**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ**
**РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет

**В.А. КАДЫМОВ**

# ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Учебно-методическое пособие*

Москва
2018

**УДК 517**
**ББК 22.161.1**
К 13

Рецензенты:

*Уварова Л.А.*, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ Станкин

*Яновская Е.А.*, канд. тех. наук, доцент кафедры

**В.А. Кадымов**

К 13 Функции многих переменных. Теория пределов. Дифференциальное исчисление: учебно-методическое пособие. – М.: МГГЭУ, 2018. – 80 с.

**ISBN 978-5-9799-0107-7**

# 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

## 1.1. Область определения

***Определение 1.*** Пусть задано множество $G$ пар $(x, y)$ числовых значений переменных $x$ и $y$ и задан закон $f$, по которому каждой паре $(x; y)$ из множества $G$ ставится в соответствие единственное значение функции $z\ (x, y)$. Тогда говорят, что задана *функция двух переменных* $z = f(x, y)$, которые называются *аргументами*, или *независимыми переменными*.

Множество $G$ называется областью определения (существования) функции $f(x, y)$.

***Замечание.*** Поскольку на плоскости $xoy$ любой паре $(x; y)$ соответствует точка $M(x; y)$, то вместо $f(x, y)$ можно записать $f(M)$, а пару $(x; y)$ называть точкой $M(x; y)$. Под областью определения функции $z = f(x, y)$ будем понимать как множество $G$, так и соответствующее ему множество точек в плоскости $xoy$.

Если область определения специально не указана, то она находится из условия того, чтобы выражение $f(x, y)$ имело смысл.

**Пример 1.** $z = \ln\left(x + y\right)$. Область определения этой функции находится из условия $x + y > 0$ или $y > -x$, т.е. $G$ — множество точек плоскости $xoy$, лежащих выше прямой $y = -x$.

**Выполните самостоятельно.** Изобразите области определения функций.

**1.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

**2.** $z = \arcsin(x + y)$.

**3.** $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.

**4.** $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

***Определение 2.*** *Окрестностью* $U_r(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$ радиуса $r$ называется множество точек $M(x; y)$, лежащих внутри круга радиуса $r$ с центром в $M_0(x_0; y_0)$:

$$U_r(M_0)=\left\{(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\right\}. \tag{1.1}$$

Введем понятие области как множества точек плоскости *xoy* определенного класса (не путать с понятием области определения функции).

***Определение 3.*** *Областью D* называется множество точек плоскости, характеризующееся следующими свойствами:

1) *свойство открытости:* если точка $M \in D$, то существует и некоторая окрестность этой точки, которая целиком содержится в *D*;
2) *свойство связности*: любые две точки множества *D* можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в *D*.

Примером области может служить круг $x^2+y^2<1$, не включающий в себя точки окружности $x^2+y^2=1$.

***Определение 4.*** *Граничной точкой* области *D* называется точка, любая окрестность которой содержит как точки области *D*, так и точки, не принадлежащие *D*.

Границей $\partial D$ области *D* называется множество всех ее граничных точек. Вследствие свойства открытости, все точки области *D* являются внутренними, т.е. не принадлежащими границе.

Объединение области *D* с $\partial D$ называется *замкнутой областью D*.

Область называется *ограниченной*, если она целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса. Примером замкнутой области может служить круг $x^2+y^2\le 1$.

Линия уровня функции двух переменных — это такое множество точек из ее области определения, в которых функция принимает одно и то же значение.

***Определение 5.*** *Линией уровня* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью $z = C$, параллельной координатной плоскости $xoy$.

По взаимному расположению линий уровня (при различных значениях $C$) можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$.

**Выполните самостоятельно.** Постройте линии уровня функций.

**1.** $z = \dfrac{y}{x}$.

**2.** $z = x^2 - y^2$.

**3.** $z = x^2 + y^2$.

### 1.2. Предел и непрерывность

***Определение 6.*** Число $A$ называется *пределом* функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой радиус $r = r(\varepsilon) > 0$, что для всякой точки $M\left(x; y\right)$, не совпадающей с $M_0$ и находящейся в окрестности точки $M_0$ радиуса $r$, т.е. при $0 < \left|\overrightarrow{MM_0}\right| = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < r(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon.$$

Записывается это так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = A. \tag{1.2}$$

Отметим, что для существования предела $f\left(x, y\right)$ в точке $M_0$ вовсе не требуется, чтобы функция была определена в этой точке. Подчеркнем также, что из самого определения предела следует, что если он существует, то он единственный и не зависит от траектории, по которой точка $M\left(x, y\right)$ стремится к точке $M_0$.

**Пример 2.** Найдите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

*Решение.*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0;\quad y\to 2\\ \alpha\equiv xy\to 0}}\left(y\cdot\frac{\sin xy}{xy}\right)=\lim_{\substack{y\to 2\\ \alpha\to 0}}\left(y\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\cdot 2=2.$$

Мы воспользовались первым замечательным пределом, а также теоремой о пределе произведения двух функций: предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если каждый из них существует.

**Пример 3.** Исследуйте вопрос существования предела функции

$$J=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}.$$

*Решение.* Этот предел удобнее исследовать в полярных координатах $\left(x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi\right)$:

$$J=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\rho\neq 0)}}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi\right)}{\rho^2\left(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\lim_{\rho\to 0}\rho f_1\left(\varphi\right)=0,$$

где $f_1\left(\varphi\right)$ — ограниченная функция:

$$\left|f_1\left(\varphi\right)\right|=\frac{\left|\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi\right|}{\left|1-\left(1/2\right)\sin 2\varphi\right|}\leq\frac{\left|\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi\right|}{1/2}\leq\frac{2}{1/2}=4.$$

**Пример 4.** Исследуйте вопрос существования предела функции $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ в точке $M_0(0;0)$.

*Решение.* Учитывая, что в пределе $x\neq x_0\equiv 0$, $y\neq y_0\equiv 0$, получаем:

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{x^2y}{x^2\left[1+\left(y/x\right)^2\right]}=\frac{y}{1+\left(y/x\right)^2}\Rightarrow\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{y}{1+\left(y/x\right)^2}\right|\le|y|$$

и, переходя к пределу в последнем неравенстве, устанавливаем, что

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

Отметим, что данный предел проще исследовать в полярной системе координат $\left(x=\rho\cos\varphi\to0;\ y=\rho\sin\varphi\to0\Rightarrow\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\lim_{\rho\to0}\rho\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\right)=0.$$

**Пример 5.** Исследуйте вопрос существования предела $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

*Решение*. Покажем, что этого предела не существует. Для этого достаточно взять два разных направления и показать, что они приводят к отличным друг от друга результатам:

а) $y=x;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot x}{x^4+x^2}=\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+1}=0;$

в) $y=x^2;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ (x\neq0)}}\dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}.$

Следовательно, указанного предела не существует.

Отсутствие предела можно показать также, используя полярные координаты. Действительно,

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{\rho^2\left(\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\lim_{\rho\to0}\rho\left(\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}\right).$$

Достаточно выбрать 2 направления и подтвердить, что последний предел приводит к различным значениям:

а) $\begin{cases} \rho(\varphi) = \sin\varphi / \cos^2\varphi \\ \varphi \to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle =$

$$= \lim_{\varphi\to 0} \left( \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \right) \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi}{\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} \cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{2};$$

в) $\begin{cases} \rho(\varphi) = \rho \to 0 \\ \varphi = \varphi_0 = \pi/4 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\pi/4}} \rho \dfrac{1/\left(2\sqrt{2}\right)}{\rho^2 (1/4) + (1/2)} = 0.$

Таким образом, подтвердили полученный выше результат.

***Определение 7.*** Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, включая и саму эту точку. Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$, причем $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, то $f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Если точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит в области определения функции $f(x, y)$ или на ее границе, причем в этой точке нарушается какое-либо из условий непрерывности, то $M_0$ называется *точкой разрыва* функции $f(x, y)$.

**Пример 6.** Функция $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ разрывна в точке $M_0(0; 0)$, поскольку эта точка принадлежит границе (и является границей) области определения, $z$ причем $z(x, y)$ в ней не определена. Более того, данная функция не имеет предела в указанной точке. Действительно, пусть $M(x; y) \to M_0(0; 0)$ вдоль прямой $y = kx$ $(k = \text{const})$. Тогда вдоль этой прямой $z = \dfrac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \dfrac{2k}{1 + k^2} = \text{const}$ (при $M \neq M_0$) и получается, что предел $z(x, y)$ зависит от направления прямой $y = kx$, что противоречит определению предела (предел функции в точке определяется единственным образом).

**Выполните самостоятельно.** Дайте определение предела функции двух переменных в точке. Докажите, что функция $f\left(x,y\right)=$ $=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $(0;0)$.

# 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

## 2.1. Частные производные

Пусть задана функция $z=f(x,y)$. Выберем точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ внутри области определения $f(x,y)$ и рассмотрим малое приращение $\Delta x$ аргумента $x=x_0+\Delta x$, оставив другой аргумент фиксированным и равным $y_0$. Тогда разность $\Delta_x z=f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)$ называется *частным приращением* функции $f(x,y)$ в точке $M_0$.

***Определение 8.*** *Частной производной* функции $z=f(x,y)$ по переменной $x$, обозначаемой $f'_x\left(x_0,y_0\right)$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x_{0,}y_0\right)$, в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ называется предел

$$f_x'\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial z}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x},$$

если он существует.

Аналогично вводятся частное приращение $\Delta_y z$ и частная производная функции $z$ по $y$ в точке $M_0$, обозначаемая $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(x_{0,}\ y_0\right)$ или $f'_y\left(x_0,y_0\right)$:

$$f_y'\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial z}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta y}.$$

Поскольку $f'_x$ и $f'_y$ являются функциями точки $M_0$, и при этом точка $M_0$, может меняться, то индекс «ноль» у их аргументов будем опускать.

**Пример 7.** Пусть $z=\dfrac{x^3}{y}$. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{y}$ (дифференцируем по *x*, считая *y* постоянным) и $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^3}{y^2}$ (дифференцируем по $y$ при постоянном *x*).

**Пример 8.** Найдите частные производные функции $z=y\sin 2x$ в точке $P_0\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$.

*Решение.* Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y\cos 2x$ (дифференцируем по *x*, считая *y* постоянным) и $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2x$ (дифференцируем по *y* при постоянном *x*). Подставим координаты точки $P_0\left(\pi/2;1\right)$: $z'_x\left(P_0\right)=-2$; $z'_y\left(P_0\right)=0$.

**Выполните самостоятельно.** 1. Дайте определение частных производных функции $f(x,y)$ в точке $\left(x_0;y_0\right)$. Найдите, исходя из определения, частные производные 1-го порядка функции $f\left(x,y\right)=x^2y$ в точке $M_0(1;2)$.

*Ответ:* $f'_x\left(M_0\right)=4$; $f'_y\left(M_0\right)=1$).

2. Найдите частные производные функции $f\left(x,y\right)=x^2+y^3$ в точке $M_0\left(2;3\right)$.

*Ответ:* $f'_x\left(M_0\right)=4$; $f'_y\left(M_0\right)=27$ ).

### 2.2. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит внутри области определения функции $z = f(x, y)$. Рассмотрим малые приращения $\Delta x$ и $\Delta y$ в точке $M_0$.

***Определение 9.*** *Полным приращением* $f(x, y)$ в точке $M_0$ называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{2.1}$$

***Определение 10.*** Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{2.2}$$

при этом величины $A$ и $B$ зависят только от $M_0$ и не зависят от $\Delta x$, $\Delta y$, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = o(\rho), \text{ т.е. } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho(\Delta x, \Delta y)} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

*Полным дифференциалом* $df$ (или $dz$) указанной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0$ называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно $\Delta x$ и $\Delta y$:

$$dz(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y, \tag{2.3}$$

при этом $dy = \Delta y$, $dx = \Delta x$.

С точностью до бесконечно малой высшего порядка $\Delta z \approx dz$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$.

**Теорема 1.** Если $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0$, *то в этой точке существуют* $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, *причем* $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f}{\partial y} = B$.

Обратное утверждение верно, если предположить непрерывность $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

**Теорема 2.** Если у функции $z = f(x, y)$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, то $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

*Итак, для дифференцируемой функции выполняется*

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

$$\Delta z(M_0) = \Delta f(M_0) = df(M_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{2.4}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

В дальнейшем вместо $x_0$, $y_0$ будем писать $x$, $y$.

**Пример 9.** Найдите полный дифференциал функции $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

*Решение.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{(x + y)};$$

$$dz = \frac{dx}{x + y} - \frac{xdy}{y(x + y)} = \frac{1}{x + y}(dx - xdy).$$

Заметим, что все понятия данного раздела легко обобщаются на случай трех и более переменных.

Как следует из (2.4), при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$.

**Пример 10.** Определите, как изменятся площадь и диагональ прямоугольника со сторонами 8 *м* и 6 *м*, если его большую сторону уменьшить на 1,2 *см*, а меньшую увеличить 1,4 *см*.

*Решение.*

1) Площадь прямоугольника и длина диагонали находятся по формулам $S = a \times b$ и $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, поэтому для решения задачи привлечем функции $z = f(x, y) = xy$ и $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, а также формулу приближенного вычисления

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

2) Полагаем $x_0 = 8, y_0 = 6, \Delta x = -0,012, \Delta y = 0,014,$ тогда для площади прямоугольника изменение составляет

$$\Delta z \approx 6 \times (-0,012) + 8 \times (0,014) = 0,4;$$

диагональ прямоугольника изменится на величину

$$\Delta z \approx \frac{8}{\sqrt{64+36}}(-0,012) + \frac{6}{\sqrt{64+36}}(0,014) =$$
$$= -0,8 \times 0,012 + 06 \times 0,014 = -0,0012.$$

**Пример 11.** Центральный угол кругового сектора пластины равен $\varphi_0 = 80^\circ$, а начальная длина его радиуса равна $R_0 = 20$ см. Заказчик пожелал уменьшить угол на $d\varphi = \varphi - \varphi_0 = -1^\circ$. Насколько при этом надо увеличить радиус сектора, чтобы его площадь $S(R, \varphi) = \dfrac{\pi R^2 \varphi}{360}$ оставить без изменения?

*Решение*. По условию, изменение площади сектора равно нулю: $\Delta S = S\left(R_0 + dR, \varphi_0 + d\varphi\right) - S\left(R_0, \varphi_0\right) = 0$.

Если положить малыми изменения $dR$ и $d\varphi$ $\left(dR = o\left(R_0\right); d\varphi = o\left(\varphi_0\right)\right)$, то

$$\Delta S \approx dS\left(M_0\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial R} dR + \frac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial \varphi} d\varphi = 0,$$

откуда

$$dR = -\frac{\dfrac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial \varphi} d\varphi}{\dfrac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial R}} = \frac{\dfrac{\pi R_0^{\ 2}}{360} \cdot 1}{\dfrac{\pi R_0}{180} \cdot 80} = \frac{1}{8} = 0.125(\textit{см}).$$

**Пример 12.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{\left(4,05\right)^2 + \left(2,93\right)^2}$.

*Решение*. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точках $M\left(x; y\right)$ и $M_0\left(x_0; y_0\right)$:

$x = 4,05;\ \ y = 2,93;\ \ x_0 = 4;\ y_0 = 3;\ \ \Delta x = x - x_0 = 0,05;$

$\Delta y = y - y_0 = -0,07;$

$z\left(M_0\right) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$

$$z'_x\left(M\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_x\left(M_0\right) = \frac{4}{5};$$

$$z'_y\left(M\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_y\left(M_0\right) = \frac{3}{5}.$$

Тогда искомое выражение

$$\sqrt{\left(4,05\right)^2 + \left(2,93\right)^2} \equiv z\left(M\right) \approx z\left(M_0\right) + z'_x\left(M\right)\Delta x + z'_y\left(M\right)\Delta y =$$

$$= 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5} \cdot \left(-0,07\right) = 5,04 - 0,042 = 4,998.$$

**Пример 13.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0{,}97^{1{,}05}$.

*Решение.* Рассмотрим функцию $z = x^y$ в точках $M(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$:

$x = 0{,}97;\ y = 1{,}05;\ x_0 = 1;\ y_0 = 1;\ \Delta x = x - x_0 = -0{,}03;$

$\Delta y = y - y_0 = 0{,}05;$

$z(M_0) = 1;$

$z'_x(M) = yx^{y-1} \Rightarrow z'_x(M_0) = 1;$

$z'_y(M) = x^y \ln x \Rightarrow z'_y(M_0) = 0.$

Тогда искомое выражение

$$0{,}97^{1{,}05} \equiv z(M) \approx z(M_0) + z'_x(M)\Delta x + z'_y(M)\Delta y =$$

$$= 1 + 1 \cdot (-0{,}03) = 0{,}97.$$

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите полный дифференциал функции $z = e^{x^2+y^2}$.

*Ответ:* $dz = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy)$.

2. Дайте определение дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$. Докажите, что если функция дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

3. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x = 6$ м и $y = 8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

*Ответ*: диагональ уменьшится на 3 мм, а площадь уменьшится на 140 см$^2$.

4. На сколько приблизительно изменится сторона квадрата, если его площадь уменьшить с 16 м$^2$ до 15,82 м$^2$?

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

*Ответ:* 2,95.

## 2.3. Частные производные высшего порядка. Формула Тейлора

*Частными производными 2-го порядка* функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

*Дифференциалом 2-го порядка* функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка этой функции

$$d^2 z = d(dz).$$

Если $z = f(x, y)$, где $x$ и $y$ – независимые переменные, и функция $f$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

В общем случае, при наличии соответствующих производных, справедлива формула биномиального распределения:

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

**Пример 14.** Найдите частные производные 2-го порядка от функции $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

*Решение.* Последовательно вычисляем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Пусть функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)$-го порядка включительно. Тогда в рассматриваемой окрестности точки $M_0$ справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right]+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+R_n(x,y),$$

где $R_n(x,y)=\dfrac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\dfrac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}$

$f\left[x_0+\theta\cdot(x-x_0),y_0+\theta\cdot(y-y_0)\right]$ — остаточный член формулы Тейлора в разложении функции в форме Лагранжа $(0<\theta<1)$.

Частный случай этой формулы при $x_0=y_0=0$ называется *формулой Маклорена*.

Аналогичные формулы имеют место для функции трех и большего числа независимых переменных.

**Пример 15.** Разложите функцию $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-$ $-3y+5$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1;-2)$.

*Решение.* Последовательно вычисляем частные производные:

$$f'_x=4x-y-6;\ f'_y=-x-2y-3;\ f''_{xx}=4;\ f''_{xy}=-1;\ f''_{yy}=-2,$$

причем другие частные производные равны нулю. При этом, $f\left(M_0\right)=5;\ \ f_x'\left(M_0\right)=0;\ f_y'\left(M_0\right)=0.$

Подстановка их в формулу Тейлора дает:

$$f\left(x,y\right)=5+2\left(x-1\right)^2-\left(x-1\right)\left(y+2\right)-\left(y+2\right)^2.$$

**Пример 16.** Разложите функцию $f\left(x,y\right)=x^y$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M\left(1;1\right)$ с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с $\rho=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2}$.

*Решение*. Последовательно проводя вычисления, получаем:

$$f_x'=yx^{y-1};\ f_y'=x^y\ln x;\ f_{xx}''=y\left(y-1\right)x^{y-2};\ f_{xy}''=x^{y-1};\ f_{yy}''=x^y\left(\ln x\right)^2.$$

В рассматриваемой точке соответственно:

$$f\left(M\right)=1;\ f_x'\left(M\right)=1;\ f_y'\left(M\right)=0;\ f_{xx}''\left(M\right)=0;\ f_{xy}''\left(M\right)=1;\ f_{yy}''\left(M\right)=0.$$

Искомое разложение принимает вид:

$$f\left(x,y\right)=1+\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(y-1\right)+o\left(\rho^2\right).$$

**Пример 17.** Разложите функцию $u\left(M\right)\equiv u\left(x,y,z\right)=$ $=\left(5x-4z\right)\operatorname{arctg}^2\left(y+2z\right)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0\left(x_0=0;\ y_0=-1;\ z_0=1\right)$ с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с $\rho=\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-1\right)^2}$.

*Решение*. Разложим функцию $u\left(x,y,z\right)=\left(5x-4z\right)\operatorname{arctg}^2\left(y+2z\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $M_0$ и оставим первые 10 членов ряда:

$$u(x,y,z)=u(M)=u(M_0)+\frac{1}{1!}\left[u'_x(M_0)(x-x_0)+u'_y(M_0)(y-y_0)+u'_z(M_0)(z-z_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\Big[u''_{xx}(M_0)(x-x_0)^2+2u''_{xy}(M_0)(x-x_0)(y-y_0)+2u''_{xz}(M_0)(x-x_0)(z-z_0)+$$

$$+2u''_{yz}(M_0)(y-y_0)(z-z_0)+u''_{yy}(M_0)(y-y_0)^2+u''_{zz}(M_0)(z-z_0)^2\Big]+R_n(x,y,z).$$

Остается найти все неизвестные коэффициенты, входящие в последнее разложение:

$$u(M_0)=(0-4)\operatorname{arctg}^2 1=-\frac{\pi^2}{4};$$

$$u'_x(M)=5\operatorname{arctg}^2(y+2z)\Rightarrow u'_x(M_0)=5\operatorname{arctg}^2 1=\frac{5\pi^2}{16};$$

$$u'_y(M)=\frac{5x-4z}{1+(y+2z)^2}\Rightarrow u'_y(M_0)=\frac{0-4}{1+1}=-2;$$

$$u'_z(M)=-4\operatorname{arctg}^2(y+2z)+(5x-4z)2\operatorname{arctg}(y+2z)\frac{2}{1+(y+2z)^2};$$

$$u'_z(M_0)=-\frac{\pi^2}{4}-2\pi;$$

$$u''_{xx}(M)=5\operatorname{arctg}^2(y+2z)\cdot 0=0\Rightarrow u''_{xx}(M_0)=0;$$

$$u''_{xy}(M)=5\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot 1\Rightarrow u''_{xy}(M_0)=5\operatorname{arctg}1=5\pi/4;$$

$$u''_{xz}(M)=10\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot\frac{2}{1+(y+2z)^2}\Rightarrow u''_{xz}(M_0)=\frac{20\cdot(\pi/4)}{2}=5\pi/2;$$

$$u''_{yy}(M)=-\frac{5x-4z}{\left[1+(y+2z)^2\right]^2}(y+2z)2\Rightarrow u''_{yy}(M_0)=-\frac{0-4}{2^2}2\cdot 1=-2;$$

$$u''_{yz}(M)=\frac{-4\left[1+(y+2z)^2\right]-(5x-4z)2(y+2z)2}{\left[1+(y+2z)^2\right]^2}\Rightarrow u''_{yz}(M_0)=2;$$

$$u''_{zz}(M)=\frac{-8\operatorname{arctg}(y+2z)2}{1+(y+2z)^2}+\frac{1}{1+(y+2z)^2}\left[-8\operatorname{arctg}(y+2z)+\frac{(5x-4z)4}{1+(y+2z)^2}\right]-$$

$$-\frac{(5x-4z)2\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot 2\cdot 2(y+2z)\cdot 2}{\left[1+(y+2z)^2\right]^2} \Rightarrow u''_{zz}(M_0) = -3\pi - 4 + 4\pi = \pi - 4.$$

**Выполните самостоятельно.** 1. Разложите функцию $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(-2;1)$.

*Ответ:* $f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$

2. Разложите функцию $f(x,y) = \sin x \cdot \ln y$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M(0;\ 2)$ с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$.

*Ответ:* $f(x,y) = x\ln 2 + 0.5x(y-2) + o(\rho^2).$

# 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

## 3.1. Производная по направлению и градиент функции

Пусть $z = f(x,y)$ — дифференцируемая функция двух независимых переменных $x$ и $y$, которые, в свою очередь, являются функциями независимой переменной $t$ (т.е. определяют кривую на плоскости в параметрическом виде): $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$. Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}. \qquad (3.1)$$

В частности, если $t$ совпадает с одной из независимых переменных $(t \equiv x)$, то есть кривая на плоскости задана в явном виде $y = y(x)$, то формула (3.1) упрощается:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Если $z=f\left(x,y\right)$ — дифференцируемая функция двух независимых переменных $x$ и $y$, которые, в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных

$$x=\varphi(u,v);\ y=\psi(u,v),$$

то частные производные $z$ по $u$ и $v$ преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3.2)$$

**Пример 18.** Найдите производную $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z=u^v;\ u=\sin^2 x;\ v=\cos 3x.$

*Решение.*

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=\left(vu^{v-1}\right)\left(2\sin x\cos x\right)+\left(u^v\ln u\right)\left(-3\cos 3x\right).$$

***Определение 11.*** *Производной функции* $z=f\left(x,y\right)$ *в данном направлении* $\vec{l}=M\vec{N}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{M\to N}\frac{\left|f(M)-f(N)\right|}{MN}, \qquad (3.3)$$

где $f(M)$ и $f(N)$ — значения функции в точках M и N. Нетрудно показать, что для дифференцируемой функции z формула (3.3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ $\left(\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\right)$.

Аналогично определяется производная по направлению $\vec{l}$ для функции трех переменных $u=f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{3.4}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

***Определение 12.*** *Градиентом функции* $z=f(x,y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$gradz=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Согласно (3.4), производная функции в направлении $\vec{l}$ связана с градиентом функции формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l}=gradz\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=|gradz|\cdot\cos\varphi$$

($\varphi$ — угол между векторами $gradz$ и $\vec{l}$),
то есть производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. С другой стороны, направление градиента функции в данной точке задает направление наибольшей скорости возрастания функции в данной точке, причем

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{наиб}=|gradz|.$$

**Пример 19.** Найдите производную функции $f\left(x,y\right)=$ $=\ln\left(5x^2+2y^2\right)$ в точке $M(1,-3)$ по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{3}$ с осью *ox*.

*Решение.* По условию, $\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}=\cos\frac{\pi}{3}\vec{i}+\sin\frac{\pi}{3}\vec{j}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Находим частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{10x}{5x^2+2y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{14y}{5x^2+2y^2}$.

Подставим координаты точки:

$$\frac{\partial f\left(M\right)}{\partial x}=\frac{10}{23};\ \frac{\partial f\left(M\right)}{\partial y}=\frac{-12}{23}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial f\left(M\right)}{\partial l}=\frac{10}{23}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{12}{23}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5-6\sqrt{3}}{23}.$$

**Пример 20.** Температурное поле в листе металла распределено по закону $T=x\sin\pi y$. Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры в точке $M_0(1;1)$ и соответствующее направление наибольшего возрастания температуры.

*Решение.* Скорость изменения температуры в точке $M_0$ достигает наибольшего значения, равного $\frac{\partial T\left(M_0\right)}{\partial l}\Big|_{\max}=\left|gradT\left(M_0\right)\right|$, в направлении $\vec{l}$, совпадающем с направлением вектора $gradT\left(M_0\right)$: $gradT=\sin\pi y\vec{i}+\pi x\cos\pi y\vec{j}$; $gradT\left(M_0\right)=\left(0;-\pi\right)$; $\left|gradT\left(M_0\right)\right|=\pi.$

**Выполните самостоятельно.** 1. Как связаны производная по направлению и градиент дифференцируемой функции $f(x,y)$? Чему равна производная по направлению, перпендикулярному градиенту?

2. Найдите производную функции $u = x + \ln\left(z^2 + y^2\right)$ в точке $A(2;1;1)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(0;2;0)$.

*Ответ:* $-\sqrt{6}\big/3$.

### 3.2. Дифференцирование неявных функций

Пусть в неявном виде задана дифференцируемая функция переменных $x$ и $y$, определяющая $y$ как функцию от $x$:

$$f(x, y) = 0. \tag{3.5}$$

Тогда, для производной имеет место формула:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \tag{3.6}$$

**Пример 21.** Найдите в точке $x = 1$ первую производную функции, заданной в неявном виде:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0. \tag{3.7}$$

*Решение.* Введем обозначение $f(x, y) \equiv x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$. Тогда,

$$f'_x = 2x - 2y + 1, \; f'_y = -2x + 2y + 1.$$

Подставляя $x = 1$ в (3.7), получаем два значения $y_1 = 0; y_2 = 1$ для ординаты точек, определяемых неявной функцией (3.7). По формуле (3.6) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2y + 1}{-2x + 2y + 1},$$

и соответственно имеем два значения для производной:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 3; \ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1.$$

**Пример 22.** Найдите производную $y'(x)$ функции $y = (\sin x)^{\mathrm{tg} x}$.

*Решение.* Представим два способа решения.

Запишем данную функцию в виде сложной функции двух переменных:

$$y = u^v, \text{ где } u = \sin x; v = \mathrm{tg}\, x.$$

Тогда, согласно формуле (3.1), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} = vu^{v-1}\cos x + u^v \ln u \frac{1}{\cos^2 x} = (\sin x)^{tgx}\left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right).$$

Второй способ основан на методе предварительного логарифмирования исходной (неэлементарной) функции показательно-степенного вида:

$$\ln y = \mathrm{tg}\, x \ln \sin x.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства и считая функцию $y = y(x)$ известной, получаем:

$$\frac{1}{y} y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ln \sin x + \mathrm{tg} x \frac{\cos x}{\sin x} = 1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}.$$

Подставим в последнее соотношение исходную функцию, получаем искомую производную:

$$y'(x) = (\sin x)^{\mathrm{tg} x}\left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right).$$

Аналогично, если $F(x, y, z) = 0$ определяет $z$ как функцию двух переменных $x$ и $y$, причем $F(x, y, z)$ — дифференцируемая функция переменных $x$, $y$ и $z$, и кроме того, $F'_z(x,y,z)\neq 0,$ то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{3.8}$$

**Пример 23.** Найдите частные производные $z'_x$ и $z'_y$ функции $z=f(x,y),$ заданной неявно уравнением $z^3-4xz+y^2-4=0.$

*Решение*. Находим частные производные функции $F(x,y,z)=$ $=z^3-4xz+y^2-4$:

$$F'_x=-4z;\ F'_y=2y;\ F'_z=3z^2-4x.$$

Подставляя их в (3.8), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4z}{3z^2-4x};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{3z^2-4x}.$$

Считаем полезным указать другой способ. Дифференцируя исходное уравнение (записывая в дифференциалах), получаем:

$$3z^2dz-4zdx-4xdz+2ydy=0,$$

откуда находим

$$dz=\frac{4z}{3z^2-4x}dx-\frac{2y}{3z^2-4x}dy.$$

Сравнивая последнее с формулой для дифференциала функции

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

получаем искомые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4z}{3z^2-4x};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{3z^2-4x}.$$

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите частные производные $z'_x$ и $z'_y$ функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $z-x=y\,\mathrm{ctg}(z-x)$, в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

*Ответ:* $z'_x(M_0)=1;\ z'_y(M_0)=2/(2+\pi)$.

### 3.3. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные

Известно множество математических моделей, представленных дифференциальными уравнениями в частных производных и описывающих то или иное явление, либо физический процесс. При этом как исходные уравнения описываемой задачи, так и их решения остаются инвариантными относительно выбора системы координат, в которой проводят вычисление. И в зависимости от исследуемой задачи и ее условий приходится выбирать подходящую систему независимых переменных. При замене переменных в дифференциальных выражениях входящие в них производные следует выразить через производные по новым переменным, используя приведенное выше правило дифференцирования сложных функций. Ниже рассмотрены некоторые из распространенных на практике примеров таких задач.

**Пример 24.** Преобразуйте уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (a\neq 0)$$

к новым независимым переменным $\alpha$ и $\beta$, так что $\alpha=x-at$; $\beta=x+at$.

*Решение*. Применяя формулы (3.2) дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a)+\frac{\partial u}{\partial \beta}a=a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Применяя повторно дифференцирование и используя те же формулы, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}=$$

$$=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a)+a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)a=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x}=$$

$$=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\cdot 1+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}-\right)\cdot 1=\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

Подставив полученные зависимости для $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в исходное уравнение, получим:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right),$$

откуда следует искомое дифференциальное уравнение в новых переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}=0.$$

**Пример 25.** Преобразуйте уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

к полярным координатам $r$ и $\varphi$, положив $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$.

*Решение.* Найдем сначала обратное преобразование:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\operatorname{arct}g\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases},$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}=\cos\varphi; \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{y}{r^2}=-\dfrac{\sin\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}=\sin\varphi; \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{x}{r^2}=\dfrac{\cos\varphi}{r} \end{cases}.$$

Подставим их в формулы (3.2) преобразования частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Повторно применяя формулы (3.2), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u=$$

$$=\cos^2\varphi\cdot u''_{rr}-\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\cdot u''_{r\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\cdot u''_{\varphi\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r}\cdot u'_r+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\cdot u'_\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u=$$

$$=\sin^2\varphi\cdot u''_{rr}+\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\cdot u''_{r\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\cdot u''_{\varphi\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\cdot u'_r-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\cdot u'_\varphi.$$

Подставив их в исходное дифференциальное уравнение, получим уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$u''_{xx}+u''_{yy}=u''_{rr}+\frac{1}{r^2}\cdot u''_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}\cdot u'_r=0.$$

**Пример 26.** Покажите, что функция $z(x,y)=e^{xy}$ является частным решением дифференциального уравнения

$$x^2z''_{xx}-y^2z''_{yy}=0.$$

Преобразуйте это уравнение, приняв за новые независимые переменные

$$u=1-x-y;\ v=2+x+2y.$$

*Решение*. Находим частные производные:

$$z'_x=e^{xy}y;\ z''_{xx}=ye^{xy}y=y^2e^{xy};$$
$$z'_y=e^{xy}x;\ \ z''_{yy}=x^2e^{xy}.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x^2\left(y^2e^{xy}\right)-y^2\left(x^2e^{xy}\right)=0,$$

в результате получаем тождество, подтверждающее, что $z=e^{xy}$ удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению.

Без труда находим обратное преобразование:

$$x=-2u-v+4;\ \ y=u+v-3.$$

Преобразуем теперь частные производные, воспользовавшись формулой (3.2):

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = -z'_u + z'_v;$$
$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = -z'_u + 2z'_v;$$
$$= z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv};$$
$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-z'_u + 2z'_v\right)'_u \cdot u'_y + \left(-z'_u + 2z'_v\right)'_v \cdot v'_y =$$
$$= \left(-z''_{uu} + 2z''_{vu}\right) \cdot (-1) + \left(-z''_{uv} + 2z''_{vv}\right) \cdot 2 = z''_{uu} - 4z''_{uv} + 4z''_{vv}.$$

Подставим теперь в исходное дифференциальное уравнение:

$$\left(-2u - v + 4\right)^2 \left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right) - \left(u + v - 3\right)^2 \left(z''_{uu} - 4z''_{uv} + 4z''_{vv}\right) = 0$$

и получаем конечный вид исходного дифференциального уравнения в новых переменных:

$$A\left(u,v\right) \cdot z''_{uu} + 2B\left(u,v\right) \cdot z''_{uv} + C\left(u,v\right) \cdot z''_{vv} = 0,$$

где обозначено

$$A \equiv \left(-2u - v + 4\right)^2 - \left(u + v - 3\right)^2; \quad B \equiv -\left(-2u - v + 4\right)^2 + 2\left(u + v - 3\right)^2;$$
$$C \equiv \left(-2u - v + 4\right)^2 - 4\left(u + v - 3\right)^2.$$

# 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

## 4.1. Дифференциальные операторы

Напомним, что *вектор-градиент* функции $U(x, y, z)$

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \equiv \nabla U \qquad (4.1)$$

был рассмотрен ранее. Градиент функции направлен по нормали поверхности (линии) уровня $U(x, y, z) = C$ в точке $M$ в сторону возрастания функции $U(x, y, z)$ и по величине (длине) равен наибольшей скорости изменения $U(x, y, z)$ в точке $M$:

$$\left|gradU(M)\right| = \max_{l} \frac{\partial U}{\partial l}.$$

***Определение 13.*** *Дивергенцией векторного поля* $\vec{v}(M) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ называется скаляр следующего вида:

$$div\vec{v}(M) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v}. \qquad (4.2)$$

*Вихрем векторного поля* $\vec{a}(M) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называется вектор

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (4.3)$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным*, если существует скалярная функция $U = f(x, y, z)$ (называемая потенциалом поля) такая, что

$$\vec{a}(x, y, z) = gradU. \qquad (4.4)$$

Для потенциальности поля $\vec{a}(x, y, z)$, определенного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было *безвихревым*, т.е. $rot\vec{a} = 0.$ В таком случае существует потенциал $U(x, y, z)$, определяемый из уравнения

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Векторное поле называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля выполняется условие $div\vec{a} = 0.$ Если поле $\vec{a}(M)$ является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $div\left(gradU\right)=0$ и потенциал функции $U$ является *гармонической функцией*, т.е. $U(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U(x,y,z)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

где $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа.

**Пример 27.** Определите градиент функции $z(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ в точке $M\left(2;4\right)$.

*Решение.* Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\Rightarrow\frac{\partial z\left(M\right)}{\partial x}=2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}y\Rightarrow\frac{\partial z\left(M\right)}{\partial y}=\frac{2}{3}.$$

Значит,

$$gradz\left(M\right)=2\vec{i}+\frac{8}{3}\vec{j}.$$

Уравнение линии уровня, проходящей через данную точку, имеет вид:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3}.$$

**Пример 28.** Вычислите дивергенцию и вихрь вектора $\vec{a}\left(x,y,z\right)\equiv$ $\equiv\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

*Решение.* По условию, координаты вектора $\vec{a}$ имеют вид $a_x=x$; $a_y=y$; $a_z=z$.

Следовательно,

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=1+1+1=3;$$

$$rot\vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\vec{i} - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right)\vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0},$$

так как $x$, $y$, $z$ — не зависимые между собой переменные.

## 4.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

***Определение 14.*** *Касательной плоскостью* к поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4.5}$$

в точке $M$ (точке касания) называется плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку.

*Нормалью* к поверхности в точке касания $M$ называется прямая, проведенная через данную точку перпендикулярно у касательной плоскости.

Заметим, что в особых точках поверхности (т.е. точках, в которых все три частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю или хотя бы одна из них не существует) касательная плоскость может не существовать.

Если уравнение гладкой поверхности задано в виде (4.5), то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0, \tag{4.6}$$

где $\vec{n} = F'_x(M_0)\vec{i} + F'_y(M_0)\vec{j} + F'_z(M_0)\vec{k}$ — вектор нормали к поверхности в точке $M_0$;

соответственно, уравнение нормали к поверхности (4.5) в точке $M_0$ будет:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \tag{4.7}$$

**Пример 29.** Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ в ее точке $M_0\left(2;-1;1\right)$.

*Решение.* Примем, что $F\left(x,y,z\right)=z-\frac{x^2}{2}+y^2.$ Тогда,

$$F'_x=-x;F'_y=2y;F'_z=1\Rightarrow F'_x\left(M_0\right)=-2;F'_y\left(M_0\right)=-2;F'_z\left(M_0\right)=1.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали соответственно принимают вид:

$$-2\left(x-2\right)-2\left(y+1\right)+\left(z-1\right)=0\Rightarrow 2x+2y-z-1=0;$$
$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

**Пример 30.** На поверхности $x^2+y^2-z^2-2x=0$ найдите точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости *xoz*.

*Решение.* Найдем направление вектора нормали к исходной поверхности:

$$F'_x=2x-2;\ F'_y=2y;\ F'_z=-2z.$$

С другой стороны, нормаль к координатной плоскости *xoz* (или, что то же, вектор, направленный вдоль оси *oy*) имеет вид $\vec{n}=\left(0;1;0\right)$. Решая совместно уравнение поверхности, и условие коллинеарности вектора нормали к поверхности в произвольной точке *M*(*x*; *y*; *z*) и направляющего вектора оси *oy*, находим искомые точки на поверхности:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2-2x=0 \\ 2x-2=\lambda\cdot 0=0 \\ 2y=\lambda\cdot 1=\lambda \\ 2z=\lambda\cdot 0=0 \end{cases},$$

откуда получаем, что $x=1;\ z=0$. Подставим их в уравнение поверхности:

$$y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm 1.$$

Таким образом, нашли на заданной поверхности точки $M_1(1;1;0)$ и $M_2(1;-1;0)$, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости *xoz*.

Отметим, что приведенные выше дифференциальные операторы находят широкое применение в интегральном исчислении функции многих переменных и его приложениях, а также в курсе уравнений в частных производных и математической физики.

**Выполните самостоятельно.** 1. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $e^x-z+xy=3$ в точке $M(2;\ 1;\ 0)$.

*Ответ:* $x+2y=4;\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}.$

2. Составьте уравнение плоскости, касательной к поверхности $3x^2+2y^2+z^2=21$, параллельной плоскости $6x-4y-z=0$.

*Ответ:* $6x-4y-z=\pm 21.$

3. К поверхности $xy+xz+z^2=1$ проведите касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$. Укажите соответствующую точку на поверхности. Составьте также уравнение нормали к поверхности в найденной точке.

*Ответ:* $M_0\left(-2/\sqrt{5};-1/\sqrt{5};3/\sqrt{5}\right);\ x-y+2z-\sqrt{5}=0;$

$$\frac{\sqrt{5}x+2}{3}=\frac{\sqrt{5}y+1}{-2}=\frac{\sqrt{5}z-3}{4}.$$

# 5. ЛОКАЛЬНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМЫ

## 5.1. Локальный экстремум

***Определение 15.*** Говорят, что функция $f(x,y)$ имеет *максимум (минимум)* в точке $M_0(x_0;y_0)$, если для всех отличных от $M_0$ точек $M(x;y)$ в достаточно малой окрестности точки $M_0$ выполнено неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ (или соответственно $f(x_0,y_0)<f(x,y)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Иначе говоря, функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

**Теорема 3 (необходимое условие экстремума).** Если функция $z=f(x,\ y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$, то каждая из частных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или хотя бы одна из них не существует.

Такие точки возможного экстремума $M_0(x_0;y_0)$ называют *критическими*.

**Пример 31.** Рассмотрим две функции: $f_1(x,\ y)=(x-1)^2(y+2)^4+5$ и $f_2(x,\ y)=(x-1)^3(y+2)^4+5.$ Точка $M_0(1;-2)$ является критической для обеих функций, однако при этом первая функция достигает минимума в точке $M_0$, а для второй функции $M_0$ не является точкой экстремума.

**Теорема 4 (достаточное условие экстремума).** Пусть функция $z=f(x,\ y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Предположим еще, что $M_0(x_0;y_0)$ является критической (стационарной) точкой для функции $f(x,\ y)$, т.е. $f'_x(x_0,\ y_0)=f'_y(x_0,\ y_0)=0.$ Введем для удобства обозначения: $A=f''_{xx}(M_0);B=f''_{xy}(M_0);$ $C=f''_{yy}(M_0);\Delta=AC-B^2.$

Тогда в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1) $f(x, y)$ имеет максимум, если $\Delta > 0$ и $A < 0$ (или $C < 0$);
2) $f(x, y)$ имеет минимум, если $\Delta > 0$ и $A > 0$ (или $C > 0$);
3) $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если $\Delta < 0$;
4) если $\Delta = 0$, то вопрос наличия экстремума остается открытым (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

**Пример 32.** Найдите локальный экстремум функции двух аргументов

$$z = x^3 + y^3 - 9xy.$$

*Решение.*

1) Найдем частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y.$

2) Найдем критические точки, т.е. точки, в которых частные производные обращаются в нуль.

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0, \\ 3y^2 - 9x = 0, \end{cases} \text{ или } \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{array}\right. \text{ и } \left[\begin{array}{l} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{array}\right.$$

3) Найдем вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9;$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,$ а затем их значения в критических точках: $A_1 = 0,$ $B_1 = -9,$ $C_1 = 0$ и $A_2 = 18,$ $B_2 = -9,$ $C_2 = 18.$

a) $\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = -81 < 0$ и, следовательно, в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет;

b) $\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 324 - 81 > 0$ и, следовательно, в точке $M_2(3;3)$ есть экстремум. Поскольку в этом случае $A_2 = 18 > 0,$ точка $M_2(3,3)$ является точкой локального минимума.

**Пример 33.** Найдите локальный экстремум функции двух переменных

$$z = 3x^2 y - x^3 - y^4.$$

*Решение.* Находим точки возможного экстремума из решения системы:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 6xy - 3x^2 = 3x(2y - x) = 0 \\ z'_y \equiv 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}, \text{ или}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, \\ x = 2y \Rightarrow 4y^2(3 - y) = 0 \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 6. \end{array}\right.$$

Итак, нашли 2 точки возможного экстремума: $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$. Проверяем достаточные условия существования экстремума:

$$A \equiv z''_{xx} = 6y - 6x;\ C \equiv z''_{yy} = -12y^2;\ B \equiv z''_{xy} = 6x.$$

Для точки $M_1(0;0)$ получаем: $A_1 = 0;\ C_1 = 0;\quad B_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0$. То есть, в точке $M_1$ требуется провести дополнительное исследование:

$$z(M_1) = 0;$$

При $x < 0;\ y = 0 \Rightarrow z(x, y) = -x^3 > 0;$

а при $x = 0;\ y \neq 0 \Rightarrow z(x, y) = -y^4 < 0.$

Итак, в окрестности точки $M_1(0;0)$ функция $z = z(x, y)$ принимает как значения, большие $z(M_1)$, так и меньшие $z(M_1)$. Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ функция $z(x, y)$ не достигает экстремума.

В точке $M_2(6;3)$ имеем: $A_2 = -18 < 0;$ $C_2 = -108 < 0;$ $B_2 = 36 \Rightarrow \Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 108 \cdot 18 - 36^2 > 0.$

Значит, $M_2$ — точка максимума, причем $z_{\max} = z(M_2) = 27.$

Переходим к нахождению экстремумов функций трех (и более) переменных.

Ищем сначала точки возможного экстремума (критические точки) $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Для дифференцируемой функции $u=f(x,\,y,z)$ это сводится к условию:

$$df\left(M_0\right)\equiv f_x'\left(M_0\right)dx+f_y'\left(M_0\right)dy+f_z'\left(M_0\right)dz=0. \qquad (5.1)$$

Вопрос наличия в точке $M_0$ экстремума определяется знаком приращения функции в малой окрестности этой точки:

$$\begin{cases} \Delta f\left(M_0\right)=df\left(M_0\right)+\dfrac{1}{2!}d^2f\left(M_0\right)+o\left(\rho^2\right), \\ \rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}\equiv\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2+\left(dz\right)^2} \end{cases}, \qquad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что

$$\Delta f\left(M_0\right)=\begin{cases} <0, d^2f\left(M_0\right)<0\Rightarrow M_0-\max \\ >0, d^2f\left(M_0\right)>0\Rightarrow M_0-\min \end{cases}.$$

Дифференциал второго порядка дифференцируемой функции $u=f(x,\,y,z)$ в точке $M_0$ представляет собой квадратичную форму

$$d^2f\left(M_0\right)=\left(dx,dy,dz\right)\begin{pmatrix} f_{xx}''\left(M_0\right) & f_{xy}''\left(M_0\right) & f_{xz}''\left(M_0\right) \\ f_{yx}''\left(M_0\right) & f_{yy}''\left(M_0\right) & f_{yz}''\left(M_0\right) \\ f_{zx}''\left(M_0\right) & f_{zy}''\left(M_0\right) & f_{zz}''\left(M_0\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}=$$

$$=f_{xx}''\left(M_0\right)dx^2+2f_{xy}''dxdy+2f_{xz}''dxdz+2f_{yz}''\left(M_0\right)dydz+$$

$$+f_{yy}''dy^2+f_{zz}''dz^2. \qquad (5.3)$$

Квадратичная форма $d^2 f\left(M_0\right)$ называется *положительно определенной* (или знакоположительной), если для любого направления $\vec{l}=\left(dx,dy,dz\right)$ в точке $M_0$ выполняется неравенство $d^2 f\left(M_0\right)>0.$

Матрицу $f_{ij}\equiv f_{x_i x_j}''\left(M_0\right),\left(x_1\equiv x,x_2\equiv y,x_3\equiv z\right)$ в формуле (5.3) называют *матрицей Гессе*, а миноры, примыкающие к левому верхнему углу этой матрицы, — *угловыми*.

Имеет место *критерий Сильвестра*. Для того чтобы квадратичная форма $d^2 f\left(M_0\right)$ с матрицей $f_{ij}\left(M_0\right)$ была *положительно (отрицательно) определенной*, необходимо и достаточно, чтобы для угловых миноров матрицы $f_{ij}\left(M_0\right)$

$$\Delta_1=f_{xx}''\left(M_0\right);\Delta_2=\begin{vmatrix} f_{xx}''\left(M_0\right) & f_{xy}''\left(M_0\right)\\ f_{yx}''\left(M_0\right) & f_{yy}''\left(M_0\right)\end{vmatrix};\Delta_3=\begin{vmatrix} f_{xx}''\left(M_0\right) & f_{xy}''\left(M_0\right) & f_{xz}''\left(M_0\right)\\ f_{yx}''\left(M_0\right) & f_{yy}''\left(M_0\right) & f_{yz}''\left(M_0\right)\\ f_{zx}''\left(M_0\right) & f_{zy}''\left(M_0\right) & f_{zz}''\left(M_0\right)\end{vmatrix}$$

выполнялись условия:

1) если все угловые миноры положительны, то квадратичная форма будет положительно определенной (т.е. в критической точке $M_0$ функция $u=f\left(x,\ y,z\right)$ достигает минимума);
2) если миноры $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ чередуют знаки, начиная с отрицательного, то квадратичная форма будет отрицательно определенной (т.е. в критической точке $M_0$ функция $u=f(x,\ y,z)$ достигает максимума).

**Пример 34.** Исследуйте на локальный экстремум функцию трех переменных

$$u=f\left(x,y,z\right)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z.$$

*Решение.* Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} f_x'=3x^2+12y=0\\ f_y'=2y+12x=0\\ f_z'=2z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} M_1\left(x_2=24;y_2=-144;z_2=-1\right),\\ M_2\left(x_1=0;y_1=0;z_1=-1\right)\end{cases}.$$

Вычисляем вторые производные:

$$f_{xx}'' = 6x;\ f_{xy}'' = 12;\ f_{xz}'' = 0;\ f_{yy}'' = 2;\ f_{yz}'' = 0;\ f_{zz}'' = 2.$$

Определяем матрицу Гессе и угловые миноры в указанных точках:

1) $M_1$: $f_{ij}\left(M_1\right) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 144 > 0$; $\Delta_2 = 144 > 0$; $\Delta_3 = 288 > 0$.

Следовательно, $M_1$ — точка минимума.

2) $M_2$: $f_{ij}\left(M_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = -144$; $\Delta_3 = -288$.

В точке $M_2$ условия критерия Сильвестра не выполняются, а значит, требуется дополнительное исследование. Можно показать, что в точке $M_2$ функция не достигает экстремума (эти рассуждения мы опускаем).

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите локальные экстремумы функции $z\left(x, y\right) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

*Ответ:* $\left(0;3\right)$ — max.

2. Исследуйте на локальные экстремумы функцию $u\left(x, y\right) = x^2 - 4xy + 8y^3$.

*Ответ:* $\left(0;0\right)$ — нет экстремума; $\left(2/3;1/3\right)$ — min.

3. Найдите локальные экстремумы функции $u\left(x, y\right) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

*Ответ:* $\left(3;2\right)$ — min; $\left(-3;-2\right)$ — max.

## 5.2. Условный экстремум

Во многих задачах на отыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к нахождению максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны между собой некоторыми дополнительными условиями (например, они должны удовлетворять заданным уравнениям).

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

Из данного куска жести площадью $2a$ нужно сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Если обозначить длину, ширину и высоту коробки через $x$, $y$, $z$, то задача сводится к нахождению максимума функции

$$u = xyz \tag{5.1}$$

при условии, что

$$2xy + 2xz + 2yz = 2a. \tag{5.2}$$

Здесь мы имеем *задачу на условный экстремум* функции (5.1), при котором переменные $x$, $y$, $z$ связаны дополнительным условием (5.2). Ниже мы представим метод решения таких задач.

Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x, y) \tag{5.3}$$

при условии, что переменные $x$ и $y$ связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{5.4}$$

При наличии условия (5.4) из двух переменных $x$ и $y$ независимым будет только одно, например $x$, так как $y$ определяется из равенства (5.4) как функция от $x$. Если разрешим уравнение (5.4) относительно $y$, то получим функцию одной переменной $x$ и сведем задачу к задаче об исследовании на экстремум функции одной независимой переменной $x$.

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнение (5.4) относительно $x$ или $y$. Чтобы найти условный экстремум функции $f\left(x,\ y\right)$ при наличии условия (5.4), поступают следующим образом.

1. Составляют так называемую функцию Лагранжа

$$L(x,y,t)=f(x,y)+t\cdot\varphi(x,y), \tag{5.5}$$

где $t$ — неопределенный постоянный множитель. Необходимые условия экстремума сводятся к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x}+t\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial y}+t\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t}\equiv\varphi\left(x,y\right)=0 \end{cases} \tag{5.6}$$

с тремя неизвестными $x$, $y$, $t$, из которой определяются точки возможного экстремума $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и значения для множителя Лагранжа $t$.

Понятно, что наличие экстремума в точке возможного экстремума $M_0$ определяется знаком приращения

$$\Delta f\left(M_0\right)=df\left(M_0\right)+\frac{1}{2}d^2f\left(M_0\right)+o\left(\rho^2\right),\quad \rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}.$$

2. Далее можем продолжить исследование двумя путями.

2а. Найдем знак определителя $\tilde{\Delta}\left(M_0\right)=L''_{xx}L''_{yy}-L''^{\,2}_{xy}$, куда подставлено соответствующее значение множителя Лагранжа $t=t_0$;

$$\tilde{\Delta}\left(M_0\right)=\begin{cases} >0,\ \textit{точка экстр.} \\ <0,\ \textit{экстр. нет.} \end{cases}$$

А именно, если $L''_{xx}\left(M_0\right)>0,$ то функция достигает минимума в точке $M_0$;
если $L''_{xx}\left(M_0\right)<0,$ то функция достигает максимума в точке $M_0$.

2б. Составим в каждой точке возможного экстремума квадратичную форму $d^2L(M_0)=-\frac{dx^2}{\varphi_y'^2}\left|\tilde{H}\right|$, где $\left|\tilde{H}\right|$ — окаймленный гессиан матрицы

$$\tilde{H}=\begin{pmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{pmatrix};$$

если при этом $\left|\tilde{H}(M_0)\right|>0 \Rightarrow d^2L(M_0)<0,$ то $M_0$ — точка максимума;

если $\left|\tilde{H}(M_0)\right|<0 \Rightarrow d^2L(M_0)>0,$ то $M_0$ – точка минимума;

если $\left|\tilde{H}(M_0)\right|=0,$ то необходимо продолжить исследование, воспользовавшись другим способом.

Отметим, что указанный способ нахождения условного экстремума имеет место и в случае функций трех переменных.

**Пример 35.** Найдите условный экстремум функции $z=xy$ при условии, что $x$ и $y$ связаны уравнением $5x+2y-20=0.$

*Решение.* Выразим из дополнительного условия $y$ через $x$:

$$y=\frac{20-5x}{2}=-\frac{5}{2}(x-4),$$

и подставим в функцию $z=xy$:

$$z(x,y(x))=-\frac{5}{2}x(x-4).$$

Найдем точку возможного экстремума:

$$z'(x)=-\frac{5}{2}(2x-4)=-5(x-2)=0 \Rightarrow x_0=2.$$

Находим вторую производную:

$$z''(x)=-5<0.$$

Следовательно, $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{-5}{2}(x_0 - 4) = 5;$ и $M_0(2;5)$ — точка условного максимума функции $z = xy,$ причем $z_{max} = 10.$

**Пример 36.** Найдите экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии, что переменные $x$ и $y$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1.$

*Решение.* Поясним геометрический смысл задачи: требуется найти наибольшее и наименьшее значения аппликаты $z$ в плоскости для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 1.$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, t) = 6 - 4x - 3y + t\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Найдем $\frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2tx;$ $\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2ty.$ Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} -4 + 2tx = 0 \\ -3 + 2ty = 0. \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Последняя система дает две точки возможного экстремума:

$$t_1 = \frac{5}{2};\ x_1 = \frac{4}{5};\ y_1 = \frac{3}{5}$$

и

$$t_2 = -\frac{5}{2};\ x_2 = -\frac{4}{5};\ y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Найдем вторые производные:

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2t;\ B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;\ C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2t.$$

Следовательно, $\Delta = AC - B^2 > 0$ в каждой из точек возможного экстремума. При этом в первой точке $A_1 = 5 > 0$, значит, $M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ — точка минимума, и $z_{\min} = 6 - 4x_1 - 3y_1 = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$ Во второй точке $A_2 = -5 < 0.$ то есть $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ — точка максимума, и $z_{\max} = 6 - 4x_1 - 3y_1 = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11.$

Подтвердим этот факт вторым способом, с помощью гессиана.

1) $M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 8/5 & 6/5 \\ 8/5 & 5 & 0 \\ 6/5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\tilde{H}\right| < 0$ — точка минимума;

2) $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & -8/5 & -6/5 \\ -8/5 & -5 & 0 \\ -6/5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\tilde{H}\right| > 0$ — точка максимума.

**Пример 37.** Исследуйте на экстремум функцию $z = 5xy - 4$ при условии, что переменные $x$ и $y$ положительны и удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$

*Решение.* Составим функцию Лагранжа и найдем ее стационарные точки:

$$L(x, y, t) = 5xy - 4 + t\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 5y + \dfrac{tx}{4} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 5x + ty = 0 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -5xy \\ x = 2y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ t = -10 \end{cases}.$$

Установим характер экстремума в найденной точке возможного экстремума $M_0(2;1)$, исходя из знака $d^2L(M_0)$:

$L''_{xx} = t/4;\ L''_{xy} = 5;\ L''_{yy} = t;$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4}dx + ydy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{xdx}{4y}$$

$$\begin{cases} L''_{xx}(M_0) = -5/2;\ L''_{xy} = 5;\ L''_{yy} = -10 \\ dy = -\dfrac{xdx}{4y} \end{cases};$$

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = -10dx^2 < 0.$$

Следовательно, $M_0(2;1)$ — точка условного максимума, причем $z_{\max} = 10 - 4 = 6.$

**Пример 38.** Найдите экстремум функции $u = 2x + y - z + 1$ при условии, что переменные $x$, $y$ и $z$ удовлетворяют уравнению связи $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$

*Решение*. Составим функцию Лагранжа и найдем ее стационарные точки:

$$L(x,y,t) = u(x,y,z) + tf(x,y,z) = 2x + y - z + 1 + t\left(x^2 + y^2 + 2z^2 - 22\right);$$

$$\begin{cases} L'_x = 2 + 2tx = 0 \\ L'_y = 1 + 2ty = 0 \\ L'_z = -1 + 4tz = 0 \\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 22 \end{cases}.$$

В результате получим 2 точки:

$$M_1\left(4;2;-1\right) \text{ при } t_1=-1/4;\;\; M_2\left(-4;-2;1\right) \text{ при } t_2=1/4.$$

Составим окаймленную матрицу Гессе:

$$f'_x=2x;\; f'_y=2y;\; f'_z=4z;$$
$$L''_{xx}=2t; L''_{xy}=0; L''_{xz}=0; L''_{yy}=2t; L''_{yz}=0; L''_{zz}=4t;$$
$$\tilde{H}=\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2t & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2t & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix}.$$

Определим знаки угловых миноров $H_{2m+1}, H_{2m+2},..., H_{m+n}$ матрицы $\tilde{H}$ ($m=1$ — количество условий связи; $n=3$ — число независимых переменных). Так как $2m+1=3$ и $m+n=4$, то достаточно найти $H_3$ и $H_4\equiv\left|\tilde{H}\right|$:

$$H_3=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2t & 0 \\ 2y & 0 & 2t \end{vmatrix}=-8t\left(x^2+y^2\right);$$

$$H_4=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2t & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2t & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4t \end{vmatrix}=-32t^2\left(x^2+y^2+2z^2\right);$$

$$H_3\left(M_1\right)=40; H_4\left(M_1\right)=-44;\; H_3\left(M_2\right)=-40; H_4\left(M_2\right)=-44.$$

Знаки $H_3\left(M_1\right)$ и $H_4\left(M_1\right)$ чередуются, причем знак $H_3\left(M_1\right)$ совпадает со знаком $\left(-1\right)^{m+1}=\left(-1\right)^2=1$, поэтому $M_1$ — точка условного максимума, $u_{\max}=12$.

Миноры $H_3(M_2)$ и $H_4(M_2)$ одного знака, совпадающего со знаком $(-1)^m = -1,$ поэтому $M_2$ — точка условного минимума, $u_{\min} = -10.$

**Пример 39.** Найдите кратчайшее расстояние от точки $O(0;0)$ до кривой

$$\varphi(x, y) \equiv x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \qquad (5.7)$$

*Решение*. Заметим, что кривая $\varphi(x, y) = 0$ симметрична относительно начала координат. Из чего следует, что задача имеет соответственно два решения. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка на кривой (5.7). Тогда расстояние от точки $M$ до точки $O$ равно

$$\rho(x; y) = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В результате приходим к следующей задаче об условном экстремуме функции $\rho(x; y)$ при условии (5.7). Однако для упрощения вычислений вместо $\rho(x; y)$ возьмем $\rho^2(x; y)$ и составим для последней функции лагранжиан:

$$L(x, y, t) = \rho^2(x, y) + t \cdot \varphi(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) + t\left(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225\right),$$

который позволит определить искомую точку на кривой (5.7), в которой достигается наименьшее значение функции $\rho = \rho(x, y).$ Находим точки возможного экстремума из решения следующей системы:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x + t(2x + 8y) = 0 \\ L'_y \equiv 2y + t(8x + 14y) = 0 \\ L'_t \equiv x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \end{cases} \qquad (5.8)$$

Из первых двух уравнений системы, исключив неизвестный параметр $t$, находим подстановки:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+4y}{4x+7y}\Rightarrow\frac{x}{y}\equiv k\Rightarrow 2k^2+3k-2=0\Rightarrow k_{1,2}=\left[\begin{array}{l}-2\\ 1/2\end{array}\right..$$

Итак, нашли 2 подстановки для определения точек возможного экстремума.

1) $\frac{x}{y}=-2\Rightarrow x=-2y.$

Подставим последнее в третье уравнение системы (5.8), в результате получаем:

$$4y^2-16y^2+7y^2-225=0\Rightarrow 5y^2+225=0.$$

Последнее уравнение не имеет решений в классе действительных чисел.

2) $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2x.$

Подставим в последнее уравнение системы (5.8):

$$x^2+16x^2+28x^2-225=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}.$$

Следовательно, получаем 2 точки возможного экстремума:

$$M_1\left(x_1=\sqrt{5};y_1=2\sqrt{5}\right);t_1=-\frac{x_1}{x_1+4y_1}=-\frac{1}{9};$$

$$M_2\left(x_2=-\sqrt{5};y_2=-2\sqrt{5}\right);t_2=-\frac{x_2}{x_2+4y_2}=-\frac{1}{9}.$$

Применим теперь достаточные условия существования условного экстремума. Для этого находим вторые частные производные:

$$A\equiv L''_{xx}=2+2t;\ C\equiv L''_{yy}=2+13t;\ B\equiv L''_{xy}=8t.$$

1) Для точки $M_1$ получаем: $A_1 = 2 + 2\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} > 0;\quad C_1 = \frac{4}{9} > 0;$ $B_1 = -\frac{8}{9};\quad \Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0,$ т.е. исследование нужно продолжить другим способом.

Определим знак второго дифференциала от лагранжиана:

$$d^2L(M_1) = L''_{xx}(M_1)dx^2 + 2L''_{xy}(M_1)dxdy + L''_{yy}(M_1)dy^2 =$$
$$= \frac{4}{9}\left(4dx^2 - 4dxdy + dy^2\right).$$

Из условия (5.7) находим связь между дифференциалами $dx$ и $dy$ в исследуемой точке $M_1$:

$$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \Rightarrow (2x_1 + 8y_1)dx + (8x_1 + 14y_1)dy =$$
$$= 0 \Rightarrow dx = -2dy.$$

Следовательно,

$$d^2L(M_1) = \frac{4}{9}(dx)^2\left[4 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{25}{9}(dx)^2 > 0 \text{ при}$$

$(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0,$ то есть $M_1$ — точка условного минимума функции $\rho(x,y)$.

2) Переходим к исследованию точки $M_2$ на условный экстремум. Проводя выкладки, аналогичные предыдущему случаю, находим такую же зависимость между дифференциалами $dx$ и $dy$, а также второй дифференциал $d^2L(M_2)$ в точке $M_2$:

$dx = -2dy \Rightarrow d^2L(M_2) > 0,$ то есть $M_2$ — также будет точкой условного минимума функции $\rho(x,y)$.

Запишем ответ: кратчайшее расстояние от точки $O(0;\,0)$ до кривой (5.7) равно

$$\rho_{\min} = \rho\left(M_1\right) = \rho\left(M_2\right) = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} = 5$$

и достигает в двух точках $M_1$ и $M_2$, лежащих на кривой (5.7).

Приведем другой способ решения задачи, основанный на применении гессиана $\left(n = 2;\, m = 1;\, H_{2m+1} = H_3 \equiv \tilde{H}\right)$:

$$\left|\tilde{H}\left(M_1\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 16/9 & -8/9 \\ 36\sqrt{5} & -8/9 & 4/9 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow d^2L\left(M_1\right) > 0 \text{ —}$$

минимум;

$$\left|\tilde{H}\left(M_2\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} \\ -18\sqrt{5} & -16/9 & -8/9 \\ -36\sqrt{5} & -8/9 & 4/9 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow d^2L\left(M_1\right) > 0 \text{ —}$$

минимум.

**Пример 40.** Найдите кратчайшее расстояние от точки $A(0;3;3)$ до точки пересечения двух поверхностей

$$\varphi_1\left(x, y, z\right) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \tag{5.9}$$

$$\varphi_2\left(x, y, z\right) \equiv x + y + z - 1 = 0. \tag{5.10}$$

*Решение.* Пусть $M\left(x; y; z\right)$ — произвольная точка на линии пересечения поверхностей (5.9) и (5.10). Тогда расстояние от точки $M$ до точки $A$ равно

$$\rho\left(x; y; z\right) = AM = \sqrt{x^2 + \left(y-3\right)^2 + \left(z-3\right)^2}.$$

Однако, как и в предыдущей задаче, вместо $\rho\left(x; y; z\right)$ выберем $\rho_0\left(x; y; z\right) = \rho^2\left(x; y; z\right)$. Выразим переменную $z$ из (5.10) через $x$, $y$ и тем самым уменьшим число независимых переменных и количество уравнений связей на единицу:

$$z = 1 - x - y \Rightarrow \rho\left(x; y; z\left(x, y\right)\right) = \sqrt{x^2 + \left(y-3\right)^2 + \left(x+y+2\right)^2}.$$

В результате приходим к задаче об условном экстремуме функции двух переменных, для которой составляем лагранжиан:

$$L(x, y, t) = \left[x^2 + \left(y-3\right)^2 + \left(x+y+2\right)^2\right] + t\left(x^2 + y^2 + xy - x - y\right).$$

Найдем точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x + 2\left(x+y+2\right) + t\left(2x+y-1\right) = 0 \\ L'_y \equiv 2\left(y-3\right) + 2\left(x+y+2\right) + t\left(x+2y-1\right) = 0. \\ L'_t \equiv x^2 + y^2 + xy - x - y = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

Из первых двух уравнений системы, исключая неизвестный параметр $t$, найдем подстановку:

$$\frac{4x+2y+4}{2x+4y-2} = \frac{2x+y-1}{x+2y-1} \Rightarrow x = -2y+1.$$

Подставим ее в третье уравнение системы (5.11):

$$\left(-2y+1\right)^2 + y^2 + \left(-2y+1\right)y - \left(-2y+1\right) - y = 0 \Rightarrow y\left(3y-2\right) = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 2/3 \end{array}\right..$$

Получаем две точки возможного экстремума:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; z_1 = 0 \\ y_2 = 2/3 \Rightarrow x_2 = -1/3; z_2 = 2/3 \end{array}\right., \text{ или}$$

$$M_1\left(x_1 = 1;\ y_1 = 0;\ z_1 = 0\right);\ t_1 = -\frac{4x_1 + 2y_1 + 4}{2x_1 + y_1 - 1} = -8;$$

$$M_2\left(x_2 = -1/3;\ y_2 = 2/3;\ z_2 = 2/3\right);\ t_2 = -\frac{4x_2 + 2y_2 + 4}{2x_2 + y_2 - 1} = 4.$$

Переходим к достаточным условиям существования экстремума, для этого находим вторые частные производные:

$$A \equiv L''_{xx} = 4 + 2t;\ C \equiv L''_{yy} = 4 + 2t;\ B \equiv L''_{xy} = 2 + t.$$

1) Точка $M_1$ $A_1 = 4 - 16 = -12 < 0;\ C_1 = -12 < 0;\ B_1 = -6;$
$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 144 - 36 > 0,$ т.е. $M_1$ — точка условного максимума.

2) Точка $M_2$: $A_1 = 4 + 8 = 12 > 0;\ C_2 = 12 > 0;\ B_1 = 6;$

$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 144 - 36 > 0,$ т.е. $M_2$ — точка условного минимума, совпадающая с точкой пересечения поверхностей (5.9) и (5.10) и наиболее близко расположенная к заданной точке $A(0;3;3)$. Это расстояние равно

$$\rho_{\min} = AM = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 3)^2 + (z_2 - 3)^2} =$$
$$\sqrt{(-1/9)^2 + (2/3 - 3)^2 + (2/3 - 3)^2} = \sqrt{11}.$$

Отметим, что не составляет труда решить эту задачу с помощью окаймленного гессиана — данный вопрос предлагаем в качестве самостоятельной работы.

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите точку локального минимума функции $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2.$

2. Используя один из известных методов, найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 y,$ если известно, что $x$ и $y$ связаны уравнением $x + y - 2 = 0.$

*Ответ*: $M_1(1;1), M_2(-1;-1)$ — точки максимума;
$M_3(1;-1)$ — точка минимума.

3. Найдите локальные условные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy$ при условии $x^2 + y^2 - 2 = 0.$

*Ответ*: $M_1(1;1);\ M_2(-1;-1)$ — точки максимума;
$M_3(-1;1);\ M_4(1;-1)$ — точки минимума.

4. Найдите наиболее удаленную от начала координат точку кривой, по которой пересекаются две поверхности: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (конус) и $x - 2z - 3 = 0$ (плоскость).

*Ответ*: наименьшее расстояние $\sqrt{2}$ — до точки $A(1;0;-1)$; $\lambda_1 = -1/3;\ \lambda_2 = -4/3;$

наибольшее расстояние $3\sqrt{2}$ — до точки $B(-3;0;-3)$; $\lambda_1 = -3;$ $\lambda_2 = -12.$

### 5.3. Глобальный экстремум

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего и наименьшего значений (глобального экстремума) либо в стационарной точке, либо в точке границы области.

**Пример 41.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(4 - x - y)$ в треугольнике OAB, ограниченном прямыми $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 8.$

*Решение.*

1) Найдем критические точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем:

$$z'_x = 4y - 2xy - y^2 = y(4 - 2x - y),\ z'_y = 4x - x^2 - 2xy = x(4 - 2y - x).$$

Приравниваем обе частные производные к нулю, в результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} y(4 - 2x - y) = 0, \\ x(4 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что внутри треугольника $x > 0,\ y > 0,$ приходим к системе

$$\begin{cases} 2x + y = 4; \\ x + 2y = 4, \end{cases}$$

откуда $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{4}{3}$. Полученная критическая точка $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ лежит внутри треугольника. Находим значение функции в этой точке:

$$z=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\left(4-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}.$$

2) Граница области состоит из трех участков: $[AO]$: $y=0$; $[OB]$: $x=0$ и $[AB]$: $x+y=8$.

На участках $[AO]$; $[OB]$ значения функции $z=xy(4-x-y)$ равны нулю. На участке $[AB]$, где $y=8-x$ и $0\le x\le 8$ функция $z=xy(4-x-y)$ превращается в функцию одной переменной $z=4x(x-8)$. Найдем критические точки этой функции на отрезке $[0,8]$: $z'_x=4(2x-8)=0$, откуда $x=4$. Вычислим значения функции $z=4x(x-8)$ на концах отрезка $[0,8]$ и в точке $x=4$: $z(0)=0$, $z(4)=-64$, $z(8)=0$.

3) Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z$ среди следующих ее значений: $z=\frac{64}{27}$ в точке $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$; $z=0$ на прямых $x=0$, $y=0$; $z=-64$ в точке (4,4). В результате

$$z_{наим}=z(4,4)=-64;\quad z_{наиб}=z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}.$$

**Пример 42.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4$.

*Решение.*

Найдем критические точки, лежащие внутри данной области:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ z'_y = 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

В результате получаем 2 стационарные точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-1;-1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области.

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z$ на границе. Граница состоит из двух частей:

1) $l_1 = \left\{(x,y)\middle|-2 \le x \le 2;\ y = x^2\right\} \Rightarrow z = z(x, y(x)) = x^4 + 4x^2$

или

$$z' = 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z(0) = 0.$$

Сравнивая значения $z(0) = 0,\ \ z(-2) = 32$ и $z(2) = 32,$ заключаем, что на $l_1$ наибольшее значение $z(\pm 2) = 32$ и наименьшее значение $z(0) = 0.$

2) $l_2 = \left\{(x,y)\middle|-2 \le x \le 2;\ y = 4\right\} \Rightarrow z = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

или

$z' = 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2/3 \\ x_2 = -2, \end{array}\right.$ из которых только одна ($x_1 = 2/3$) принадлежит отрезку $[-2;2],$ причем $z(2/3) = 16\dfrac{22}{27};\ z(\pm 2) = 32.$

Сопоставляя наибольшее и наименьшее значения функции на двух участках границы, а также учитывая, что внутри рассматриваемой области функция не имеет стационарных точек, заключаем, что наибольшее и наименьшее значения функции равны соответственно $z_{наиб} = z(x = \pm 2; y = 4) = 32$ и $z_{наим} = z(x = 0; y = 0) = 0.$

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите наименьшее значение функции $f(x,y) = |x-1| + 2y^2 - 3.$

2. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2; -1 \le y \le 2.$

*Ответ:* наибольшее значение $z=13$ функция принимает в точке $M_1(2;-1)$, наименьшее значение $z=-1$ функция принимает в двух точках: $M_2(1;1)$ и $M_3(0;-1)$.

## 6. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Этот раздел содержит решения типового варианта расчетно-графического задания. Каждый вариант заданий включает шесть задач.

В первом задании требуется найти частные производные и дифференциал функции двух переменных $z=f(x,\ y)$ в указанной точке $M_0(x_0;y_0)$. Алгоритм решения рассмотрен в разделах 2.1 и 2.2 на примерах 8 и 9.

Приведем другой пример типового задания.

**Пример 46.** Найдите частные производные и дифференциал функции $z=\operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1;1)$.

*Решение.*

$$z'_x=\frac{y}{1+(xy)^2}\Rightarrow z'_x(M_0)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

$$z'_y=\frac{x}{1+(xy)^2}\Rightarrow z'_y(M_0)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

$$dz(M_0)=z'_x(M_0)dx+z'_y(M_0)dy=\frac{1}{2}(dx+dy).$$

Во втором задании нужно приближенно вычислить выражения с помощью дифференциала, заменяя приращение функции дифференциалом. Алгоритм решения рассмотрен в разделе 3.1 на примерах 10–13.

В третьем задании требуется найти производную функции в точке по заданному направлению. Алгоритм решения см. в разделе 3.1 на примерах 19, 20.

В четвертом задании требуется построить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;y;z)=0.$ Примеры решения таких задач можно найти в разделе 4.2 (примеры 29 и 30).

В пятом задании исследуется функция на наличие точек экстремума. Алгоритм решения представлен примерами 32–34 в разделе 5.1.

В последнем, шестом, задании требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции в области. Алгоритм решения подробно рассмотрен на примере 41 раздела 5.3.

Приведем еще один пример.

**Пример 47.** Найдите наибольшее значение функции $z=1-x+$ $+x^2+2y$ в треугольнике OAB, ограниченном прямыми $x=0,$ $y=0,$ $x+y=1.$ При этом $O(0;0), A(1;0), B(0;1).$

*Решение.*

1) Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем:

$$z'_x=-1+2x,\ z'_y=2\neq 0,$$

откуда следует, что стационарных точек в рассматриваемой области нет.

Граница области состоит из трех участков:

$$[AO]:\left\{(x;y)\left|\begin{matrix} y=0 \\ 0\le x\le 1\end{matrix}\right.\right\},[OB]:\left\{(x;y)\left|\begin{matrix} x=0 \\ 0\le y\le 1\end{matrix}\right.\right\},[AB]:\left\{(x;y)\left|\begin{matrix} x+y=1 \\ 0\le x\le 1\end{matrix}\right.\right\}.$$

2) На участке $[AO]$:

$z=1-x+x^2 \Rightarrow z'=-1+2x=0.$ Следовательно, искомая стационарная точка $M_1(1/2;0).$ Отмечаем значения функции в стационарной точке $M_1$ и на концах отрезка *AO*:

$$z(M_1)=3/4,\ z(O)=1,\ z(A)=1.$$

3) На участке [*BO*]:

$z=1+2y\Rightarrow z'=2\neq 0,$ значит, стационарных точек на границе *BO* нет. Отмечаем значения функции на концах отрезка *BO*:

$$z(B)=3,\ z(O)=1.$$

4) На участке [$AB$]:

$z=3-3x+x^2 \Rightarrow z'=-3+2x=0 \Rightarrow x=3/2 \notin [0;1]$, то есть стационарных точек на границе $AB$ нет. Отмечаем значения функции на концах отрезка $AB$:

$$z(B)=3,\ z(A)=1.$$

Сравнивая все отмеченные значения функции $z$, заключаем, что $z_{\max}=z(B)=3$ и достигается в граничной точке $B(0;\ 1)$.

## 7. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1.*** Найдите частные производные и полный дифференциал функции двух переменных $z=f(x,y)$ в заданной точке $M_0(x_0;\ y_0)$:

1) $z=\sin^2(xy);\ M_0(1;\pi/4);$
2) $z=yx^y;\ M_0(2;\ 1);$
3) $z=\ln\left(x^2+y^2\right);\ M_0(-1;\ 1);$
4) $z=x\cos\left(y^2+x\right);\ M_0(\pi/4;\ 0);$
5) $z=2^{x^3y};\ M_0(1;\ 2);$
6) $z=\dfrac{xy^2}{x^2+1};\ M_0(1;1);$
7) $z=\dfrac{x^2-y}{x+y};\ M_0(1;\ 0);$
8) $z=\sin(x/y);\ M_0(\pi/6;\ 1);$
9) $z=\sqrt{x^2+xy+3y^2};\ M_0(1;\ -1);$

10) $z=\dfrac{\ln(xy)}{x+y};\ M_0(1;1);$

11) $z=\left(x^2+3x\right)^{y^3+2y};\ M_0(1;\ -1);$

12) $z=y^2\sin\left(x^2y\right);\ M_0\left(\sqrt{\pi};1\right);$

13) $z=x^2\ln\left(x+y^2\right);\ M_0(2;1);$

14) $z=\ln x\sin(xy);\ M_0(1;\ \pi/6);$

15) $z=\operatorname{tg}(y/x);\ M_0(2;\ \pi/2);$

16) $z=\sin^2 x\cos^3 y;\ M_0(\pi/4;\pi/4).$

***Задание 2.*** Вычислите заданное выражение с помощью дифференциала:

1. $\cos 44^\circ \sin 92^\circ;$
2. $\sqrt{(4,05)^2+(2,98)^2};$
3. $\sin 32^\circ \cos 59^\circ;$
4. $(1,02)^5(0,97)^3;$
5. $\cos 59^\circ \sin 44^\circ;$
6. $\cos 61^\circ \operatorname{tg} 46^\circ;$
7. $(1,98)^4(2,03)^5;$
8. $\sin 59^\circ \sin 32^\circ;$
9. $\sqrt{(3,02)^2+(3,98)^2};$
10. $\sin 32^\circ \oplus \operatorname{ctg} 47^\circ;$
11. $\sqrt{(2,97)^2+(3,98)^2};$
12. $\cos 32^\circ \operatorname{ctg} 44^\circ;$
13. $(2,05)^5(2,98)^3;$
14. $\sin 28^\circ \cos 58^\circ;$
15. $(3,02)^4(1,98)^5;$

16. $\operatorname{tg} 44^\circ \cos 58^\circ$.

***Задание 3.*** Градиент функции и производная по направлению.

1) Найдите производную функции $f(x,y) = 4x^4 - 3xy + 3y^2$ в точке $M(2;-1)$ по направлению, составляющему угол $\pi/3$ с осью $ox$.

2) Найдите производную функции $f(x,y) = 5x^3 + 2xy - 3y^2$ в точке $M(-2;2)$ по направлению вектора $\vec{a}(1;4)$.

3) Найдите производную функции $f(x,y) = \cos 3x + 4\sin 2y$ в точке $M(\pi/2;\pi/2)$ по направлению вектора $\vec{a}(2,-3)$.

4) Найдите производную функции $f(x,y) = 4\cos 5x - 2\sin 2y$ в точке $M(\pi/2;\pi/2)$ по направлению, составляющему угол $\dfrac{\pi}{3}$ с осью $ox$.

5) Найдите производную функции $f(x,y) = 6x^2 - xy^3 + 4y$ в точке $M(1;-2)$ по направлению, составляющему угол $\pi/3$ с осью $ox$.

6) Найдите производную функции $f(x,y) = \ln(3x^2 + 5y^2)$ в точке $M(-3;2)$ по направлению вектора $\vec{a}(4;-1)$.

7) Найдите производную функции $f(x,y) = \ln(5x^2 + 2y^2)$ в точке $M(1;-3)$ по направлению, составляющему угол $\pi/3$ с осью $ox$.

8) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке $M(2;1)$, а также величину наибольшей скорости.

9) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке $M(5;3)$, а также величину наибольшей скорости.

10) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y) = xy$ в точке $M(1;\ 2)$, а также величину наибольшей скорости.

11) Найдите производную функции $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

12–16) Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T=T(x;y)$. Для примеров 12–16 найдите наибольшее значение скорости изменения температуры в точке $M_0(1;1)$ и соответствующее направление наибольшего возрастания температуры:

12) $T(x;y)=6x^2-5y$;

13) $T(x;y)=x\sin\pi y$;

14) $T(x;y)=x^2+2xy$;

15) $T(x;y)=y^2-2xy$;

16) $T(x;y)=2x^2-y^3$.

*Указание.* Скорость изменения температуры в точке $M_0$ достигает наибольшего значения, равного $\frac{\partial T(M_0)}{\partial l}\Big|_{\max}=\left|gradT(M_0)\right|$, в направлении $\vec{l}$, совпадающем с направлением вектора $gradT(M_0)$.

***Задание 4.*** Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

1) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $M_0(1;0;0)$;

2) $e^z-z+xy=3$, $M_0(2;1;0)$;

3) $x^2-y^2-z^2=1$, $M_0(3;2;2)$;

4) $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, $M_0(1;1;1)$;

5) $z=\frac{x^2}{2}-y^2$, $M_0(2;1;1)$;

6) $x(y+z)(z-xy)=8$, $M_0(2;1;3)$;

7) $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$, $M_0(1;1;2)$;

8) $x^2+y^2+z^2=14$, $M_0(1;2;3)$;

9) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(-3;4;5)$;

10) $z = x^2 + y^2$, $M_0(1;1;2)$;

11) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 12}$, $M_0(3;2;5)$.

12–16) Составьте уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x,y,z)=0$ и параллельной заданной плоскости $(\pi)$:

12) $F(x,y,z) \equiv 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21$, $\pi$: $6x - 4y - z = 0$;

13) $F(x,y,z) \equiv xy + z^2 + xz - 1$, $\pi$: $x - y + 2z = 0$;

14) $F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 - z$, $\pi$: $2x + 4y - z - 5 = 0$;

15) $F(x,y,z) \equiv x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, $\pi$: $x - y + 2z = 0$;

16) $F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 - 2z$, $\pi$: $x + y - z - 1 = 0$.

***Задание 5.*** Найдите точки локального экстремума функции:

1) $z = f(x,y) = 2xy - 2x - 4y$;

2) $z = f(x,y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$;

3) $z = f(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$;

4) $z = f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$;

5) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^3$;

6) $z = f(x,y) = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$;

7) $z = f(x,y) = x^2 - 4xy + 8y^3$;

8) $z = f(x,y) = x^2 - 4xy + 8y^3$;

9) $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

10) $u = f(x,y,z) = 3 + 2x - y - 12z - x^2 + xy - y^2 + z^3$;

11) $z = f(x,y) = x^2 + 8\ln y - 2\ln x + y^2$;

12) $z = f(x,y) = -3x^2 + 4xy + 24x - 3y^2 - 26y + 1$;

13) $z = f(x,y) = 4x^2 - 24xy + 16x + 4y^2 - 34y + 1$;

14) $z = f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + 2x - 2y^2 - 6y + 18$;

15) $z = f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 10$;

16) $z = f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right).$

***Задание 6.*** Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 4$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 5$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + 2y$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y + 3 = 0$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ в области, ограниченной осями координат и прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в области, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

9. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \le 3$, $y \ge 0$, $y - x \le 0$.

10. Из всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ определите треугольник с наибольшей площадью.

11. Найдите наибольшее значение функции $f(x,y) = 2x - 2y$ при условиях $3x - 2y \ge -6$, $3x + y \ge 3$. $0 \le x \le 3$, $y \ge 0$. Сделайте рисунок.

12. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x + y$ при условиях $x + y \geq 4$, $x - y \leq 0$, $x \geq 1$, $y \leq 8$. Сделайте рисунок.

13. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 3 - x - y$ при условиях $3x + 2y \geq 6$, $2x - y \geq -3$, $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$. Сделайте рисунок.

14. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3 + x + 2y$ при условиях $x + y \geq 6$, $y - x \geq 0$, $x \geq 2$, $y \leq 10$. Сделайте рисунок.

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) =$ $= 5x + 4y - 7$ на эллипсе $D = \left\{(x, y) \middle| \; 25x^2 + 16y^2 = 400\right\}$.

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = -xy(x + y - 3)$ в замкнутой области в форме треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 6$; $x = 0$; $y = 0$.

## ТЕСТЫ

### Секция 1. Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность

***Задание 1.*** Найдите область определения функции $z = \arcsin(x + y)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x + 1$ и $y = -x - 1$;

2) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x, y) \middle| -1 < x < 1; -1 < y < 1\right\}$;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 1$ и $y = -2x - 1$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x$ и $y = -x - 2$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 2$ и $y = -2x - 2$.

***Задание 2.*** Найдите область определения функции $z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-2<x<2;-2<y<2\right\}$;

2) множество внутренних точек на координатной плоскости *оху*, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в кольце $\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<2\right\}$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе $\left\{(x,y)\middle|-1<x<1\right\}$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

***Задание 3.*** Найдите область определения функции: $z=\arccos\left(x-y\right)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-2x+1$ и $y=-2x-1$;

2) множество внутренних точек на координатной плоскости *оху*, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек координатной плоскости *оху*, принадлежащих полосе, ограниченной прямыми $y=x+1$ и $y=x-1$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=x$ и $y=x-2$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-2x+2$ и $y=-2x-2$.

***Задание 4.*** Найдите область определения функции $z=\arcsin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|y<x^2\right\}$;

2) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|y+1<x^2\right\}$;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|y-1<x^2\right\}$;

4) односвязная область на координатной плоскости *оху*, ограниченная двумя параболами $y=x^2$ и $y=-x^2$ и проходящая через ось *ох* с выколотой точкой в начале координат;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|-1<y-x^2<1\right\}$.

***Задание 5.*** Найдите область определения функции $z=\arccos\sqrt{x^2+y^2-1}$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в круге радиуса $r=1$ с центром в начале координат;

2) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в круге радиуса $r=\sqrt{2}$ с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-1<x<1;-1<y<1\right\}$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2};-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\right\}$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями радиусов $r=1$ и $r=\sqrt{2}$ с центром в начале координат.

***Задание 6.*** Найдите предел функции $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ в точке (0;0).

## Секция 2. Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

***Задание 1.*** Найдите частные производные $z'_x(M), z'_y(M)$ функции $z(x,y)=\sin(\pi xy)$ в точке $M(1;2)$. В ответе запишите $z'_x(M)/\pi + z'_y(M)/\pi$.

***Задание 2.*** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z(x,y)=x^2e^{-xy}$, $M_0(2;0)$. В ответе запишите $z'_x(M_0)+z'_y(M_0)$.

***Задание 3.*** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z=y/\sqrt{x}$; $P_0(1;2)$. В ответе запишите $z'_x(P_0)+z'_y(P_0)$.

***Задание 4.*** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z=\operatorname{arctg}(xy)$; $P_0(1;1)$. В ответе запишите $z'_x(P_0)+z'_y(P_0)$.

***Задание 5.*** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z=e^{(x-1)y}$; $P_0(1;1)$. В ответе запишите $z'_x(P_0)+z'_y(P_0)$.

***Задание 6.*** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$.

***Задание 7.*** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

***Задание 8.*** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0{,}97^{1{,}05}$.

***Задание 9.*** Одна сторона прямоугольника $a = 10$ см, а другая $b = 24$ см. Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону $a$ удлинить на 4 мм, а сторону $b$ укоротить на 1 мм. Найдите и запишите в см величину изменения диагонали прямоугольника:

а) приближенно с помощью дифференциала;

в) точную ее величину.

**Секция 3. Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции**

***Задание 1.*** Найдите в указанной точке $M_0(1;0)$ первые частные производные неявно заданной функции $z^3 + 3xyz + 1 = 0.$ В ответе запишите $z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$

***Задание 2.*** Найдите в указанной точке $M_0(1;1;2)$ первые частные производные неявно заданной функции $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + {}$ $+2y - 3 = 0.$ В ответе запишите $z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$

***Задание 3.*** Найдите производную функции $z = \ln\dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ по направлению $\vec{l} = (6;8)$ в точке $M(1;2)$.

***Задание 4.*** Найдите производную функции $z = x^2 + xy + 2x + 2y,$ по направлению $\vec{l} = (3;4)$ в точке $M(1;1)$.

***Задание 5.*** Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T(x;y) = 6x^2 - 5y.$ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры $J = \left|gradT(M_0)\right|$ в точке $M_0(1;1).$

***Задание 6.*** Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T(x;y) = x\sin \pi y.$ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры $J=\left|gradT\left(M_0\right)\right|$ в точке $M_0(1;1)$. В ответе укажите значение $J/\pi$.

***Задание 7.*** Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T\left(x;y\right)=y^2-2xy$. Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры $J=\left|gradT\left(M_0\right)\right|$ в точке $M_0(1;1)$.

**Секция 4. Элементы теории поля**

***Задание 1.*** Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F\left(x;y;z\right)=0$ в указанной точке:

$$z=\ln\left(x^2+y^2\right);\ (1;\ 0;\ 0).$$

1) $x+3y-2z-2=0;$
2) $2x-y+2z+1=0;$
3) $2x+2y-z-1=0;$
4) $x+y-2z-2=0;$
5) $3x-y+2z+2=0.$

***Задание 2.*** Выберите уравнение нормали к поверхности $F\left(x;y;z\right)=0$ в указанной точке:

$$z=\ln\left(x^2+y^2\right);\ (1;\ 0;\ 0).$$

1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{3};$
2) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1};$
3) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{2};$
4) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-2};$

5) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

***Задание 3.*** Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$x^2-y^2-z^2=1;\ (3;\ 2;\ 2).$$

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$;

2) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$;

3) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$;

4) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$;

5) $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

***Задание 4.*** Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$x^2-y^2-z^2=1;\ (3;2;2).$$

1) $x+2y+z=2$,

2) $x+2y-3z=3$,

3) $2x+y-z=2$,

4) $x-3y+z=3$,

5) $3x-2y-2z=1$.

***Задание 5.*** Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$z=x^2-2xy+y^2-x+2y;\ (1;\ 1;\ 1).$$

1) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$;

2) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$;

3) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$;

4) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$;

5) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-3}$.

***Задание 6.*** Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$z=x^2-2xy+y^2-x+2y;\ (1;\ 1;\ 1).$$

1) $x-2y+z=0$,
2) $3x-y-2z=2$,
3) $x+2y-z=2$,
4) $3x-2y-2z=0$,
5) $2x+y-z=3$.

**Секция 5. Локальный и глобальный экстремумы**

***Задание 1***. Найдите точку локального минимума $M(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)=x^2-2x+2y^2$. В ответе укажите сумму $x_0+y_0$.

***Задание 2.*** Найдите точку локального минимума $M(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)=2x^2+y^2+4x-2y+5$. В ответе укажите сумму $x_0+y_0$.

***Задание 3.*** Найдите точку локального максимума $M(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)=-4x^2-y^2+4y$. В ответе укажите сумму $x_0+y_0$.

*Задание 4.* Найдите условные экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

*Задание 5.* Найдите наибольшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в 1-й четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$.

## ОТВЕТЫ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

### Секция 1. Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность

*Задание 1.* Множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x + 1$ и $y = -x - 1$.

*Задание 2.* Множество внутренних точек на координатной плоскости *оху*, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат.

*Задание 3.* Множество точек координатной плоскости *оху*, принадлежащих полосе, ограниченной прямыми $y = x + 1$ и $y = x - 1$.

*Задание 4.* Односвязная область на координатной плоскости *оху*, ограниченная двумя параболами $y = x^2$ и $y = -x^2$, и проходящая через ось *ох* с выколотой точкой в начале координат.

*Задание 5.* Множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями радиусов $r = 1$ и $r = \sqrt{2}$ с центром в начале координат.

*Задание 6.* 1.

### Секция 2. Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

*Задание 1*. 3.

*Задание 2.* –4.

*Задание 3*. 0.

*Задание 4.* 1.

*Задание 5.* 1.

***Задание 6.*** 1,00.
***Задание 7.*** 4,998.
***Задание 8.*** 0,97.
***Задание 9.*** 0,062; 0,065.

**Секция 3. Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции**

***Задание 1.*** 1.
***Задание 2.*** –23/9.
***Задание 3.*** –0,12.
***Задание 4.*** 5,4.
***Задание 5.*** 13.
***Задание 6.*** 1.
***Задание 7.*** 2.

**Секция 4. Элементы теории поля**
***Задание 1.*** $2x+2y-z-1=0$.
***Задание 2.*** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.
***Задание 3.*** 4) $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$.
***Задание 4.*** 5) $3x-2y-2z=1$.
***Задание 5.*** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.
***Задание 6.*** $x-2y+z=0$.

**Секция 5. Локальный и глобальный экстремумы**
***Задание 1.*** 1.
***Задание 2.*** 0.
***Задание 3.*** 2.
***Задание 4.*** $z_{\max}=5$ в точке $M_1(1;2)$; $z_{\min}=-5$ в точке $M_2(-1;-2)$.
***Задание 5.*** $z_{наиб}\equiv z(0;1)=3$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Карасев В.А., Левшина Г.Д.* Математический анализ: часть 1. Дифференциальное исчисление. – М.: Илекса, 2011. – 296 с.

2. *Дорофеева А.В*. Высшая математика для гуманитарных направлений: учебное пособие. – М.: Юрайт, 2012. – 400 с.

3. *Дорофеева А.В*. Высшая математика для гуманитарных направлений: сборник задач. – М.: Юрайт, 2013. – 175 с.

4. *Письменный Д.Т*. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: АЙРИС-ПРЕСС, 2017. – 603 с.

5. *Шершнев В.Г*. Математический анализ: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 287 с.

6. *Кадымов В.А*. Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие: часть 1. – М.: МГГЭУ, 2015. – 34 с.

7. *Кадымов В.А*. Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие: часть 2. – М.: МГГЭУ, 2015. – 50 с.

## Содержание

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов**

# ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Учебно-методическое пособие*


| | |
|---|---|
| Ответственный редактор | С.А. Бобко |
| Технический редактор | К.А. Антонов |
| Редактор/корректор | Ю.Ф. Кравчинская |
| Компьютерная верстка | К.А. Антонов |

Подписано в печать 27.04.2018. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 5.
Тираж 31 экз. Заказ № 19.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.