция переменной y.

Определим функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y).$$

Имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dx+\varphi'(y)=$$
$$=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y),$$

т.е.

$$\varphi'(y)=N(x_0,y).$$

Следовательно,

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C.$$

Таким образом, получили:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C$$

Теорема доказана.

Пример 15.2. Решим уравнение:

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$$

В этом уравнении

$$M(x,y)=3x^2+6xy^2,$$
$$N(x,y)=6x^2y+4y^3.$$

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy \text{ и } \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$$

то уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=3x^2+6xy^2,\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=6x^2y+4y^3.\end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение полученной системы по переменной x, получим:

$$U(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$$

Для определения функции $\varphi(y)$ воспользуемся вторым уравнением системы. Получим:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3,$$

или

$$\varphi'(y)=4y^3,$$

откуда

$$\varphi(y)=y^4.$$

Следовательно,

$$U(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4.$$

Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

16. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

В некоторых случаях, когда левая часть уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{15.1}$$

не является полным дифференциалом некоторой функции, легко подобрать функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую, левая часть уравнения (15.1) превращается в полный дифференциал:

$$dU = \mu\, Mdx + \mu\, Ndy.$$

Такая функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем. Заметим, что умножение на интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ можем привести к появлению лишних частных решений, обращающих этот множитель в нуль.

В общем случае для нахождения интегрирующего множителя надо подобрать хотя бы одно не равное тождественно нулю решение уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu \cdot M = \frac{\partial}{\partial x}\mu \cdot N,$$

т.к.

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

То имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln \mu \cdot M - \frac{\partial}{\partial x}\ln \mu \cdot N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{16.1}$$

В общем случае решение этого уравнения в частных производных является задачей не более простой, чем решение самого уравнения. Однако в некоторых случаях подбор частного решения уравнения (16.1) не представляет затруднений.

Считая, что интегрирующий множитель является функцией только одного аргумента, например, является функцией только от x или только от y, или только от $x+y$, или только $x^2 + y^2$, можно уже без труда решить уравнение (16.1) и указать условия, при котором интегрирующий множитель существует. Тем самым выделяются классы уравнений, для которых интегрирующий множитель легко может быть найден.

Пример 16.1. Найдем условия, при которых уравнение

$$Mdx + Ndy = 0$$

имеет интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x, т.е. $\mu = \mu(x)$.

Уравнение (16.1) примет вид:

$$-\frac{d}{dx}\ln \mu \cdot N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\ln \mu = \int \frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} dx + \ln C,$$

или

$$\mu(x) = C\exp\left(\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx\right). \qquad (16.2)$$

Можно считать С = 1.

Если $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/ N$ зависит только от переменной x, то интегрирующий множитель, зависящий только от переменной x, существует и равен (16.2), иначе интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x)$ не существует.

Пример 16.2. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Покажем, что у этого уравнения есть интегрирующий множитель, зависящий от переменной x. Итак, имеем:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

или

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0.$$

Здесь $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$ и $N(x, y) = 1$.

Имеем:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = P(x),$$

следовательно, интегрирующий множитель имеет вид:

$$\mu(x) = \exp\int P(x)dx.$$

Умножая на интегрирующий множитель уравнение

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0,$$

получим:

$$\{P(x)y - Q(x)\}\cdot e^{\int P(x)dx}dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Для нахождения функции U(x,y), имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \{P(x)y - Q(x)\}\cdot e^{\int P(x)dx}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^{\int P(x)dx}. \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы имеем:

$$U(x, y) = \int e^{\int P(x)dx}dy = e^{\int P(x)dx}y + \varphi(x).$$

Подставляя полученное значение функции U(x,y) в первое уравнение системы, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{\int P(x)dx}P(x)y + \varphi'(x) = P(x)e^{\int P(x)dx}y - Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

или

$$\varphi'(x) = -Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

или

$$\varphi(x) = -\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Следовательно,

$$U(x,y) = e^{\int P(x)dx}y - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Исходя из вида общего решения

$$U(x,y) = C$$

получаем общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y = e^{-\int P(x)dx}(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx).$$

17. Дифференциальные уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной.

Дифференциальные уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной, имеют вид:

$$F(x,y,y') = 0 \tag{1.2}$$

Пример 17.1.

$$(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0.$$

Разрешая заданное уравнение как квадратное относительно y', получим:

$$y' = x \text{ или } y' = y.$$

Полученные уравнения имеют решения

$$y = \frac{x^2}{2} + C \text{ и } y = Ce^x,$$

которые являются решениями заданного уравнения.

Уравнение (1.2) может быть решено путем разрешения уравнения относительно y' и решения полученных при этом уравнений $y' = f_i(x,y), (i = 1,2...)$, уже разрешенных относительно производной. Однако далеко не всегда уравнение (1.2) легко разрешается относительно y', ещё реже полученные при этом уравнения вида $y' = f_i(x,y), (i = 1,2...)$ легко решаются, поэтому часто приходится интегрировать уравнения вида (1.2) иными методами.

Рассмотрим некоторые случаи.

1. Уравнение (1.2) имеет вид:

$$F(y') = 0, \tag{17.1}$$

причем существует, по крайней мере, один действительный корень $y' = b$ этого уравнения.

Т.к. уравнение (17.1) не содержит x и y, то $b = const$. Следовательно, $y' = b$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$y = bx + C \Rightarrow b = \frac{y - C}{x}.$$

Т.к. b является решением уравнения $F(b) = 0$, получаем

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0,$$

общее решение уравнения (17.1).

Пример 17.2. Решим уравнение:

$$y'^2+3y'+2=0.$$

Из выше сказанного следует, что

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+3\left(\frac{y-C}{x}\right)+2=0$$

общее решение.

2. Уравнение (1.2) имеет вид:

$$F(x,y')=0 \qquad (17.2)$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения, а именно случай, когда уравнение (17.2) можно разрешить относительно *x*, т.е. записать в виде:

$$x=f(y').$$

Введем параметр

$$y'=t.$$

Тогда

$$x=f(t).$$

Следовательно,

$$dy=y'dx=t\cdot f'(t)dt$$

или

$$y=\int t\cdot f'(t)dt.$$

Таким образом, функция

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=\int t\cdot f'(t)dt \end{cases}$$

является решением заданного уравнения.

Пример 17.3. Решим уравнение:

$$x=(y')^3-y'-1.$$

Введем параметр

$$y'=t.$$

Тогда

$$x=t^3-t-1.$$

Следовательно,

$$dy=t\cdot f'(t)dt=t(3t^2-1)dt$$

или

$$y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-C.$$

Таким образом, получили решение заданного уравнения в параметрической форме

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1, \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 - \dfrac{1}{2}t^2 + C. \end{cases}$$

Пример 17.4. Решим уравнение:

$$x\sqrt{1+y'^2} = y'.$$

Введем параметр

$$y' = tgt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$x\sqrt{1+tg^2 t} = tgt \Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = tgt \Rightarrow x = \sin t.$$

Следовательно,

$$dy = y'dx = tgt \cdot \cos tdt = \sin tdt$$

или

$$y = \int \sin tdt = -\cos t + C.$$

Таким образом, получили решение заданного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + C. \end{cases}$$

Из последней системы легко получить

$$x^2 + (y - C)^2 = 1.$$

3. Уравнение (1.2) имеет вид:

$$F(y, y') = 0 \tag{17.3}$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения, а именно случай когда уравнение (17.3) можно разрешить относительно y, т.е. записать в виде:

$$y = f(y').$$

Введем параметр

$$y' = t.$$

Тогда

$$y = f(t).$$

Следовательно,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{f'(t)}{t}dt$$

и

$$x = \int \frac{f'(t)}{t}dt.$$

Пример 17.5. Решим уравнение:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1$$

или

$$y = \sqrt{1+y'^2}.$$

Введем параметр

$$y' = tgt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$y = \sqrt{1 + tg^2 t} = \frac{1}{\cos t}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \left(-\frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\sin t)\right) \cdot \frac{1}{tgt} dt = \frac{1}{\cos t} dt$$

или

$$x = \int \frac{1}{\cos t} dt + C.$$

Таким образом, получили решение заданного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \int \frac{1}{\cos t} dt + C, \\ y = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

4. Рассмотрим общий случай.

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.2}$$

а) Пусть уравнение (1.2) разрешимо относительно *y*, т.е. имеет вид:

$$y = f(x, y') \tag{17.4}$$

Введем параметры

$$x = x; y' = p.$$

Тогда

$$y = f(x, p).$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

или

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx},$$

откуда

$$\varphi(x, p, C) = 0.$$

Таким образом, получили:

$$\begin{cases} \varphi(x, p, C) = 0, \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

б) Пусть уравнение (1.2) разрешимо относительно *y*, т.е. имеет вид:

$$x = f(y, y') \tag{17.5}$$

Введем параметры

$$y = y; y' = p.$$

Тогда

$$x = f(y, p).$$

Следовательно,

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

или

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy},$$

откуда

$$\varphi(y, p, C) = 0.$$

Таким образом, получили:

$$\begin{cases} \varphi(y, p, C) = 0, \\ x = f(y, p). \end{cases}$$

18. Уравнение Лагранжа.

Уравнение Лагранжа является частным случаем уравнения (17.4) и имеет вид:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Введем параметры

$$x = x; y' = p.$$

Тогда

$$y = x\varphi(p) + \psi(p).$$

Далее

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

или

$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx}.$$

Из последнего равенства получаем:

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p)$$

Полученное уравнение является линейным уравнением первого порядка, решение которого имеет вид:

$$\varphi(x, p, C) = 0.$$

Таким образом, получили:

$$\begin{cases} \varphi(x, p, C) = 0, \\ y = x\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Случай, когда $p-\varphi(p)\equiv 0$ представляет собой уравнение Клеро и будет рассмотрен ниже.

Пример 18.1. Решим уравнение:

$$y=2xy'-y'^3.$$

Введем параметры

$$x=x; y'=p.$$

Тогда

$$y=2xp-p^3.$$

Дифференцируя, получим:

$$dy=2pdx+2xdp-3p^2dp$$

или

$$\frac{dy}{dx}=2p+2x\frac{dp}{dx}-3p^2\frac{dp}{dx}$$

или

$$p=2p+(2x-3p^2)\frac{dp}{dx}$$

или

$$-p=(2x-3p^2)\frac{dp}{dx}.$$

Таким образом, получили два уравнение

$$-p\frac{dx}{dp}=2x-3p^2$$

или

$$p=0.$$

Первое уравнение, переписав в виде

$$\frac{dx}{dp}+2\frac{1}{p}\cdot x=3p$$

имеет решение

$$x=e^{\ln\frac{1}{p^2}}(C+\int 3p\cdot e^{\ln p^2}dp)=\frac{1}{p^2}(C+\frac{3}{4}p^4)=\frac{C}{p^2}+\frac{3p^2}{4}.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}+\dfrac{3p^2}{4}, \\ y=2xp-p^3=\dfrac{2C}{p}+\dfrac{p^3}{2}. \end{cases}$$

Из равенства

$$p=0$$

получаем частное решение

$$y=0.$$

19. Уравнение Клеро.

Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа и имеет вид:

$$y = xy' + \psi(y').$$

Введем параметры

$$x = x; y' = p.$$

Тогда

$$y = xp + \psi(p).$$

Далее

$$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$$

или

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

или

$$p = p + (x + \psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

или

$$\frac{dp}{dx}(x + \psi'(p)) = 0,$$

откуда, или

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

или

$$x + \psi'(p) = 0.$$

В первом случае получаем

$$p = C$$

тогда

$$y = xC + \psi(C)$$

– семейство интегральных прямых.

Во втором случае решение определяется уравнениями:

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) = 0. \end{cases}$$

Пример 19.1. Решим уравнение:

$$y = xy' - y'^3.$$

Введем параметры:

$$x = x; y' = p.$$

Тогда

$$y = px - p^3.$$

Далее

$$dy = pdx + xdp - 3p^2dp$$

или

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx}$$

или

$$p = p + (x - 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

или

$$(x - 3p^2)\frac{dp}{dx} = 0,$$

откуда, или

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

или

$$x - 3p^2 = 0.$$

В первом случае получаем

$$p = C$$

тогда

$$y = xC - C^3$$

– семейство интегральных прямых.

Во втором случае решение определяется уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3p^2, \\ y = xp - p^3 = 3p^3 - p^3 = 2p^3; \end{cases}$$

Таким образом, получили:

$$y = xC - C^3$$

или

$$\begin{cases} x = 3p^2, \\ y = 2p^3. \end{cases}$$

Пример 19.2. Решим уравнение:

$$y = xy' - y'^2.$$

Введем параметры

$$x = x; y' = p.$$

Тогда

$$y = px - p^2.$$

Далее

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

или

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

или

$$(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0,$$

откуда

или

$$\frac{dp}{dx}=0$$

или

$$x-2p=0.$$

В первом случае получаем

$$p=C$$

тогда

$$y=xC-C^2$$

− семейство интегральных прямых.

Во втором случае решение определяется уравнениями

$$\begin{cases} x=2p, \\ y=xp-p^2=2p^2-p^2=p^2; \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$y=\frac{x^2}{4}.$$

Таким образом, получили:

$$y=xC-C^2$$

или

$$y=\frac{x^2}{4}.$$

20. Метод последовательных приближений.

Рассмотрим Задачу Коши:

$$y'=f(x,y), \tag{1.3}$$

$$y|_{x=x_0}=y_0. \tag{20.1}$$

Интегрируя уравнение (1.3) получим:

$$\int_{x_0}^{x} y'dx=\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx,$$

или

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx,$$

или, учитывая равенство (20.1),

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx.$$

Последовательные приближения строим следующим образом:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx,$$

$$\ldots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx.$$

$$\ldots .$$

Таким образом, мы получим последовательность функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, …, $y_n(x)$, … .

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда $\exists \lim y_n(x) = y(x)$ при $n \to +\infty$, где функция $y(x)$ такова, что,

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Пример 20.1. Методом последовательных приближений решим задачу

$$y' = y,$$

$$y|_{x=0} = 1.$$

Имеем:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(x, y_0(x))dx = 1 + \int_0^x y_0(x)dx = 1 + \int_0^x dx = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(x, y_1(x))dx = 1 + \int_0^x y_1(x)dx = 1 + \int_0^x (1+x)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x f(x, y_2(x))dx = 1 + \int_0^x y_2(x)dx = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

…,

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

… .

Таким образом, получили

$$\lim_{n\to\infty}(y_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Таким образом, мы получили последовательность приближений, предел которой есть функция $y(x) = e^x$.

21. Метод Эйлера.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x;y)$$

с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0 .$$

Рассмотрим отрезок [a,b]. Пусть a=x_0.

Тогда

$$y'(x_0) = f(x_0;y_0)$$

Рассмотрим прямую, проходящую через точку с координатами $M_0(x_0;y_0)$, с угловым коэффициентом равным $y'(x_0) = f(x_0;y_0)$. Уравнение имеет вид:

$$y - y_0 = f(x_0;y_0)(x - x_0) .$$

Пусть (x_1; y_1) некоторая точка на этой прямой, т.е.

$$y_1 = y_0 + f(x_0;y_0)(x_1 - x_0).$$

Сейчас рассмотрим прямую проходящую через точку с координатами $M_1(x_1;y_1)$ с угловым коэффициентом равным $y'(x_1) = f(x_1;y_1)$. Уравнение имеет вид:

$$y - y_1 = f(x_1;y_1)(x - x_1) .$$

Пусть (x_2; y_2) некоторая точка на этой прямой, т.е.

$$y_2 = y_1 + f(x_1;y_1)(x_2 - x_1).$$

Далее, рассмотрим прямую проходящую через точку с координатами $M_2(x_2;y_2)$ с угловым коэффициентом равным $y'(x_2) = f(x_2;y_2)$. Уравнение имеет вид:

$$y - y_2 = f(x_2;y_2)(x - x_2) .$$

Пусть (x_3; y_3) некоторая точка на этой прямой, т.е.

$$y_3 = y_2 + f(x_2;y_2)(x_3 - x_2) ,$$

и т. д.

Таким образом, мы построим ломанную с вершинами в точках $M_0 = (x_0;y_0)$, $M_1 = (x_1;y_1)$, $M_2 = (x_2;y_2)$, $M_3 = (x_3;y_3)$, $\ldots$.

Ломанную $M_0M_1M_2M_3\ldots$будем называть ломанной Эйлера.

Для построения ломаной Эйлера на отрезке $[a,b]$, отрезок делят на n равных частей.

Тогда $h = \dfrac{b-a}{n}$ − шаг разбиения отрезка $[a,b]$.

Пусть

$$\begin{aligned}
&x_0 = a,\\
&x_1 = x_0 + h = a + h,\\
&x_2 = x_1 + h = a + 2h,\\
&\ldots,\\
&x_n = x_{n-1} + h = a + nh = b
\end{aligned}$$

Построим точки $M_0, M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$. Построенную ломаную Эйлера, обозначим через $y_n(x)$.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$, где $y(x)$ − решение заданного уравнения с заданным начальным условием.

Пример 21.1. Методом Эйлера решим задачу:

$$y' = 1,$$
$$y|_{x=0} = 0, \ x \in [0,1] = [a,b].$$

Пусть $n = 10$. Имеем $f(x,y) = 1, x_0 = 0, y_0 = 0, h = \frac{1}{10}$. Тогда:

$$x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = \frac{2}{10}, \ldots, x_9 = \frac{9}{10}, x_{10} = 1.$$

Следовательно,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10},$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{2}{10},$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10},$$
$$\ldots$$
$$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot 1 = 1.$$

Легко заметить, что полученная ломаная представляет собой отрезок прямой y=x.

22. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим уравнение

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Пусть функции $a_0(x), a_1(x), f(x)$ можно разложить в степенной ряд в окрестности точки x_0. Тогда решение уравнения можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Пример 22.1. Методом неопределенных коэффициентов решим задачу

$$y' + 2y = 2 - 3x,$$
$$y(0) = 0.$$

Решение задачи будем искать в виде степенного ряда

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Из начального условия $y(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$.

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)C_{n+1} x^n$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)C_{n+1} + 2C_n)x^n = 2 - 3x = 2x^0 - 3x^1 + 0x^2 + \ldots + 0x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$n=0; C_1+2C_0=2 \Rightarrow C_1=2,$$
$$n=1; 2C_2+2C_1=-3 \Rightarrow C_2=-\frac{7}{2},$$
$$n=2; 3C_3+2C_2=0 \Rightarrow C_3=-\frac{2}{3}C_2,$$
$$n=3; 4C_4+2C_3=0 \Rightarrow C_4=-\frac{2}{4}C_3,$$
$$\ldots,$$
$$nC_n+2C_{n-1}=0 \Rightarrow C_n=-\frac{2}{n}C_{n-1}$$

т.е. при

$$n\ge 3 \Rightarrow C_n=-\frac{2}{n}C_{n-1}.$$

Итак:

$$C_n=-\frac{2}{n}C_{n-1}=\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(-\frac{2}{n-1}\right)C_{n-2}=\ldots=\left(-\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)C_2=\frac{(-1)^{n-2}2^{n-2}}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3}C_2=$$
$$=\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{n!}\cdot C_2=\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\frac{C_2}{2}=\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\left(-\frac{7}{4}\right),$$

при n≥3.

Таким образом, имеем:

$$y(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\frac{C_2}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}x^n=0+2x-\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{4}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!}=2x-\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{4}(1-2x+\frac{4x^2}{2}+$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!})+\frac{7}{4}-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}x^2=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}e^{-2x}$$

Легко проверить, что тот же результат получим, если применим формулу для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Действительно, имеем:

$$y=e^{-2x}(C+\int(2-3x)e^{2x}dx)=e^{-2x}(C+e^{2x}-\frac{3}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}e^{2x})=Ce^{-2x}+\frac{7}{4}-\frac{3}{2}x$$

Т.к. при $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow C=-\frac{7}{4}$, то

$$y=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}e^{-2x}$$

Дифференциальные уравнения n-го порядка.

23. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Теорема существования и единственности решения. Задача Коши. Понятие общего решения.

Определение. Дифференциальным уравнением n – го порядка называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0, \qquad (1.1)$$

где $y=y(x), y'=y'(x),\ldots,y^{(n)}=y^{(n)}(x)$.

Рассмотрим уравнение (1), разрешенное относительно $y^{(n)}$,т.е. уравнение вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{23.1}$$

где *f* – это функция (n+1)-го переменного.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in R^{m+1}$.

Теорема (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка).

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{23.1}$$

где $y = y(x), y' = y'(x), \ldots, y^{(n)} = y^{(n)}(x)$.

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in R^{m+1}$, а функция f непрерывна в некоторой окрестности точки M_0. Пусть $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \in C\{O(M_0)\}$.

Тогда существует решение уравнения (23.1) $y = y(x)$ такое, что

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

и такое решение единственно.

Задача Коши.

Найти решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{23.1}$$

$y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \tag{23.2}$$

Определение (общего решения дифференциального уравнения n-го порядка).

Функцию $\varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ будем называть общим решением уравнения (23.1), если:

1) при каждом фиксированном $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция

$$\varphi = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

есть решение уравнения (23.1).

2) $\forall x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ $\exists C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$ такие, что:

$$\varphi(x_0, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}) = y_0,$$
$$\varphi'(x_0, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}) = y_0',$$
$$\ldots$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}) = y^{(n-1)}.$$

Определение. Решение $\varphi = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0})$ будем называть частным решением.

Замечание. Общее решение – общий интеграл, а частное решение – частный интеграл. График решения − интегральная кривая.

Пример 23.1. Рассмотрим уравнение

$$y''' = 0.$$

Функция $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ является общим решением заданного уравнения.

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_0 = 0, y_0 = 1, y_0' = 1, y_0'' = 1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = 1;\\
&y' = C_2 + 2C_3 x,\\
&x_0 = 0 \Rightarrow C_2 + 2C_3 \cdot 0 = 1;\\
&y'' = 2C_3,\\
&x_0 = 0 \Rightarrow 2C_3 = 1;\\
&C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Следовательно, функция $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ − частное решение.

24. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{24.1}$$

Для заданного уравнения легко можно найти общее решение, последовательно понижая порядок уравнения на единицу. Имеем:

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} = f(x),\\
&y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,\\
&y^{(n-2)} = \int\left\{\int f(x)dx\right\}dx + C_1 x + C_2,\\
&y^{(n-3)} = \int\left\{\int\left\{\int f(x)dx\right\}dx\right\}dx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,\\
&\ldots\\
&y = \int\left\{\int\ldots\left\{\int f(x)dx\right\}\ldots dx\right\}dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.
\end{aligned}$$

Пример 24.1. Решим уравнение:

$$y''' = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&y'' = \int 0dx + C_1 = C_1;\\
&y' = \int C_1 dx + C_2 = C_1 x + C_2;\\
&y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.
\end{aligned}$$

2. Рассмотрим уравнение вида

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{24.2}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y^{(k)} = z.$$

Тогда

$$y^{(k+1)} = z',$$
$$\ldots$$
$$y^{(n)} = z^{(n-k)},$$

и уравнение примет вид

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

порядок, которого ниже порядка заданного уравнения.

Пример. 24.2. Решим уравнение:

$$(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0.$$

Введем новую функцию

$$y' = z.$$

Тогда

$$y'' = z'$$

и уравнение примет вид

$$(1+x^2)z' + z^2 + 1 = 0.$$

Полученное уравнение решается методом разделения переменных. Итак, имеем

$$\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow arctg(z) + arctg(x) = arctgC_1 \Rightarrow z = \frac{C_1 - x}{1+C_1 x}.$$

Таким образом, получили

$$y' = \frac{C_1 - x}{1+C_1 x}.$$

Отсюда

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1+C_1 x}dx = \int \frac{C_1}{1+C_1 x}dx - \int \frac{x}{1+C_1 x}dx = \int \frac{C_1}{1+C_1 x}dx + \int \frac{1}{C_1(1+C_1 x)}dx - \int \frac{1}{C_1}dx = \left(1+\frac{1}{C_1^2}\right)\ln(1+C_1 x)$$
$$-\frac{1}{C_1}x + C_2.$$

3. Рассмотрим уравнение вида

$$f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Рассмотрим частный случай такого уравнения, а именно уравнение

$$f(y, y', y'') = 0.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y' = p.$$

Тогда

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}(p)\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

и уравнение примет вид

$$f(y, p, p') = 0,$$

где $p' = \dfrac{dp}{dy}$.

Пример 24.3. Решим уравнение:

$$yy'' + y'^2 = 1.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y' = p.$$

Тогда

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}(p)\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

и уравнение примет вид

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 1.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{pdp}{1-p^2} = \frac{dy}{y} \text{ или } 1-p^2 = 0.$$

Итак:

$$\frac{pdp}{1-p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(1-p^2) = \ln y + C_1 \Rightarrow \ln(1-p^2) = \ln\frac{C_1}{y^2} \Rightarrow 1-p^2 = \frac{C_1}{y^2} \Rightarrow p^2 = 1-\frac{C_1}{y^2}$$

Таким образом, $y^2 = \frac{y^2 - C_1}{y^2}$ или $y' = \pm\sqrt{\frac{y^2-C_1}{y^2}}, \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y^2-C_1}{y^2}}$.

Интегрируя полученные уравнения, получаем

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{y^2-C_1}} = dx \Rightarrow \pm\sqrt{y^2-C_1} = x + C_2.$$

С другой стороны из равенства $1-p^2=0$ имеем $y' = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x + C.$

Таким образом, получили решения заданного уравнения

$$\pm\sqrt{y^2-C_1} = x + C_2 \text{ и } y = \pm x + C.$$

Пример 24.4. Решим уравнение:

$$y'^2 + 2yy' = 0.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y' = p.$$

Тогда

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}(p)\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

и уравнение примет вид

$$p^2 + 2py\frac{dp}{dy} = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$p + 2y\frac{dp}{dy} = 0 \text{ или } p = 0.$$

Итак:

$$\frac{2dp}{-p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow -2\ln p=\ln y+C\Rightarrow \ln\frac{1}{p^2}=\ln Cy\Rightarrow \frac{1}{p^2}=Cy\Rightarrow\ p=\pm\sqrt{\frac{1}{Cy}}.$$

Таким образом, получили:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{1}{Cy}}\Rightarrow \sqrt{Cy}dy=\pm dx\Rightarrow \frac{2}{3}(Cy)^{3/2}=\pm x+C_2$$

С другой стороны из равенства $p=0$ имеем $y'=0\Rightarrow y=C.$

Таким образом, получили решения заданного уравнения

$$\frac{2}{3}(Cy)^{3/2}=\pm x+C_2 \text{ и } y=C.$$

25. Линейная зависимость и независимость функций.

Определение. Пусть функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ определены на отрезке [a,b]. Скажем, что функции линейно зависимы на отрезке [a,b], если существуют постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – не все равные нулю, такие, что выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0, \forall x\in[a,b] \qquad (25.1)$$

Если равенство (7) выполняется только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются линейно независимыми на отрезке [a, b].

Замечание. Выражение $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)$ будем называть линейной комбинацией функций $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$.

Пример 25.1. Функции $1, x, x^2,\ldots, x^n$ линейно независимы на отрезке [a,b]$\subset R$.

Действительно, пусть функции линейно зависимы. Это значит, что $\exists \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – не все равные нулю такие, что выполняется равенство

$$\alpha_0 1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n\equiv 0, \forall x\in[a,b].$$

Последнее равенство противоречит основной теореме алгебры. Следовательно, функции линейно независимы.

Пример 25.2. Функции $e^{k_1x}, e^{k_2x},\ldots, e^{k_nx}, k_i\neq k_j, i, j=1,2,\ldots,n$ линейно независимы на любом отрезке [a,b].

Действительно, пусть функции линейно зависимые. Тогда $\exists \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – не все равные нулю, такие, что имеет место равенство

$$\alpha_0 e^{k_1x}+\alpha_1 e^{k_2x}+\ldots+\alpha_n e^{k_nx}\equiv 0, \forall x\in[a,b].$$

Пусть $\alpha_n\neq 0$. Разделив последнее равенство на e^{k_1x}, получим:

$$\alpha_1+\alpha_2 e^{(k_2-k_1)x}+\alpha_3 e^{(k_3-k_1)x}+\ldots+\alpha_n e^{(k_n-k_1)x}=0.$$

Продифференцировав полученное равенство, получим:

$$\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\alpha_3(k_3-k_1)e^{(k_3-k_1)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}=0, \forall x\in[a,b].$$

Разделив полученное равенство на $e^{(k_2-k_1)x}$, получим:

$$\alpha_2(k_2-k_1)+\alpha_3(k_3-k_1)e^{(k_3-k_2)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_2)x}=0, \forall x\in[a,b].$$

После дифференцирования последнего равенства, получим:

$$\alpha_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_3-k_2)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)e^{(k_n-k_2)x}=0, \forall x\in[a,b].$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)\dots(k_n - k_{n-1})e^{(k_n - k_{n-1})x} = 0, \forall x \in [a,b]$$

Т.к.

$$k_n - k_1 \neq 0, k_n - k_2 \neq 0, \dots, k_n - k_{n-1} \neq 0, e^{(k_n - k_{n-1})x} \neq 0, \forall x \in [a,b]$$

то из последнего равенства следует, что

$$\alpha_n = 0,$$

что противоречит предположению $\alpha_n \neq 0$. Следовательно, функции линейно независимые.

26. Определитель Вронского.

Определение. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ определены на отрезке [a,b]. Определителем Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Пример 26.1. Пусть заданы функции $y_1(x) \equiv 1, y_2(x) = x, x \in [a,b]$. Тогда

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \forall x \in [a,b].$$

Пример 26.2. Пусть заданы функции $y_1(x) \equiv 1, y_2(x) \equiv x, y_3(x) \equiv x^2, x \in [a,b]$. Тогда

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \forall x \in [a,b].$$

Пример 26.3. Пусть заданы функции $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, x \in [a,b] = [-1;1]$. Тогда

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2.$$

Заметим, что $W(x) = 0$ при $x = 0$.

Теорема. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке [a,b]. Тогда их определитель Вронского тождественно равен нулю на отрезке [a,b], т.е $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0 \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. Т.к. функции линейно зависимы, то $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ − не все равные нулю такие, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \forall x \in [a,b].$$

Пусть $\alpha_n \neq 0$. Тогда

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x).$$

Следовательно,

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}\right) \\ y_1' & y_2' & \dots & \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}'\right) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)}\right) \end{vmatrix}=0,$$

т.к. последний столбец есть линейная комбинация предыдущих.

Теорема доказана.

27. Линейные дифференциальные уравнения n – го порядка. Теорема существования и единственности решения.

Определение. Уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=f(x), \qquad (27.1)$$

где $y = y(x)$, будем называть линейным дифференциальным уравнением n–го порядка.

Определение. Уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0, \qquad (27.2)$$

будем называть однородным линейным дифференциальным уравнением n–го порядка.

Будем предполагать, что $a_0(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$. Тогда уравнение (27.2) можно переписать в виде

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0 \qquad (27.3)$$

Теорема (существования и единственности решения линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка).

Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение n–го порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0 \qquad (27.3)$$

Пусть функции $a_1(x),a_2(x),\dots,a_n(x)$ непрерывны на отрезке [a,b].

Тогда $\forall x_0\in[a,b]$ и $\forall y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$ $\exists$ решение уравнения $y = y(x)$ такое, что:

$$\begin{aligned} y(x_0)&=y_0 \\ y'(x_0)&=y_0' \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)&=y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (27.4)$$

и такое решение единственно.

Условия (27.4) будем называть начальными условиями.

Замечание. Функция $y(x)\equiv 0$ является решением однородного линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющая нулевым начальным условиям.

28. Однородные линейные дифференциальные уравнения n – го порядка. Свойства.

Обозначения: $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y$

Свойства:

1. $L[Cy] = CL[y]$

Следствие. Если $L[y] = 0 \Rightarrow L[Cy] = 0$

2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Следствие. Если $L[y_1] = 0, L[y_2] = 0 \Rightarrow L[y_1 + y_2] = 0$

3. $L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i]$

Следствие. Пусть $L[y_i] = 0, i = 1,2,...,n.$ Тогда $L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right] = 0.$

4. Пусть $L[U(x) + iV(x)] = 0$, где $U(x)$ и $V(x)$ действительные функции переменной *x*.

Тогда $L[U(x)] = 0$ и $L[V(x)] = 0$.

Действительно,

$$L[U + iV] = L[U] + iL[V] = 0 \Rightarrow L[U] = 0 \text{ и } L[V] = 0.$$

5.Теорема. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются линейно независимыми решениями однородного линейного дифференциального уравнения n–го порядка на отрезке [a,b]. Тогда определитель Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка [a,b].

Доказательство. Пусть определитель Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ равен нулю в некоторой точке x_0, т.е.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (28.1)$$

т.е. однородную систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Определитель этой системы является определителем Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ в точке x_0, т.е. определитель

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) = 0 .$$

Следовательно, рассмотренная система имеет ненулевое решение, т.е. $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равные нулю, являющиеся решением системы (28.1).

Рассмотрим функцию

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) .$$

С одной стороны, функция $y(x)$ решение уравнения (27.3), а с другой стороны функция $y(x)$ удовлетворяет в силу системы (28.1) нулевым начальным условиям и следовательно в силу теоремы единственности функция $y(x) \equiv 0$ на отрезке [a,b] т.е.

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0, \forall x \in [a,b] .$$

Т.к. не все $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю, то последнее равенство означает, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

29. Структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения n–го порядка.

Теорема. Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение n–го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0 \qquad (27.3)$$

Пусть функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) \in C[a,b]$.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ − линейно независимые решения уравнения (27.3). Тогда функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \qquad (29.1)$$

является общим решением уравнения (27.3), т.е. $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\forall y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in R^n$ $\exists C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$ такие, что функция $y(x) = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + \ldots + C_{n0} y_n(x)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', \ldots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} .$$

Доказательство. Т.к. функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно независимые решения уравнения (27.3), то их линейная комбинация тоже решение уравнения (27.3), т.е. функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

решение уравнения (27.3).

Осталось доказать, что $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\forall y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in R^n$ $\exists C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$, постоянные, такие, что функция $y(x) = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + \ldots + C_{n0} y_n(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} C_{10}y_1(x_0)+C_{20}y_2(x_0)+\ldots+C_{n0}y_n(x_0)=y_0 \\ C_{10}y_1'(x_0)+C_{20}y_2'(x_0)+\ldots+C_{n0}y_n'(x_0)=y_0' \\ \ldots \\ C_{10}y_1^{(n-1)}(x_0)+C_{20}y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_{n0}y_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (29.2)$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

является определителем Вронского для линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (27.3). Т.к. определитель Вронского нигде не равен нулю, то система (29.2) имеет единственное решение $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$.

Теорема доказана.

Определение. Линейно независимые решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ будем называть фундаментальной системой решений уравнения (27.3).

Следствие. У уравнения (27.3) максимальное число линейно независимых решений равно n.

Теорема. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n–го порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0, \qquad (27.3)$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) \in C[a,b]$.

Пусть

$$y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)y=0\ , \qquad (29.3)$$

линейное дифференциальное уравнение n–го порядка, где $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x) \in C[a,b]$.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнений (27.3) и (29.3).

Тогда $a_1(x) \equiv b_1(x), a_2(x) \equiv b_2(x), \ldots, a_n(x) \equiv b_n(x) \forall x \in [a,b]$

Доказательство. Вычтем из уравнения (27.3) уравнение (29.3). Получим:

$$(a_1(x)-b_1(x))y^{(n-1)}+(a_2(x)-b_2(x))y^{(n-2)}+\ldots+(a_n(x)-b_n(x))y=0 \qquad (29.4)$$

Т.к. функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнений (27.3) и (29.3) то они являются линейно независимыми решениями и уравнения (29.4).

Пусть $\exists x_0 : a_1(x_0) \neq b_1(x_0)$, т.е. $a_1(x_0)-b_1(x_0) \neq 0$. Так как функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны, то существует окрестность точки x_0 – $O(x_0)$ такая, что $a_1(x)-b_1(x) \neq 0 \forall x \in O(x_0)$.

Следовательно, уравнение (29.4) порядка n–1 имеет n линейно независимых решений, что противоречит следствию. Следовательно,

$$a_1(x) \equiv b_1(x), a_2(x) \equiv b_2(x), \ldots, a_n(x) \equiv b_n(x).$$

Теорема доказана.

30. Формула Лиювилля – Остроградского.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (27.3)$$

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ − фундаментальная система решений. Пусть $y(x)$ произвольное решение уравнения (27.3). Тогда функции $y(x), y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ − линейно зависимы. Это значит, что определитель Вронского этих функций

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \ldots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (30.1)$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0 \forall x \in [a,b]\,,$$

Т.к.

$$y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & + \ldots \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

то последнее равенство можно записать в виде:

$$y^{(n)} - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} y^{(n-1)} + \ldots = 0$$

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями уравнений (27.3) то согласно предыдущей теореме следует, что

$$-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} = a_1(x) \qquad (30.2)$$

Т.к.

$$W'[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

то равенство (30.2) принимает вид

$$-\frac{W'}{W} = a_1(x)$$

или

$$\frac{dW}{W} = -a_1(x)dx.$$

Интегрируя полученное уравнение, получим

$$\ln W = -\int a_1(x)dx + C$$

или

$$W = W(x_0)e^{-\int a_1(x)dx}.$$

Полученное равенство называется формулой Лиювилля – Остроградского.

Замечание. Если дана фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения n–го порядка, то равенство (30.1) дает возможность восстановить это уравнение.

Пример 30.1. Пусть $n = 2, y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^x$. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & y \\ -e^{-x} & e^x & y' \\ e^{-x} & e^x & y'' \end{vmatrix} = y'' \cdot 2 - y' \cdot 0 + y \cdot (-2) = 0,$$

или

$$y'' - y = 0$$

уравнение, для которого функции $y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^x$ образуют фундаментальную систему.

С помощью формулы Лиювилля – Остроградского можно понизить порядок дифференциального уравнения, если известно его решение.

Пример 30.2. Пусть задано уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Пусть известно, что функция $y = y_1(x)$ решение заданного уравнения.

Тогда, если функция $y = y(x)$ − решение заданного уравнения, то

$$W = C_2 e^{-\int a_1(x)dx}.$$

Т.к.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = y_1 y' - y_1' y,$$

то

$$y_1 y' - y_1' y = C_2 e^{-\int a_1(x)dx},$$

или

$$\frac{y_1y'-y_1'y}{y_1^2}=\frac{C_2}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}\Rightarrow\left(\frac{y}{y_1}\right)'=C_2\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\Rightarrow\frac{y}{y_1}=C_1+C_2\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

откуда получаем, что

$$y=C_1y_1+C_2\left(\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}dx\right)\cdot y_1$$

общее решение заданного уравнения.

Пример 30.3. Пусть задано уравнение

$$y''-3y'+2y=0.$$

Легко проверить, что функция $y_1(x)=e^x$ является решением заданного уравнения.

Пусть функция $y=y(x)$ решение заданного уравнения. Тогда, т.к.

$$W(x)=\begin{vmatrix}e^x & y\\ e^x & y'\end{vmatrix}=e^xy'-e^xy,$$

то, согласно формуле Лиювилля – Остроградского

$$e^xy'-e^xy=C_2e^{-\int -3dx}$$

или

$$\frac{e^xy'-e^xy}{e^{2x}}=C_2\frac{e^{3x}}{e^{2x}}\Rightarrow\left(\frac{y}{e^x}\right)'=C_2e^x\Rightarrow\frac{y}{e^x}=C_1+C_2\int e^xdx=C_1+C_2e^x.$$

Таким образом, получили общее решение заданного уравнения

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Пример 30.4. Пусть задано уравнение

$$y''+y=0.$$

Легко проверить, что функция $y_1(x)=\cos x$ является решением заданного уравнения.

Пусть функция $y=y(x)$ решение заданного уравнения. Тогда, т.к.

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos x & y\\ -\sin x & y'\end{vmatrix}=y'\cos x+y\sin x,$$

то, согласно формуле Лиювилля – Остроградского

$$\frac{y'\cos x-y(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{C_2}{\cos^2 x}$$

или

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)'=\frac{C_2}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{y}{\cos x}=C_1+C_2tgx\Rightarrow y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Таким образом, получили общее решение заданного уравнения

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

31. Линейные однородные уравнения n – го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородное линейное уравнение n–го порядка:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0\,, \qquad (27.3)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n - const$

Будем искать решение уравнения (27.3) в виде:

$$y = e^{kx}.$$

Тогда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{(n-1)} e^{kx}, y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Подставляя функцию $y = e^{kx}$ и ее производные в уравнение (27.3), получим:

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + a_2 k^{n-2} e^{kx} + \ldots + a_n e^{kx} = 0\,.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$ для любого значения *x*, то, сокращая последнее равенство на e^{kx}, получим:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (31.1)$$

Уравнение (31.1) будем называть характеристическим уравнением уравнения (27.3). Корни характеристического уравнения будем называть характеристическими числами уравнения (27.3).

При решении характеристического уравнения (31.1) возможны случаи:

1. Все корни характеристического уравнения действительны и различны.
2. Среди действительных корней характеристического уравнения некоторые корни кратные.
3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1. Все корни характеристического уравнения действительны и различны.

Имеем, что корни

$$k_1, k_2, \ldots, k_n \in R, k_i \neq k_j, i \neq j = 1,2,\ldots n\,.$$

Тогда функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (27.3). Следовательно, согласно теореме о структуре решения однородного линейного дифференциального уравнения, имеем, что функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

где $C_{1,} C_2, \ldots, C_n$ произвольные постоянные, общее решение уравнения (27.3).

Пример 31.1. Решим уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0\,.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^2 - 3k + 2 = 0\,,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = 1, k_2 = 2\,.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Пример 31.2. Решим уравнение

$$y''' - y' = 0\,.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^3 - k = 0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = -1, k = 0, k = 1.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^x$$

2. Среди действительных корней характеристического уравнения некоторые корни кратные.

Пусть корень k_i имеет кратность α_i.

Если k_i=0, то характеристическое уравнение можно записать в виде:

$$k^{\alpha_i}(k^{n-\alpha_i} + a_1 k^{n-1-\alpha_i} + \ldots + a_{n-\alpha_i}) = 0$$

т.е. уравнение (27.3) имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-\alpha_i} y^{\alpha_i} = 0$$

Легко проверить, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i - 1}$ являются решениями этого уравнения.

Следовательно, при корне k_i=0 с кратностью α_i имеем, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i - 1}$решения уравнения (27.3).

Пример 31.3. Решим уравнение

$$y^{IV} - y'' = 0$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^4 - k^2 = 0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = -1, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 1$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x + C_4 e^x$$

В случае, когда $k_i \neq 0$ − то с помощью замены

$$y = e^{k_i x} z$$

приходим только что рассмотренному случаю.

Пример 31.4. Решим уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

или

$$(k-1)^3 = 0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1.$$

Введем новую функцию z с помощью подстановки

$$y = e^x z.$$

Тогда

$$y' = e^x z + e^x z' = e^x (z + z'),$$
$$y'' = e^x (z + 2z' + z''),$$
$$y''' = e^x (z + 3z' + 3z'' + z''').$$

Подставляя в уравнение, получим

$$e^x (z + 3z' + 3z'' + z''' - 3z - 6z' - 3z'' + 3z + 3z' - z) = 0$$

или

$$z''' = 0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$l^3 = 0$$

корни которого соответственно равны

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.$$

Следовательно, функции

$$z_1 = 1, z_2 = x, z_3 = x^2$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$z''' = 0.$$

Тогда функции

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

и общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x,$$

Таким образом, если k_i является корнем характеристического уравнения кратности α_i, то функции

$$e^{k_i x}, xe^{k_i x}, \ldots, x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (27.3).

Пример 31.5. Решим уравнение

$$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = 0$$

или

$$k(k-1)^3=0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1=0, k_2=k_3=k_4=1.$$

Следовательно, функция

$$y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x+C_4x^2e^x$$

является решением заданного уравнения.

3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни.

Так как корни - коэффициенты характеристического уравнения предполагаются действительными, то комплексные корни характеристического уравнения могут появиться только сопряженными парами. Т.е. если $k=\alpha+i\beta$ - корень характеристического уравнения, то $\bar{k}=\alpha-i\beta$ - тоже корень характеристического уравнения.

Паре комплексных корней $k=\alpha+i\beta$ и $\bar{k}=\alpha-i\beta$ соответствуют комплексные решения

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

и

$$e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таким образом, паре комплексных сопряженных корням соответствуют два действительные решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые являются линейно независимыми решениями уравнения (27.3).

Если комплексные корни $k=\alpha+i\beta$ и $\bar{k}=\alpha-i\beta$ характеристического уравнения кратные, кратности m, то функции

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

образуют систему линейно независимых решений из 2 m-решений.

Пример 31.6. Решим уравнение

$$y''+y=0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^2+1=0$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = -i, k_2 = i.$$

т.к. α=0 и β=1

Следовательно, функция

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

является решением заданного уравнения.

Пример 31.7. Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 8 = 0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^2 - 4k + 8 = 0,$$

корни которого соответственно равны

$$k = 2 \pm 2i\,.$$

т.к. α=2 и β=2

Следовательно, функция

$$y = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$$

является решением заданного уравнения.

32. Неоднородные линейные уравнения n – го порядка.

Метод вариации произвольного постоянного.

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (32.1)$$

$x \in [a;b]$.

Уравнение (32.1) будем называть неоднородным линейным уравнением n – го порядка.

Здесь $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x),\ f(x)$ функции определенные на отрезке $[a,b]$.

Введем обозначение:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y\,.$$

Теорема 1. Пусть $L[y_0]=0$ и $L[y^*]=f(x)$. Тогда $L[y_0+y^*]=f(x)$.

Теорема 2. Пусть $L[y_1]=f_1(x), L[y_2]=f_2(x).$ Тогда $L[y_1+y_2]=f_1(x)+f_2(x)$.

Теорема 3. Пусть $L[u]=U, L[v]=V.$ Тогда $L[u+v]=U+V$.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения n-го порядка).

Пусть дано неоднородное линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x). \tag{32.1}$$

Пусть функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) \in C[a,b]$.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) -$ линейно независимые решения однородного уравнения L[*y*]=0, а функция $y^*(x)$ некоторое частное решение уравнения L[*y*] = *f*(*x*). Тогда общее решение уравнения (27.3) имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)+y^*(x).$$

Эта теорема доказывается аналогично теоремы о структуре общего решения однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Для нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения n-го порядка используют метод вариации произвольного постоянного.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x). \tag{32.1}$$

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ − линейно независимые решения однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0. \tag{27.3}$$

Тогда функция

$$y(x)=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$$

− общее решение уравнения (27.3)

Решение уравнения (32.1) будем искать в виде

$$y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i$$

Тогда

$$y'(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i'.$$

Потребуем, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i=0,$$

тогда

$$y'(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i'$$

Далее

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i''.$$

Потребуем, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i'=0,$$

тогда

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i''.$$

Продолжая вычислять производные функции $y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i$ до порядка n−1 включительно, и требуя каждый раз обращения в нуль суммы $\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(k)}$:

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i^{(k)}=0\ (k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-2),$$

получим

$$\begin{cases} y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i, \\ y'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i', \\ y''(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'', \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}, \\ y^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y^{(n-1)} + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y^{(n)}. \end{cases}$$

Подставляя значения $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)$ в уравнение (32.1), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)} + a_1(x) \sum C_i(x) y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i = f(x)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Таким образом, для определения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$,…, $C_n(x)$, получили систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0, \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Т.к. определитель полученной системы является определителем Вронского для n линейно независимых решений однородного линейного уравнения n – го порядка, то система разрешима относительно $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$. Интегрируя полученные значения производных, находим:

$$\begin{aligned} &C_1(x) = \varphi_1(x) + C_1, \\ &C_2(x) = \varphi_2(x) + C_2, \\ &\ldots \\ &C_n(x) = \varphi_n(x) + C_n, \end{aligned}$$

или после подстановки

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)y_i(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x)=y^*+y_0 .$$

Пример 32.1. Решим уравнение

$$y''+y=\cos x .$$

Линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения имеют вид:

$$y_1(x)=\cos x,\, y_2(x)=\sin x .$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x .$$

Тогда

$$y'(x)=C_1'\cos x+C_2'\sin x-C_1\sin x+C_2\cos x.$$

Требуем, чтобы

$$C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 .$$

Тогда

$$y'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x .$$

Следовательно

$$y''(x)=-C_1'\sin x+C_2'\cos x-C_1\cos x-C_2\sin x.$$

Подставляя в уравнении, получим

$$-C_1'\sin x+C_2'\cos x-C_1\cos x-C_2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x=\cos x,$$

или

$$-C_1'\sin x+C_2'\cos x=\cos x .$$

Таким образом, относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$ имеем систему:

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0, \\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\cos x. \end{cases}$$

Из системы получаем

$$\begin{aligned} C_2' &=\cos^2 x, \\ C_1' &=-\sin x\cos x, \end{aligned}$$

или интегрируя полученные уравнения

$$C_1(x) = C_1 + \frac{\cos^2 x}{2} = C_1 + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4},$$
$$C_2(x) = C_2 + \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}.$$

Таким образом, решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x \cos x + \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x \sin x.$$

33. Линейные неоднородные уравнения n – го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейные неоднородные уравнения n – го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \qquad (32.1)$$

Пример 33.1. Решим уравнение

$$y''' - y' = x.$$

Имеем

$$y_{общ} = y_{одн} + y_{част}.$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y''' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^3 - k = 0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = -1, k_2 = 0, k_3 = 1.$$

Следовательно, функция

$$y_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^x$$

является решением однородного уравнения.

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) + C_3(x) e^x.$$

Тогда

$$y' = C_1'e^{-x} + C_2' + C_3'e^{x} - C_1e^{-x} + C_3e^{x}.$$

Потребуем, чтобы

$$C_1'e^{-x} + C_2' + C_3'e^{x} = 0$$

Тогда

$$y' = -C_1e^{-x} + C_3e^{x}.$$

Следовательно

$$y'' = -C_1'e^{-x} + C_3'e^{x} + C_1e^{-x} + C_3e^{x}$$

Потребуем, чтобы

$$-C_1'e^{-x} + C_3'e^{x} = 0.$$

Тогда

$$y'' = C_1e^{-x} + C_3e^{x}$$

Далее

$$y''' = C_1'e^{-x} + C_3'e^{x} - C_1e^{-x} + C_3e^{x} = x + y'$$

Таким образом, относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и $C_3(x)$ имеем систему:

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2' + C_3'e^{x} = 0 \\ -C_1'e^{-x} + C_3'e^{x} = 0 \\ C_1'e^{-x} + C_3'e^{x} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3' = \dfrac{1}{2}xe^{-x} \\ C_1' = \dfrac{1}{2}xe^{x} \\ C_2' = -x \end{cases}$$

Интегрируя полученные уравнения, получим

$$C_1(x) = \frac{1}{2}xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x} + C_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$C_3(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} + C_3.$$

Подставляя полученные значения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и $C_3(x)$ в выражении для функции $y(x)$

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x) + C_3(x)e^{x}$$

получим

$$y=\left(\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}e^x+C_1\right)e^{-x}+\left(-\frac{x^2}{2}+C_2\right)+\left(-\frac{1}{2}xe^{-x}+C_3+\frac{1}{2}e^{-x}\right)e^x=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+C_1e^{-x}-\frac{x^2}{2}+C_2-\frac{1}{2}x+C_3e^x+\frac{1}{2}=C_1e^{-x}+C_2+C_3e^x-\frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, получили:

$$y_{одн}=C_1e^{-x}+C_2+C_3e^x,$$

$$y_{час}=-\frac{x^2}{2}.$$

При решении линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях без труда удается подобрать частные решения и тем самым свести задачу к решению соответствующих однородных уравнений.

1. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=P_m(x), \tag{33.1}$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m, т.е.

$$P_m(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m.$$

Замечание. $P_m(x)=e^{0\cdot x}\cdot P_m(x)$

Пусть k = 0 является корнем характеристического уравнения кратности α. Тогда существует многочлен $Q_m(x)$, такой, что функция

$$y_{час}=x^{\alpha}Q_m(x),$$

является частным решением уравнения (33.1), где $Q_m(x)$ − многочлен степени m.

Пример 33.2. Решим уравнение

$$y'''-y'=x.$$

Имеем

$$y_{общ}=y_{одн}+y_{част}.$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y'''-y'=0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^3-k=0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1=-1, k_2=0, k_3=1.$$

Следовательно, функция

$$y_{одн}=C_1e^{-x}+C_2+C_3e^x$$

является решением однородного уравнения.

Частное решение заданного уравнения будем искать в виде

$$y_{час}=x(ax+b)=ax^2+bx.$$

Тогда

$$y'_{час}=2ax+b,\ y''_{час}=2a \text{ и } y'''_{час}=0.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$0-(2ax+b)=x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$\begin{cases} -2a = 1, \\ b = 0, \end{cases}$$

или $a = -\dfrac{1}{2}, b = 0$.

Следовательно, частное решение

$$y_{час} = -\frac{1}{2}x^2.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения есть функция

$$y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3e^x - \frac{1}{2}x^2.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = e^{px}P_m(x), \tag{33.2}$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m.

Пусть k = p корень характеристического уравнения кратности α. Тогда существует многочлен $Q_m(x)$, такой, что функция

$$y_{час} = x^{\alpha}e^xQ_m(x),$$

является частным решением уравнения (33.2), где $Q_m(x)$ - многочлен сстепени m.

Пример 33.3. Решим уравнение

$$y''' - y' = xe^x.$$

Имеем

$$y_{общ} = y_{одн} + y_{част}.$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y''' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^3 - k = 0,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = -1, k_2 = 0, k_3 = 1.$$

Следовательно, функция

$$y_{одн} = C_1e^{-x} + C_2 + C_3e^x$$

является решением однородного уравнения.

Частное решение заданного уравнения будем искать в виде

$$y_{час} = xe^x(ax+b) = (ax^2 + bx)e^x.$$

Тогда

$$y'_{час} = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x,$$

$$y''_{час} = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x,$$

$$y'''_{час} = (ax^2 + 6ax + bx + 6a + 3b)e^x.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$y''' - y' = (4ax + 6a + 2b)e^x = xe^x$$

или

$$4ax + 6a + 2b = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$\begin{cases} 4a = 1, \\ 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему двух линейных уравнений с двумя переменными, получим $a = \dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{3}{4}$.

Следовательно, частное решение

$$y_{час} = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x\right)e^x.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения есть функция

$$y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3e^x + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x\right)e^x.$$

3. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = e^{px}(P_m(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx), \tag{33.3}$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m, $Q_l(x)$ многочлен степени *l*.

Пусть $p + iq$ − корень характеристического уравнения кратности α. Тогда частное решение уравнения (4) можно искать в виде

$$y_{час} = x^{\alpha}e^{px}(\overline{P_s}(x)\cos qx + \overline{Q_s}(x)\sin qx),$$

где $s = \max\{m, l\}$.

Пример 33.4. Решим уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Имеем

$$y_{общ} = y_{одн} + y_{част}.$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Характеристическое уравнение заданного уравнения имеет вид

$$k^2 + 4k + 4 = 0,,$$

корни которого соответственно равны

$$k_1 = k_2 = -2.$$

Следовательно, функция

$$y_{одн} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}.$$

является решением однородного уравнения.

Имеем

$$\cos 2x = e^{0x} \cdot 1 \cdot \cos 2x,.$$

Поэтому частное решение заданного уравнения будем искать в виде

$$y_{час} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Тогда

$$y'_{час} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$
$$y''_{час} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$-8A\sin 2x + 8B\cos 2x = \cos 2x\,.$$

Используя линейную независимость функций $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим систему

$$\begin{cases} -8A = 0, \\ 8B = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему двух линейных уравнений с двумя переменными, получим $A = 0, B = \frac{1}{8}$.

Следовательно, частное решение

$$y_{час} = \frac{1}{8}\sin 2x..$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения есть функция

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{8}\sin 2x\,.$$

Системы дифференциальных уравнений.

34. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Теорема существования и единственности.

Определение. Системой дифференциальных уравнений будем называть систему вида:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dot{y}_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots \\ \dot{y}_n &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{34.1}$$

где

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x),$$

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \dot{y}_n = \frac{dy_n}{dx}\,.$$

Теорема (существования и единственности решения).

Пусть дана система дифференциальных уравнений (34.1) $x \in [a, b]$.

Пусть функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ − непрерывные функции в окрестности точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$, где $x_0 \in [a, b]$.

Пусть функции $\frac{df_i}{dy_j}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны в окрестности точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$, где $x_0 \in [a, b]$.

Тогда $\forall y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ существует решение системы

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

такое, что

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}.$$

35. Системы линейных дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}&\dot{y}_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x)\\&\dot{y}_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x)\\&\ldots\\&\dot{y}_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)\end{aligned} \qquad (35.1)$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (35.1) можно записать в виде:

$$\dot{Y} = AY + F\,.$$

Пусть

$$L[Y] = \dot{Y} - AY,$$

тогда система (35.1) имеет вид

$$L[Y] = F\,.$$

Теорема (существования и единственности решения линейной системы дифференциальных уравнений).

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений (35.1).

Пусть $f_i(x), a_{ij}(x)$ − непрерывные функции в окрестности точки x_0, где $x_0 \in [a,b]$.

Тогда $\forall y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0} \in R^n$ существует решение

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

системы (35.1) такое, что

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}\,.$$

Пример 35.1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}&\dot{y}_1 = -y_2\\&\dot{y}_2 = y_1\end{aligned}$$

Имеем

$$\dot{y}_1 = -y_2 \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\dot{y}_2 = -y_1\,.$$

или

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 0.$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Следовательно

$$y_2 = -\dot{y}_1 = C_1 \sin x - C_2 \cos x .$$

Таким образом, решение заданной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x. \end{cases}$$

36. Свойства системы линейных дифференциальных уравнений.

1. $L[CY] = CL[Y]$.

2. $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$, т.е. L – линейный оператор.

3. $L[\sum_{i=1}^{m} C_i Y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[Y_i]$.

4. $L[U + iV] = L[U] + iL[V]$.

Эти свойства являются следствиями соответствующих свойств производной.

Теорема 1. Пусть $L[Y] = 0.$ Тогда $L[CY] = 0.$

Доказательство. $L[CY] = CL[Y] = C \cdot 0 = 0$, где $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 2. Пусть $L[Y_1] = 0, L[Y_2] = 0.$ Тогда $L[Y_1 + Y_2] = 0.$

Доказательство. $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2] = 0 + 0 = 0$.

Теорема 3. Пусть $L[Y_i] = 0$, где i =1,2…m. Тогда $L[\sum_{i=1}^{m} C_i Y_i] = 0.$

Доказательство. $L[\sum_{i=1}^{m} C_i Y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[Y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot 0 = 0$.

Теорема 4. Пусть $L[U + iV] = 0$. Тогда $L[U] = 0, L[V] = 0.$

Доказательство. $L[U + iV] = L[U] + iL[V] = 0 \Rightarrow L[U] = 0 \wedge L[V] = 0.$

37. Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Вронского.

Определение. Пусть даны функции

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \cdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \cdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ldots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \cdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Скажем, что функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке [a,b], если существуют постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не все равные нулю такие, что

$$C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_n(x) = 0, \forall x \in [a,b]. \qquad (37.1)$$

т.е. функции линейно зависимы, если существует ненулевая линейная комбинация этих функций тождественно равная нулю.

Скажем, что функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ линейно независимы, если равенство (37.1) выполняется только при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Равенство (37.1) можно переписать в виде.

$$\begin{aligned}
&C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x) + \ldots + C_n y_{1n}(x) = 0 \\
&C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x) + \ldots + C_n y_{2n}(x) = 0 \\
&\ldots \\
&C_1 y_{n1}(x) + C_2 y_{n2}(x) + \ldots + C_n y_{nn}(x) = 0
\end{aligned}$$

Определение. Пусть даны функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$. Определителем Вронского будем называть определить

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема 1. Если функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке [a,b] то их определитель Вронского тождественно равен нулю на [a,b].

Доказательство. Т.к. функции линейно зависимы, то хотя бы один из них есть линейная комбинация остальных. В определителе Вронского соответствующий столбец есть линейная комбинация остальных. Следовательно, определитель равен нулю.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть L[Y] = 0 − однородная система линейных дифференциальных уравнений. Тогда функция Y(x) ≡ 0 является решением этой системы с нулевыми начальными условиями.

Теорема 2. Пусть функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ являются решениями однородной системы линейных дифференциальных уравнений L[Y] = 0, $x \in [a,b]$.

Пусть $\exists x_0 \in [a,b] : W(x_0) = 0$. Тогда функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке [a,b].

Доказательство. Имеем

$$W(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \ldots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \ldots & y_{2n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0) = 0 \\ C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0) = 0 \\ \ldots \\ C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (37.2)$$

Т.к. определитель этой системы равен нулю, то у системы есть ненулевое решение, т.е. существуют $C_1, C_2, \dots, C_n$ не все равные нулю, удовлетворяющие системе (37.1). Рассмотрим функцию

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \dots + C_n Y_n(x).$$

С одной стороны функция $Y(x)$ является решением системы линейных однородных уравнений, а с другой стороны так как $Y(x_0) = 0$, то $Y(x) \equiv 0$ на отрезке [a,b].

Следовательно

$$C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \dots + C_n Y_n(x) = 0, \forall x \in [a,b].$$

Т.е. функции $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствие. Если функции $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ линейно независимые решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений, то их определитель Вронского отличен от нуля $\forall x \in [a,b]$.

38. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Пусть дана однородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}(x) y_1 + a_{12}(x) y_2 + \dots + a_{1n}(x) y_n \\ \dot{y}_2 &= a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2 + \dots + a_{2n}(x) y_n \\ &\dots \\ \dot{y}_n &= a_{n1}(x) y_1 + a_{n2}(x) y_2 + \dots + a_{nn}(x) y_n \end{aligned} \qquad (38.1)$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Пусть

$$L[Y] = \dot{Y} - AY,$$

тогда система (38.1) имеет вид

$$L[Y] = 0.$$

Теорема. Пусть дана однородная система линейных уравнений (38.1). Пусть функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1,2,\dots,n$ − непрерывные функции на отрезке $[a,b]$.Пусть функции

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \dots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \dots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

линейно независимы и являются решениями системы (38.1). Тогда $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\forall y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ существуют $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$ такие, что функция

$$Y(x) = C_{10} Y_1(x) + C_{20} Y_2(x) + \dots + C_{n0} Y_n(x)$$

будет удовлетворять условию:

$$Y(x_0) = Y_0,$$

где

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Т.е. общее решение системы (38.1) имеет вид:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_n(x)$$

Доказательство. В силу линейности системы (38.1) функция $Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_n(x)$ является решением системы (38.1). Выполнение условия $Y(x_0) = Y_0$ означает, что система

$$\begin{cases} C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0) = y_{10} \\ C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0) = y_{20} \\ \ldots \\ C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) = y_{n0} \end{cases} \qquad (38.1)$$

имеет единственное решение. Определитель системы (38.1) является определителем Вронского для линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Следовательно, он отличен от нуля. Система (38.1) совместима и имеет единственное решение. Т.е. существуют $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$ постоянные, такие, что, функция

$$Y(x) = C_{10} Y_1(x) + C_{20} Y_2(x) + \ldots + C_{n0} Y_n(x)$$

удовлетворяет условию

$$Y(x_0) = Y_0.$$

Теорема доказана.

Определение. Функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ будем называть фундаментальной системой решений.

Пример 38.1. Решим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 \end{aligned}.$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y_1(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 \sin x - C_2 \cos x \\ y_2(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{aligned}.$$

Замечание.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{y}_1 = \dot{y}_2 = -y_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 + y_1 = 0 \Rightarrow$$

$k^2 + 1 = 0, k = \pm i$

$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x$

39. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений.

Пусть дана неоднородная система линейных дифференциальных уравнений.

$$L[Y] = F,$$

или

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dot{y}_2 &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\ldots \\ \dot{y}_n &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned}$$

(35.1)

Теорема 1. Пусть дана $L[Y] = F$. Пусть $L[Y_{одн}] = 0$, $L[Y^*] = F$.

Тогда $L[Y_{одн} + Y^*] = F$.

Доказательство. $L[Y_{одн} + Y^*] = L[Y_{одн}] + L[Y^*] = 0 + F = F$.

Теорема доказана.

Теорема 2 (о структуре общего решения неоднородной системы линейных уравнений).

Пусть дана неоднородная система линейных дифференциальных уравнений (35.1). Пусть функции $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$, $f_i(x) \in C[a,b]$.

Пусть

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \ldots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \ldots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ldots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \ldots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений $L[Y] = 0$.

Пусть функция $Y^*(x) = \begin{pmatrix} y_1^*(x) \\ y_2^*(x) \\ \vdots \\ y_n^*(x) \end{pmatrix}$ является решением неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений $L[Y^*] = F$. Тогда общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_n(x) + Y^*(x).$$

Доказательство. 1. $L[Y] = F$.

2. $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\forall y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ существуют $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$ постоянные, такие, что функция

$$Y(x) = C_{10}Y_1(x) + C_{20}Y_2(x) + \ldots + C_{n0}Y_n(x) + Y^*(x)$$

будет удовлетворять условию:

$$Y(x_0) = Y_0, Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$L[Y] = L[C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_nY_n + Y^*] = C_1L[Y_1] + C_2L[Y_2] + \ldots + C_nL[Y_n] + L[Y^*]$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0 + F = F.$$
$$Y(x_0) = Y_0 \Rightarrow C_1Y_1(x_0) + C_2Y_2(x_0) + \ldots + C_nY_n(x_0) + Y^*(x_0) = Y_0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1y_{11}(x_0) + C_2y_{12}(x_0) + \ldots + C_ny_{1n}(x_0) + y_1^*(x_0) = y_{10} \\ C_1y_{21}(x_0) + C_2y_{22}(x_0) + \ldots + C_ny_{2n}(x_0) + y_2^*(x_0) = y_{20} \\ \ldots \\ C_1y_{n1}(x_0) + C_2y_{n2}(x_0) + \ldots + C_ny_{nn}(x_0) + y_n^*(x_0) = y_{n0} \end{cases} \qquad (39.1)$$

Т.к. определитель системы есть определитель Вронского для линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений, то он отличен от нуля. Следовательно, система (39.1) совместима и имеет единственное решение. Это значит, что функция

$$Y(x) = C_{10}Y_1(x) + C_{20}Y_2(x) + \ldots + C_{n0}Y_n(x) + Y^*(x)$$

удовлетворяет условию $Y(x_0) = Y_0$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть

$$L[y] = \sum_{i=1}^{m} F_i, L[Y_i] = F_i .$$

Тогда

$$L[\sum_{i=1}^{m} Y_i] = \sum_{i=1}^{m} F_i .$$

Теорема 4. Пусть

$$L[\tilde{U} + i\tilde{V}] = U + iV .$$

Тогда

$$L[\tilde{U}] = U, L[\tilde{V}] = V .$$

Метод вариации произвольного постоянного.

Пусть дана система $L[Y] = F$. Пусть $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ фундаментальная система решений однородной системы дифференциальных уравнений $L[Y] = 0$.

Решение неоднородной системы будем искать в виде:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)Y_i(x)$$

Подставляя в систему, будем иметь:

$$L[Y] = L[\sum_{i=1}^{n} C_i(x)Y_i(x)] = \sum_{i=1}^{n} \{C_i(x)L[Y_i(x)] + C_i'(x)Y_i(x)\} = F(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)Y_i(x) = F(x)$$

Получим систему для определения $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$.

Пример 39.1. Решим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \frac{1}{\cos x} \end{aligned}.$$

Однородная система имеет решение

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 \sin x - C_2 \cos x \\ y_2(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{aligned}.$$

Решение неоднородной системы будем искать в виде

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1(x) \sin x - C_2(x) \cos x \\ y_2(x) &= C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \end{aligned}.$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{aligned} &C_1' \sin x + C_1 \cos x - C_2' \cos x + C_2 \sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ &C_1' \cos x - C_1 \sin x + C_2' \sin x + C_2 \cos x = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{\cos x} \end{aligned}.$$

или

$$\begin{aligned} C_1' \sin x - C_2' \cos x &= 0 \\ C_1' \cos x + C_2' \sin x &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}.$$

Из последней системы имеем

$$\begin{aligned} C_1' &= 1 \\ C_2' &= \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned},$$

или

$$\begin{aligned} C_1(x) &= x + C_1 \\ C_2(x) &= -\ln|\cos x| + C_2 \end{aligned}.$$

Следовательно, общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (C_1 + x) \sin x - (C_2 - \ln|\cos x|) \cos x \\ y_2(x) &= (C_1 + x) \cos x + (C_2 - \ln|\cos x|) \sin x \end{aligned}.$$

40. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Определение. Систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n + f_1(x) \\ \dot{y}_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n + f_2(x) \\ &\ldots \\ \dot{y}_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n + f_n(x) \end{aligned}, \qquad (35.1)$$

где $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, − некоторые постоянные, будем называть системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть

$$A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (35.1) можно переписать в виде

$$\dot{Y}=AY+F.$$

Если F = 0, то имеем $\dot{Y}=AY$ или

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n \\ &\dot{y}_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n \\ &\ldots \\ &\dot{y}_n=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n \end{aligned}. \tag{38.1}$$

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения, чтобы найти общее решение системы (38.1) надо найти фундаментальную систему решений. Для этого решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned} &y_1=\alpha_1 e^{kx} \\ &y_2=\alpha_2 e^{kx} \\ &\ldots \\ &y_n=\alpha_n e^{kx} \end{aligned} \tag{40.1}$$

Подставляя решения (40.1) в систему (38.1), получим:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 k e^{kx}=\alpha_1 a_{11}e^{kx}+\alpha_2 a_{12}e^{kx}+\ldots+\alpha_n a_{1n}e^{kx} \\ &\alpha_2 k e^{kx}=\alpha_1 a_{21}e^{kx}+\alpha_2 a_{22}e^{kx}+\ldots+\alpha_n a_{2n}e^{kx} \\ &\ldots \\ &\alpha_n k e^{kx}=\alpha_1 a_{n1}e^{kx}+\alpha_2 a_{n2}e^{kx}+\ldots+\alpha_n a_{nn}e^{kx} \end{aligned}$$

После сокращения на функцию e^{kx} получим:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 k=\alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{12}+\ldots+\alpha_n a_{1n} \\ &\alpha_2 k=\alpha_1 a_{21}+\alpha_2 a_{22}+\ldots+\alpha_n a_{2n} \\ &\ldots \\ &\alpha_n k=\alpha_1 a_{n1}+\alpha_2 a_{n2}+\ldots+\alpha_n a_{nn} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\alpha_1(a_{11}-k)+\alpha_2 a_{12}+\ldots+\alpha_n a_{1n}=0 \\ &\alpha_1 a_{21}+\alpha_2(a_{22}-k)+\ldots+\alpha_n a_{2n}=0 \\ &\ldots \\ &\alpha_1 a_{n1}+\alpha_2 a_{n2}+\ldots+\alpha_n(a_{nn}-k)=0 \end{aligned} \tag{40.2}$$

Мы получили однородную линейную систему. Чтобы она имела ненулевое решение, ее определитель должен быть равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (40.3)$$

Уравнение (40.3) является уравнением n – ой степени относительно k. Уравнение (40.3) будем называть характеристическим уравнением системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При решении уравнения (40.3) возможны три случая:

1. Все корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1, k_2, \dots, k_n \in R, k_i \neq k_j, i \neq j, i, j = 1,2,\dots,n$.

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни.

3. Все корни характеристического уравнения действительны, но среди них есть кратные.

1. Все корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1, k_2, \dots, k_n \in R, k_i \neq k_j, i \neq j, i, j = 1,2,\dots,n$.

Тогда, подставляя $k_1, k_2, \dots, k_n$ в (40.2), находим решения

$$k_1 \to \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, k_2 \to \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \dots, k_n \to \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, функции

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} e^{k_1 x}, Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} e^{k_2 x}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} e^{k_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений. Тогда функция

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} e^{k_1 x} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} e^{k_2 x} + \dots + C_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} e^{k_n x}$$

есть общее решение системы (38.1).

Пример 40.1. Решим систему

$$\dot{x} = 2x - y + z$$
$$\dot{y} = x + 2y - z$$
$$\dot{z} = x - y + 2z$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - kE| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 & 1 \\ 1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(2-k)\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ -1 & 2-k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(2-k)(k^2-4k+3) = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3.$$

a) Пусть $k_1 = 1$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.$$

Таким образом

$$k_1 = 1 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Пусть $k_2 = 2$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.$$

Таким образом

$$k_2 = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Пусть $k_3 = 3$.

Тогда из уравнения $(A - kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1.$$

Таким образом

$$k_3 = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

или

$$x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$
$$z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$

Пример 40.2. Решим систему

$$\dot{x} = 3x - y + z$$
$$\dot{y} = -x + 5y - z\ .$$
$$\dot{z} = x - y + 3z$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - kE| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 3-k & -1 & 1 \\ -1 & 5-k & -1 \\ 1 & -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(3-k)\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ -1 & 3-k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5-k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(3-k)(k^2-8k+12)=0.$$

Полученное уравнение имеет корни

$$k_1=2, k_2=3, k_3=6.$$

a) Пусть $k_1=2$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha=0$ или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \\ -\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1=1, \alpha_2=0, \alpha_3=-1.$$

Таким образом

$$k_1=2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Пусть $k_2=3$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha=0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} -\alpha_2+\alpha_3=0 \\ -\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2=0 \end{cases}$$

имеем

$$\alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=1.$$

Таким образом

$$k_2=3 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Пусть $k_3 = 6$.

Тогда из уравнения $(A - kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} -3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

имеем

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1.$$

Таким образом

$$k_3 = 6 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

или

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y &= C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \\ z &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \end{aligned}$$

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни.

Пусть $k = \alpha + i\beta$ − корень характеристического уравнения. Тогда $k^* = \alpha - i\beta$ − тоже корень характеристического уравнения

Пусть собственному значению $k = \alpha + i\beta$ соответствует решение

$$\alpha + i\beta \to \begin{pmatrix} \alpha_{11} + i\beta_{11} \\ \alpha_{21} + i\beta_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} + i\beta_{n1} \end{pmatrix}$$

системы (40.2)

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + i\beta_{11} \\ \alpha_{21} + i\beta_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} + i\beta_{n1} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)}$$

− решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений. Тогда функции

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix}\alpha_{11}+i\beta_{11}\\ \alpha_{21}+i\beta_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{n1}+i\beta_{n1}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)}= y_1 \text{ и } \mathrm{Im}\begin{pmatrix}\alpha_{11}+i\beta_{11}\\ \alpha_{21}+i\beta_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{n1}+i\beta_{n1}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)}= y_2$$

являются линейно независимыми решениями.

Пример 40.3. Решим систему

$$\dot{x} = x - 3y$$

$$\dot{y} = 3x + y$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - kE| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix}1-k & -3\\ 3 & 1-k\end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$k^2 - 2k + 10 = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни

$$k_1 = 1+3i \text{ и } k_2 = 1-3i.$$

а) Пусть $k_1 = 1+3i$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix}-3i & -3\\ 3 & -3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases}-3i\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0\\ 3\alpha_1 - 3i\alpha_2 = 0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}i\alpha_1 + \alpha_2 = 0\\ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0\end{cases}.$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = i,\ \alpha_2 = 1.$$

Таким образом

$$k_1 = 1+3i \to \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

б) Пусть $k_2 = 1-3i$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} 3i\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3i\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} i\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = -i,\ \alpha_2 = 1.$$

Таким образом

$$k_2 = 1 - 3i \to \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+3i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 3t + i\sin 3t) e^t = \begin{pmatrix} -\sin 3t + i\cos 3t \\ \cos 3t + i\sin 3t \end{pmatrix} e^t.$$

Действительные и мнимые части соответственно равны

$$\mathrm{Re} = \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} e^t \text{ и } \mathrm{Im} = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} e^t.$$

Следовательно

$$x = \begin{pmatrix} -\sin 3te^t \\ \cos 3te^t \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \cos 3te^t \\ \sin 3te^t \end{pmatrix}$$

Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид:

$$x = (-c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t)e^t,$$

$$y = (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)e^t.$$

Пример 40.4. Решим систему

$$\overset{\circ}{x} = -2y + 2z$$

$$\overset{\circ}{y} = t - y + z$$

$$\overset{\circ}{z} = y - z$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - kE| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} -k & -2 & 2 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 0 & 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$-k(k^2+2k+1-1)+2(-1-k)+2=0$$

или

$$-k^3-2k^2-2-2k+2=0$$

или

$$-k(k^2+2k+2)=0.$$

Полученное уравнение имеет корни:

$$k_1=0,\ k_2=-1+i,\ k_3=-1-i.$$

а) Пусть $k_1=0$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha=0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} -2\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}.$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=\frac{1}{2},\ \alpha_3=\frac{1}{2}.$$

Таким образом

$$k_1=0\rightarrow\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

б) Пусть $k_2=-1+i$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha=0$ или

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 & 2 \\ 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} \alpha_1(1-i)-2\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1-i\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_2-i\alpha_3=0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = i,\ \alpha_3 = 1.$$

Таким образом

$$k_2 = -1 + i \to \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} = \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i\sin t) e^{-t} = \begin{pmatrix} -2\cos t & -i2\sin t \\ -\sin t & +i\cos t \\ \cos t & +i\sin t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$y_2 = \mathrm{Re} = \begin{pmatrix} -2\cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t},\ y_3 = \mathrm{Im} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-t},\ y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{0t}.$$

Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2\cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3. Среди корней характеристического уравнения есть кратные корни.

Пример 40.5. Решим систему

$$\mathring{x} = 4x - y - z$$

$$\mathring{y} = x + 2y - z$$

$$\mathring{z} = x - y + 2z$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - kE| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 & -1 \\ 1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

Расскрывая определитель, получим:

$$-k^3 + 8k^2 - 21k + 18 = 0$$

Корни характеристического уравнения соответственно равны

$$k_1 = 2,\ k_2 = k_3 = 3.$$

а) Пусть $k_1 = 2$.

Тогда из уравнения $(A - kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2=0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=1.$$

Таким образом

$$k_1=2\to\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть $k_2=k_3=3$.

Тогда из уравнения $(A-kE)\alpha=0$ или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}.$$

В полученной системе n=3, r=1 и (n-r)=2 и следовательно у полученной системы два линейно независимых ненулевых решений

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=0 \text{ и } \alpha_1=1,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=1.$$

Таким образом:

$$k_1\to\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ k_2\to\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k_3\to\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{3t}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}.$$

Пример 40.6. Решим систему

$$\overset{\circ}{x}=x-2y$$

$$\overset{\circ}{y}=-x-y-2z$$

$$\overset{\circ}{z}=y+z$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|A - kE| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & 0 \\ -1 & -1-k & -2 \\ 0 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = -(k-1)^2(k+1).$$

Корни характеристического уравнения соответственно равны

$$k_1 = -1,\ k_2 = k_3 = 1.$$

а) Пусть $k_1 = -1.$

Тогда из уравнения $(A - kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -1.$$

Таким образом

$$k_1 = -1 \to h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть $k_2 = k_3 = 1.$

Тогда из уравнения $(A - kE)\alpha = 0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{cases} -2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

В полученной системе n=3, r=2 и (n-r)=1 и следовательно у полученной системы одно линейно независимое ненулевое решение

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = -1.$$

Таким образом

$$k_2 = k_3 \to h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор, присоединенный к вектору $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для этого надо решить систему

$$\left(A - k_2 E\right) h_3 = h_2.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} & -2\alpha_2 = 2 \\ & -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \\ & \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

Ненулевое решение последней системы имеет вид

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0.$$

Таким образом

$$h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{t}.$$