Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб,
А.В. Агапчев, А.Н. Колесникова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Москва
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет

Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб, А.В. Агапчев, А.Н. Колесникова

Сборник задач по уравнениям в частных производных

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 041CD9B1001CAF77894D606F5F479EB1E9
Владелец: Сахарчук Елена Сергеевна
Действителен: с 26.09.2022 до 26.09.2023

Москва
2018

УДК 517
ББК 22.161.1
Н 90

Рецензенты:

В.А. Кадымов — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математики МГГЭУ;

Ю.В. Перепелкина — кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ВИНИТИ РАН

Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб, А.В. Агапчев, А.Н. Колесникова
Н 90 Сборник задач по уравнениям в частных производных. – М.: МГГЭУ, 2018. – 80 с.

В учебном пособии рассмотрены уравнения в частных производных (уравнения математической физики). Даны основные понятия уравнений в частных производных и рассмотрены основные методы их решений. Структура пособия соответствует традиционным тематическим разделам дисциплины «Уравнения в частных производных». Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Информатика и вычислительная техника».

ISBN 978-5-9799-0114-5

© Нуцубидзе Д.В.,
Труб Н.В.,
Агапчев А.В.,
Колесникова А.Н., 2018
© МГГЭУ, 2018

Введение

Настоящая работа будет полезна для студентов факультета прикладной математики и информатики как сборник основных задач по традиционным тематическим разделам курса «Уравнения в частных производных». Вместе с тем пособие содержит темы, не вошедшие в этот курс, но представляющие интерес для студентов с учебной и с научно-исследовательской точки зрения. Пособие также может быть рекомендовано в помощь студентам при написании выпускной квалификационной работы.

Изложение ведется в естественной логической последовательности с соблюдением постепенного перехода от простого к сложному.

Пособие включает большое количество примеров, хорошо иллюстрирующих практическое применение изложенного теоретического материала.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Информатика и вычислительная техника».

Основные сведения из теории линейных уравнений в частных производных

§ 1. Типы линейных уравнений с частными производными второго порядка

Определение. Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные от искомой функции, называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения в частных производных.

Определение. Уравнение с частными производными называется ***линейным***, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех её частных производных.

Общая запись линейных уравнений второго порядка.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au + f = 0, \tag{1}$$

где

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \;\; u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \;\; u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$a_{11} = a_{11}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, a = a\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \; f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Пример:

$$u_t = u_{xx}.$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}.$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}.$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (1) относятся к одному из трех типов:

a) гиперболический;
b) параболический;
c) эллиптический.

Если:

a) $a^2_{12} - a_{11}a_{22} > 0,$ то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа;

b) $a^2_{12} - a_{11}a_{22} = 0,$ то уравнение (1) называется уравнением параболического типа;

c) $a^2_{12} - a_{11}a_{22} < 0,$ то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа.

Задания. Найти область гиперболичности, параболичности и эллиптичности для следующих уравнений:

1) $\sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos x \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

2) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x + y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

3) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3(x + y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

4) $(\sin x + \cos y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\sin x - \cos y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \cos y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

7) $(1 - \sin x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \sin x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

8) $\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

9) $(1 - \alpha)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \alpha)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \alpha = \mathrm{const};$

10) $\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 + \alpha)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \alpha = \mathrm{const};$

11) $\sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\operatorname{tg} x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{\cos x} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

12) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

§ 2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

Лемма. Если функция $\varphi(x, y) = C$ является решением дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0, \tag{2}$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11}(z_x)^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}(z_y)^2 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* уравнения (1).

Уравнение (2) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения:

a) $a^2_{12} - a_{11}a_{22} > 0$ — уравнение является уравнением гиперболического типа;

b) $a^2_{12} - a_{11}a_{22} = 0$ — уравнение является уравнением параболического типа;

c) $a^2_{12} - a_{11}a_{22} < 0$ — уравнение является уравнением эллиптического типа.

Рассмотрим все три вышеназванных случая:

а) $\Delta = a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} > 0$ — уравнение гиперболического типа.

В этом случае решения уравнения (2) и их общие интегралы вещественны и различны:

$$\varphi(x, y) = c_1$$
$$\psi(x, y) = c_2$$

Они определяют два вещественных и различных семейства характеристик.

Положим

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}.$$

Тогда уравнение (1) можно привести к виду:

$$u_{\xi\eta} = \varphi_1\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right), \tag{1–1}$$

где $\varphi_1\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right)$ — некоторая функция.

Тем самым получили первую каноническую форму уравнения гиперболического типа.

С помощью замены

$$\alpha = \frac{\xi - \eta}{2}, \beta = \frac{\xi + \eta}{2}$$

уравнение (1-1) можно привести к виду:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \phi_2\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right). \tag{1–1–2}$$

Это вторая каноническая форма уравнения гиперболического типа.

b) $\Delta = a^2{}_{12} - a_{11}a_{22} = 0$ — уравнение параболического типа.

Решения уравнения (2), следовательно, и их интегралы совпадают, т.е. мы получаем только одно вещественное семейство характеристик:

$$\xi = \varphi(x, y).$$

В качестве второй переменной $\eta(x, y)$ возьмем любую дважды непрерывно-дифференцируемую функцию, для которой:

$$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0.$$

Положив

$$\xi = \varphi(x, y)$$

$$\eta = \psi(x, y),$$

получим:

$$u_{\eta\eta} = \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1–2)$$

где $\varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ — некоторая функция.

Получили каноническую форму уравнения параболического типа.

c) $\Delta = a^2_{12} - a_{11}a_{22} < 0$ — уравнение эллиптического типа.

Коэффициенты решений уравнения, а следовательно, и первые интегралы уравнений — комплексные величины.

Пусть

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c_1$$

является одним из интегралов, тогда другой интеграл будет комплексно-сопряженным с указанным:

$$\psi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) - i\varphi_2(x, y) = c_2.$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}.$$

Тогда уравнение (1) можно привести к виду:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \varphi_3\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right), \tag{1–3}$$

где $\varphi_3\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right)$ — некоторая функция.

Т.е. для уравнения эллиптического типа после определения первых интегралов достаточно положить:

$$\xi = Re[\varphi]\ \left(= \varphi_1(x, y)\right);\ \eta = Im[\varphi]\ \left(= \varphi_2(x, y)\right).$$

Задания. Привести к каноническому виду следующие дифференциальные уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = 0;$

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

5) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

6) $\mathrm{tg}^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\,\mathrm{tg}\, x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{tg}^3 x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0;$

7) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

8) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0;$

9) $\left(1 + x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

10) $\sin^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

11) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \alpha=\mathrm{const}.$

§ 3. Метод характеристик

Данный метод рассмотрен в § 3 гл. 2 пособия.

Задания

1–6. Найти общее решение следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}+xyu=0.$$

2. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

а также его общее решение.

3. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0}=3x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=0.$$

4. Найти решение уравнения

$$4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0}=\varphi_0\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=\varphi_1\left(x\right).$$

5. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=\sin x}=\varphi_0\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\sin x}=\varphi_1\left(x\right).$$

6. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\mathcal{U}|_{y=0} = f_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = f_2(x).$$

7. Найти решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\mathcal{U}|_{y=1} = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = \varphi_1(x).$$

§ 4. Метод разделения переменных

Данный метод рассмотрен в § 4 гл. 2 пособия.

Задания

Уравнения гиперболического типа

1. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = \ell$, имеющая в начальный момент времени форму

$$\mathcal{U}(x;0) = \frac{16}{5}k\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)\right],$$

где $k > 0$ достаточно малое число, начала колебаться без начальной скорости. Найти свободные колебания струны.

2. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = \ell$, имеющая в начальный момент времени форму

$$\mathcal{U}(x;0) = \frac{4kx(\ell - x)}{\ell^2},\ k = \mathcal{U}\left(\frac{\ell}{2};0\right),$$

начала колебаться без начальной скорости. Найти свободные колебания струны.

3. Решить задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях:

$$\mathcal{U}(0;t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Уравнения параболического типа

4. Найти решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

удовлетворяющее условиям:

$$U(x;0) = x^2,\ x \in [0;1]$$

$$U(0;t) = 0,\ U(1;t) = 1,\ t \geq 0.$$

5. Найти решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \ell,\ t > 0,$$

удовлетворяющее условиям:

$$\mathcal{U}(0;t) = \mathcal{U}(\ell;t) = 0,\ \ t > 0;$$

$$\mathcal{U}(x;0) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 < x \leq \dfrac{\ell}{2} \\ \ell - x, & \text{при } \dfrac{\ell}{2} \leq \lambda < e. \end{cases}$$

6. Дан тонкий однородный стержень длиной ℓ, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна:

$$f(x) = \frac{cx(\ell - x)}{\ell^2}.$$

Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

7. Дан тоненький однородный стержень длиной ℓ, начальная температура которого равна нулю. На конце $x = \ell$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = 0$ она растет линейно со временем так, что $\mathcal{U}(0;t) = \mathcal{A}t$, где $\mathcal{A} = \text{const}$. Найти распределения температуры вдоль стержня, при $t > 0$.

Уравнения эллиптического типа

8. Решите уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

при следующих краевых условиях внутри прямоугольника:

$$\mathcal{U}|_{x=0} = \mathcal{U}_0;\ \mathcal{U}|_{x=a} = u|_{y=0} = y|_{y=b} = 0.$$

9. Найти решение уравнения Лапласа в полуполосе $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \infty$,
удовлетворяющее краевым условиям:

$$\mathcal{U}(0;y) = 0, \mathcal{U}(a;y) = 0, \mathcal{U}(x;0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right), \mathcal{U}(x;\infty) = 0,\ 0 \le x \le a.$$

10. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями с радиусами R_1 и R_2 с центром в начале координат.

11. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике,

$$\mathfrak{D}: 0\le x\le a, 0\le y\le b,$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$\mathcal{U}(0;y)=A,\ \ \mathcal{U}(a;y)=Ay,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0.$$

12. Найти гармоническую функцию внутри кругового сектора $0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\lambda,$ удовлетворяющую краевым условиям

$$\mathcal{U}(\rho;0)=\mathcal{U}(\rho;\lambda)=0,\ \ \mathcal{U}(R;\varphi)=A\varphi.$$

Решение типовых задач

§ 1. Типы линейных уравнений с частными производными второго порядка

Нахождение области гиперболичности, параболичности и эллиптичности для уравнений.

1. $\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

$$a_{11}(x;y)=\ \sin x;\, a_{12}(x;y)=\frac{3}{2};\, a_{22}(x;y)=\cos x.$$

$$\Delta=\ a^2{}_{12}\ -a_{11}\,a_{12}\ =\frac{9}{4}-\sin x\cos x=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\sin 2x\right),$$

так как $\Delta > 0 \quad \forall (x, y) \in R^2$ — то уравнение гиперболического типа во всей области определения.

2. $$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = 2;\ a_{12}(x; y) = -\frac{5}{2};\ a_{22}(x; y) = x + y.$$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 2(x + y);$$

$$\frac{25}{4} - 2(x + y) > 0 \text{ или } 2(x + y) < \frac{25}{4}, \text{ или } x + y < \frac{25}{8}.$$

a) Следовательно, в области $y < \frac{25}{8} - x$ — уравнение гиперболического типа.

b) В области $y = \frac{25}{8} - x$ — уравнение параболического типа.

c) В области $y > \frac{25}{8} - x$ — уравнение эллиптического типа.

3. $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3(x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = x;\ a_{12}(x; y) = \frac{3}{2}(x + y);\ a_{22}(x; y) = y.$$

$$\Delta = \frac{9}{4}(x + y)^2 - xy = \frac{9}{4}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}xy + \frac{9}{4}y^2 - xy =$$

$$= \frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{9}{4}y^2,$$

так как $\frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{9}{4}y^2 > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — то уравнение гиперболического типа во всей области определения.

4. $$(\sin x + \cos y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\sin x - \cos y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = \sin x + \cos y;\ a_{12}(x; y) = \cos y;\ a_{22}(x; y) = \sin x - \cos y.$$

$$\Delta = \cos^2 y - (\sin x + \cos y)(\sin x - \cos y) = \cos^2 y - \left(\sin^2 x - \cos^2 y\right) =$$
$$= \cos^2 y - \sin^2 x + \cos^2 y = 2\cos^2 y - \sin^2 x.$$

a) При $2\cos^2 y - \sin^2 x > 0$ или $2\cos^2 y > \sin^2 x$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $2\cos^2 y = \sin^2 x$ — уравнение параболического типа.

c) При $2\cos^2 y < \sin^2 x$ — уравнение эллиптического типа.

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \cos y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$a_{11}(x;y) = 1;\ a_{12}(x;y) = \sin x \cos y;\ a_{22}(x;y) = \cos^2 y.$

$\Delta = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 y = \cos^2 y\left(\sin^2 x - 1\right).$

a) Так как $\cos^2 y\left(\sin^2 x - 1\right) > 0$ ни при каком $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, то уравнение не может быть уравнением гиперболического типа ни в одной точке области определения.

b) При $\cos^2 y\left(\sin^2 x - 1\right) = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $\cos^2 y\left(\sin^2 x - 1\right) < 0$, т.е. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — уравнение эллиптического типа.

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$a_{11}(x;y) = 1;\ a_{12}(x;y) = 3x;\ a_{22}(x;y) = xy.$

Следовательно, $\Delta = 9x^2 - xy = x(9x - y).$

a) При $x(9x - y) > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $x(9x - y) = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $x(9x - y) < 0$ — уравнение эллиптического типа.

7. $(1 - \sin x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \sin x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$a_{11}(x;y) = 1 - \sin x;\ a_{12}(x;y) = \dfrac{1}{2}\cos x;\ a_{22}(x;y) = 1 + \sin x.$

$$\Delta = \frac{1}{4}\cos^2 x - (1-\sin x)(1+\sin x) = \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{4}{4}\cos^2 x = -\frac{3}{4}\cos^2 x.$$

a) Так как $-\frac{3}{4}\cos^2 x > 0$, ни при каком $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — то уравнение не может быть уравнением гиперболического типа ни в одной точке области определения.

b) При $-\frac{3}{4}\cos^2 x = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $-\frac{3}{4}\cos^2 x < 0$ — уравнение эллиптического типа.

8. $\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$a_{11}(x; y) = \sin x$; $a_{12}(x; y) = \cos x$; $a_{22}(x; y) = \sin x$.

$\Delta = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

a) При $\cos 2x > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\cos 2x = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $\cos 2x < 0$ — уравнение эллиптического типа.

9. $(1-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \alpha = \text{const}.$

$a_{11}(x; y) = 1-\alpha$; $a_{12}(x; y) = \alpha$; $a_{22}(x; y) = 1+\alpha$.

$\alpha = \alpha^2 - 1 + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 1$.

a) При $2\alpha^2 - 1 > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $2\alpha^2 - 1 = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $2\alpha^2 - 1 < 0$ — уравнение эллиптического типа.

10. $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \alpha = \text{const}.$

$a_{11}(x; y) = \alpha$; $a_{12}(x; y) = 1+\alpha$; $a_{22}(x; y) = \frac{1}{\alpha}$.

$\Delta = (1+\alpha)^2 - \frac{\alpha}{\alpha} = 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha^2 + 2\alpha.$

a) При $\alpha^2 + 2\alpha > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\alpha^2 + 2\alpha = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $\alpha^2 + 2\alpha < 0$ — уравнение эллиптического типа.

11. $\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mathrm{tg}x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\cos x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$a_{11}(x;y) = \sin x;\ a_{12}(x;y) = \mathrm{tg}\, x;\ a_{22}(x;y) = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Delta = \mathrm{tg}^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x - 1)$$

a) При $\mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x - 1) > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x - 1) = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $\mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x - 1) < 0$ — уравнение эллиптического типа.

12. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$a_{11}(x;y) = 4;\ a_{12}(x;y) = -6;\ a_{22}(x;y) = 12.$$

$$\Delta = 36 - 48 = -12.$$

Так как $\Delta = -12 < 0$ — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ уравнение эллиптического типа во всей области определения.

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка

Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения.

1. $\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + 6\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = 0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y) = 1;\ a_{12}(x;y) = 1;\ a_{22}(x;y) = -3.$$

Следовательно:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{12} = 1 + 3 = 4;$$

Так как $\Delta > 0$ — то уравнение гиперболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\ d^2 y - 2a_{12}\ dxdy + a_{22}\ d^2 x = 0.$$

Следовательно:

$$dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \text{ или } \frac{dy}{dx} = 3.$$

Следовательно, характеристики имеют вид:

$$y = -x + C_1 \text{ и } y = 3x + C_2.$$

Введем новые переменные: $\xi = x + y$ и $\eta = 3x - y$;

тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-6\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-$$

$$-3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial u}{\partial\xi}+6\frac{\partial u}{\partial\eta}+6\frac{\partial u}{\partial\xi}-6\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$$

или

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+8\frac{\partial u}{\partial\xi}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=1;\ a_{12}(x;y)=2;\ a_{22}(x;y)=5.$$

Тогда: $\Delta=4-5=-1.$

Так как $\Delta<0,$ то это уравнение эллиптического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0.$$

Следовательно:

$$dy^2 - 4\,dxdy + 5dx^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 4\frac{\partial y}{\partial x} + 5 = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 2 - i \text{ или } \frac{\partial y}{\partial x} = 2 + i.$$

Следовательно, характеристики имеют вид:

$$y = (2 - i)x + C_1 \text{ и } y = (2 + i)x + C_2$$

или

$$C_1 = (2 + i)x - y \text{ и } C_2 = (2 - i)x - y.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{2x + ix - y + 2x - ix - y}{2} = \frac{4x - 2y}{2} = 2x - y$$

и

$$\eta = \frac{C_1 - C_2}{2_i} = \frac{2x + ix - y - 2x + ix + y}{2i} = \frac{2ix}{2i} = x.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y) = 1;\ a_{12}(x;y) = -1;\ a_{22}(x;y) = 1.$$

Следовательно: $\Delta = 1 - 1 = 0.$

Так как $\Delta = 0,$ то это уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0.$$

Следовательно:

$$dy^2 + 2\, dx dy + dx^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(-2)}{2} = -1.$$

Характеристики имеют вид:

$$y = -x + C_1 \ \text{и}\ y = C_2$$

или

$$C_1 = y + x \ \text{и}\ C_2 = y.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = x + y \text{ и } \eta = y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a + \beta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0.$$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1;\ a_{12}(x; y) = -\cos x;\ a_{22}(x; y) = -\left(3 + \sin^2 x\right).$$

Следовательно:

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4.$$

Так как $\Delta > 0$, то это уравнение гиперболического типа во всей области определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12} dxdy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$dy^2 + 2\cos x dxdy - \left(3 + \sin^2 x\right) dx^2 = 0.$$

Так как $D = 4\cos^2 x + 12 + 4\sin^2 x = 16$ то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos x \pm 4}{2}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2 \text{ и } \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2.$$

Характеристики имеют вид:

$$y = -\sin x - 2x + C_1 \text{ и } y = -\sin x + 2x + C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \sin x + 2x + y \text{ и } \eta = 2x - \sin x - y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\cos x + 2\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(2 - \cos x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\cos x + 2\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(2 - \cos x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\cos x+2\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2-\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\left(\cos x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\left(\cos x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}-\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$

$$+\left(2-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\left(2-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\ \sin x\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=\left(\cos x+2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\left(4-\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$

$$+\left(4-\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\left(2-\cos x\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=\left(\cos x+2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\left(4-\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(2-\cos x\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\sin x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$

$$=\left(\cos x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\left(2-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\left(\cos x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-\left(2-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=$$

$$=\left(\cos x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\left(2-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\left(\cos x+2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\left(4-\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(2-\cos x\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\sin x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)-$$

$$-2\cos x\left(\cos x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+4\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+2\cos x\left(2-\cos x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-$$

$$-\left(3+\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\left(3+\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\left(3+\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-y\frac{\partial u}{\partial\xi}+y\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}+\frac{\xi-\zeta}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=0.$$

5. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Имеем:

$$a_{11}\left(x;y\right)=y^2;\;\; a_{12}\left(x;y\right)=yx;\;\; a_{22}\left(x;y\right)=2x^2.$$

Следовательно:

$$\Delta=x^2y^2-2x^2y^2=-x^2y^2.$$

При $\Delta=0,$ то есть при $xy=0,$ это уравнение параболического вида в своей области определения, т.е. при $x=0$ или при $y=0.$

При $\Delta<0,$ то есть при $xy\neq 0,$ имеем $x\neq 0$ и $y\neq 0,$ то есть это уравнение эллиптического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$y^2dy^2-2xydxdy+2x^2dx^2=0$$

или

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\frac{dy}{dx}+2x^2=0.$$

Так как $D=4x^2-8x^2y^2=-4x^2y^2,$ то:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy\pm 2\,xy}{2y^2}=\frac{x\pm ix}{y};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left(1+i\right)}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}\left(1+\ i\right)+C_1 \Rightarrow y^2=x^2\left(1+\ i\right)+C_1 \Rightarrow C_1=x^2\left(1+i\right)-y^2.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left(1-i\right)}{y} \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}\left(1-i\right)+C_2 \Rightarrow y^2=x^2\left(1-i\right)+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2=x^2\left(1-i\right)-y^2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi=\frac{C_1+C_2}{2}=\frac{x^2+x^2 i-y^2+x^2-x^2 i-y^2}{2}=\frac{2x^2-2y^2}{2}=x^2-y^2$$

и

$$\eta=\frac{C_1-C_2}{2i}=\frac{x^2+x^2 i-y^2-x^2+x^2 i+y^2}{2i}=\frac{2x^2 i}{2i}=x^2.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x\frac{\partial u}{\partial \xi}+2x\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-2y\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial u}{\partial \xi}+2x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial \xi}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+2\frac{\partial u}{\partial \xi}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+8x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial u}{\partial \xi}+2\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=-2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$

$$= -4xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi} =$$

$$= 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$4x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2y^2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y^2\frac{\partial u}{\partial \eta} - 8x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} -$$

$$-8x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 8x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4x^2\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2y^2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$4y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 4x^2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y^2\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Так как $x^2 = \eta$ и $y^2 = \xi - \eta$, то окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

При $x = 0$ имеем:

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

а при $y = 0$ имеем:

$$2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\mathrm{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\ \mathrm{tg}\ x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x;y) = \mathrm{tg}^2 x;\ a_{12}(x;y) = -y\,\mathrm{tg}\,x;\ a_{22}(x;y) = y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = y^2\ \mathrm{tg}^2 x - y^2\ \mathrm{tg}^2 x = 0.$$

Так как $\Delta = 0$ в области своего определения, то уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12} dxdy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$\mathrm{tg}^2 x\, dy^2 + 2y\,\mathrm{tg}\ x\, dxdy + y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$\mathrm{tg}^2 x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\ \mathrm{tg}\ x \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Так как $D = 4y^2\ \mathrm{tg}^2 x - 4y^2\ \mathrm{tg}^2 x = 0,$ то:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\,\mathrm{tg}\ x}{2\mathrm{tg}^2 x} = -\frac{y}{\mathrm{tg}\ x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\,\mathrm{tg}\ x}{2\mathrm{tg}^2 x} = -\frac{y}{\mathrm{tg}\ x} \Rightarrow y \sin x = C.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = y \sin x \text{ и } \eta = y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=y\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=y\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+y\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}-$$

$$-y\sin x\frac{\partial \xi}{\partial x}=y\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-y\sin x\frac{\partial \xi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=y\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+y\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$

$$+\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi}=y\sin x\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+y\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\mathrm{tg}^2 x\cos^2 x y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-y\,\mathrm{tg}^2 x\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}-2y^2\,\mathrm{tg}x\sin x\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-$$

$$-2y^2\,\mathrm{tg}x\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-2y\,\mathrm{tg}\,x\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi}+y^2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+$$

$$+2y^2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+y\,\mathrm{tg}^3 x\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

или

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2y\sin x\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

Учитывая, что $\xi=y\sin x$ и $\eta=y,$ окончательно имеем:

$$\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

6. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=y;\ a_{12}(x;y)=0;\ a_{22}(x;y)=1.$$

Следовательно:

$$\Delta=-y.$$

Таким образом:

a) При $y<0$ — уравнение гиперболического вида в области своего определения.
b) При $y=0$ — уравнение параболического вида в области своего определения.
c) При $y>0$ — уравнение эллиптического вида в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$y\,dy^2+dx^2=0,$$

или

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,$$

или

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-1.$$

а) Если $y<0,$ то $\pm\sqrt{-y}\,\dfrac{dy}{dx}=1.$

Отсюда имеем:

$$\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=x+C_1 \text{ и } -\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=x+C_2$$

или

$$C_1=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \text{ и } C_2=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\ .$$

Введем новые переменные:

$$\xi=x-\ \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \text{ и } \zeta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\sqrt{-y}\,\frac{\partial u}{\partial \xi}-\sqrt{-y}\,\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{-y}\,\frac{\partial u}{\partial \xi}-\sqrt{-y}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{-y}\,\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{-y}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$= \sqrt{-y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \sqrt{-y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \sqrt{-y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \sqrt{-y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

или

$$4y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{8(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{8(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Учитывая, что

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \text{ и } \zeta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$$

или

$$\xi - \eta = -\frac{4}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \text{ и } -3(\xi - \eta) = 4(-y)^{\frac{3}{2}},$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

b) Если $y = 0,$ то $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

c) Если $y > 0,$ то $\sqrt{y}\frac{dy}{dx} = \pm i.$

Отсюда имеем:

$$-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=xi-C_1 \ \text{ и } \ \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=xi+C_2$$

или

$$C_1=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+xi \ \text{ и } \ C_2=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-xi.$$

Введем новые переменные:

$$\xi=\frac{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+xi-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+xi}{2i}=x \ \text{ и } \ \eta=\frac{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+xi+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-xi}{2}=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\sqrt{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\sqrt{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

7. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+4y\dfrac{\partial u}{\partial y}+16x^4u=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=x^2;\ a_{12}(x;y)=xy;\ a_{22}(x;y)=-3y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta=x^2y^2+3x^2y^2=4x^2y^2.$$

Таким образом:

a) При $x\neq 0$ и $y\neq 0$ — уравнение гиперболического вида в области своего определения.

b) При $x=0$ или $y=0$ — уравнение параболического вида в области своего определения.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

a) Если $x\neq 0$ и $y\neq 0$, характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$x^2\,dy^2-2xy\,dxdy-3y^2\,dx^2=0,$$

или

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\,\frac{dy}{dx}-3y^2=0.$$

Так как $D=4x^2y^2+12x^2y^2=16x^2y^2$, то:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy\pm 4xy}{2x^2}=\frac{y\pm 2y}{x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \text{ и } \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x},$$

или

$$\ln y = -\ln x + C_1 \text{ или } \ln y = \ln x^3 + C_2.$$

Отсюда имеем:

$$C_1 = \frac{x^3}{y} \text{ и } C_2 = yx.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{x^3}{y} \text{ и } \eta = yx.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3x^2}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3x^2}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3x^2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{3x^2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{9x^4}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 6\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{x^3}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{3x^2}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{x^3}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 3\frac{x^5}{y^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3x^2}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{x^3}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{x^3}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{x^3}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{2x^3}{y^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{x^4}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{x^6}{y^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2x^3}{y^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6x^4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{9x^6}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+6\frac{x^3}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}+2x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4x^4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-$$

$$-6\frac{x^6}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2xy\frac{\partial u}{\partial \xi}--6\frac{x^3}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}-3x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6x^4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-$$

$$-3\frac{x^6}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-6\frac{x^3}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}+4xy\frac{\partial u}{\partial \xi}-4\frac{x^3}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}+16x^4u=0$$

или

$$16x^4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4xy\frac{\partial u}{\partial \xi}-16\frac{x^3}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}+16x^4u=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y}{4x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta}+u=0.$$

Учитывая, что

$$\xi=\frac{x^3}{y}\ \text{ и }\ \eta=yx,$$

имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{4\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+u=0.$$

b) При $x=0$ или $y=0$ имеем:

$$-3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

или

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}+16x^4u=0.$$

8. $\left(1+x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=1+x^2;\ a_{12}(x;y)=0;\ a_{22}(x;y)=1+y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta=-\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right).$$

Так как $\Delta<0\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$ то это уравнение эллиптического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$\left(1+x^2\right)dy^2+\left(1+y^2\right)dx^2=0,$$

или

$$\left(1+x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1+y^2=0,$$

или

$$\left(1+x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\left(1+y^2\right),$$

или

$$\pm\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}=i\sqrt{1+y^2}.$$

Следовательно:

$$-i\,\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|=-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C_1$$

или

$$i\ \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C_2.$$

Отсюда имеем:

$$C_1=i\ \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$$

$$C_2=-i\ \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|.$$

Введем новые переменные:

$$\xi=\frac{i\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-i\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}{2}=$$

$$\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$$

$$\eta=\frac{i\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-i\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}{2i}=$$

$$\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}-$$

$$-\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}-$$

$$-\frac{y}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{y}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{y\left(1+y^2\right)}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

9. $\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=\sin^2 x;\ a_{12}(x;y)=-y\sin x;\ a_{22}(x;y)=y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta=y^2\sin^2 x-y^2\sin^2 x=0.$$

Так как $\Delta=0\,\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,$ то уравнение является уравнением параболического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$\sin^2 xdy^2+2y\sin xdxdy+y^2dx^2=0,$$

или

$$\sin^2 x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\sin x\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 .$$

Так как $D = 4y^2\sin^2 x - 4y^2\sin^2 x = 0$, то имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\sin x}{2\sin^2 x} = -\frac{y}{\sin x}$$

или

$$y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} = C.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} \text{ и } \eta = y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) =$$

$$= \frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi} =$$

$$= \frac{y^2}{4\cos^4\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$

$$=\frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}=$$

$$=\frac{y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+$$

$$+2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{y^2\sin^2 x}{4\cos^4\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y^2\sin x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y^2\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}-$$

$$-\frac{y\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+y^2\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2y^2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

или

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2y\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}-1\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}}{y^2\mathrm{tg}^2\,\dfrac{x}{2} + y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Учитывая, что: $\xi = y\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ и $\eta = y,$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \alpha = \mathrm{const}.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y) = 1;\ a_{12}(x;y) = 0;\ a_{22}(x;y) = y.$$

Следовательно: $\Delta = -y.$

a) При $\Delta = -y > 0,$, т.е. если $y < 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\Delta = -y = 0,$ т.е. если $y = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $\Delta = -y < 0,$ т.е. если $y > 0$ — уравнение эллиптического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$$

или

$$dy^2 + ydx^2 = 0$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -y.$$

а) Если $y<0,$ то имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{-y} \text{ или } \frac{dy}{dx} = +\sqrt{-y}$$

или

$$-2\sqrt{-y} = -x + C_1 \text{ и } -2\sqrt{-y} = x + C_2$$

или

$$C_1 = x - 2\sqrt{-y} \text{ или } C_2 = x + 2\sqrt{-y}.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = x - 2\sqrt{-y} \text{ или } \zeta = x + 2\sqrt{-y}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$+\frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{y}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}+$$

$$+\frac{a}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{a}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{2a-1}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1-2a}{2\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Учитывая, что

$$\xi = x-2\sqrt{-y} \text{ или } \zeta = x+2\sqrt{-y}.$$

имеем

$$\xi-\eta=-4\sqrt{-y}.$$

Следовательно:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{2a-1}{2(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{a-\frac{1}{2}}{(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

b) Если $y=0,$ то имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

c) Если $y>0$ то имеем:

$$\frac{dy}{dx}=i\sqrt{y} \text{ или } \frac{dy}{dx}=-i\sqrt{y}$$

или

$$2\sqrt{y}=xi+C_1 \text{ или } 2\sqrt{y}=-xi+C_2,$$

или

$$C_1=2\sqrt{y}-xi \text{ или } C_2=2\sqrt{y}+xi.$$

Введем новые переменные:

$$\xi=\frac{2\sqrt{y}-xi-\ 2\sqrt{y}-xi}{2i}=x;$$

$$\eta=\frac{2\sqrt{y}-xi+2\sqrt{y}+xi}{2}=2\sqrt{y}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{y}{2y^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{a}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{a}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{(2a-1)}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{(2a-1)}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

11. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=x^2;\; a_{12}(x;y)=0;\; a_{22}(x;y)=-y^2.$$

Следовательно: $\Delta=x^2y^2$.

a) При $\Delta=x^2y^2>0$, т.е. при $x\neq 0$ и $y\neq 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\Delta=x^2y^2=0$, т.е. при $x=0$ и $y=0$ — уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$x^2dy^2-y^2dx^2=0,$$

или

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0,$$

или

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2,$$

или

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mp y.$$

а) При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ имеем:

$$-\ln|y| = \ln|x| + C_1 \text{ и } \ln|y| = \ln|x| + C_2$$

или

$$\ln|xy| = C_1 \text{ и } \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) =$$

$$= y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta} =$$

$$= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}-y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-$$

$$-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

или

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Учитывая, что

$$\xi=xy \text{ и } \eta=\frac{y}{x},$$

получаем:

$$-4\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+2\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$2\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Решим полученное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\right)=0 \Rightarrow 2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}-u=C_1(\xi) \Rightarrow 2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}=C_1(\xi)+u \Rightarrow$$

$$=>\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{C_1(\xi)}{2\xi}+\frac{u}{2\xi}=>\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{2\xi}u=C_1(\xi).$$

Отсюда имеем:

$$u=e^{\int\frac{1}{2\xi}d\xi}\left(C_2(\eta)+C_1(\xi)\right)=\left(C_2(\eta)+C_1(\xi)\right)e^{\frac{1}{2}\ln\xi}=\left(C_1(\xi)+C_2(\eta)\right)\sqrt{\xi}.$$

b) При $\Delta = x^2y^2=0,$ т.е. при $x=0$ или $y=0$ имеем:

$$-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ или } x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

§ 3. Метод характеристик

Нахождение общего решения уравнений

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=1;\ a_{12}(x;y)=-\sin x;\ a_{22}(x;y)=-\cos^2 x.$$

Следовательно:

$$\Delta=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Так как $\Delta=1>0$ — то это уравнение гиперболического типа во всей области определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$dy^2+2\sin x dxdy-\cos^2 x\,dx^2=0,$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\sin x\frac{dy}{dx}-\cos^2 x=0.$$

Так как $D=4\sin^2 x+4\cos^2 x=4,$ то:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\sin x-2}{2}=-\sin x-1 \text{ и } \frac{dy}{dx}=-\frac{2\sin x+2}{2}=-\sin x+1.$$

Следовательно:

$$y=\cos x-x+C_1 \text{ и } y=\cos x+x+C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi=\cos x-x-y \text{ и } \eta=\cos x+x-y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\left(-\sin x-1\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(-\sin x+1\right)\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(-\sin x-1\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(-\sin x+1\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\left(-\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\left(-\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\left(-\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$

$$+\left(-\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\left(-\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\left(-\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=\left(-\sin x-1\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\left(-\sin x-1\right)\left(-\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(-\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$

$$+\left(-\sin x+1\right)\left(-\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\left(-\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\left(-\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}=$$

$$=\left(\sin^2 x+2\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left(\sin^2 x-2\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-$$

$$-\cos x\frac{\partial u}{\partial\xi}-\cos x\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=$$

$$=\left(\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\left(\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left(\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\left(\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=$$

$$=\left(\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left(\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получаем:

$$\left(\sin^2 x+2\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left(\sin^2 x-2\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-$$

$$-\cos x\frac{\partial u}{\partial\xi}-\cos x\frac{\partial u}{\partial\eta}-2\sin x\left(\sin x+1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-$$

$$-2\sin x\left(\sin x-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}--\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-$$

$$-2\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\cos x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\cos x\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$$

или

$$\left(-2-2\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\xi}=C_1\left(\xi\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\eta}=C_2\left(\eta\right).$$

Следовательно:

$$U\left(\xi;\eta\right)=C_1\left(\xi\right)+C_2\left(\eta\right)$$

или

$$U\left(x;y\right)=C_1\left(\cos x-x-y\right)+C_2\left(\cos x+x-y\right).$$

Таким образом:

$$U\left(x;y\right)=\varphi\left(\cos x-x-y\right)+\psi\left(\cos x+x-y\right),$$

где φ и ψ произвольные функции.

2. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Имеем:

$$a_{11}\left(x;y\right)=x^2;\ a_{12}\left(x;y\right)=0;\ a_{22}\left(x;y\right)=-y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta=x^2y^2.$$

а) При $\Delta=x^2y^2>0,$ т.е. при $x\neq 0$ и $y\neq 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\Delta = x^2 y^2 = 0$, т.е. при $x = 0$ или $y = 0$ — уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12} dxdy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$x^2 dy^2 - y^2\, dx^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y^2,$$

или

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right) = \mp y.$$

a) При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ — имеем:

$$-\ln|y| = \ln|x| + C_1 \text{ и } \ln|y| = \ln|x| + C_2$$

или

$$\ln|xy| = C_1 \text{ и } \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)==\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}=$$

$$=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}-y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-$$

$$-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2xy\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-2xy\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

или

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

Учитывая, что

$$\xi=xy \text{ и } \eta=\frac{y}{x},$$

получим:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

Итак:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0\Rightarrow 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2\eta}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2\eta}=C_2(\eta)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\eta}=C_2(\eta)-\frac{1}{2\eta}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\eta}=C_2(\eta)-\frac{1}{2\eta}.$$

Таким образом:

$$U(\xi;\eta)=\int C_2(\eta)d\eta-\int\frac{1}{2\eta}d\eta+C_1(\xi)=C_1(\xi)+C_2(\eta)-\frac{1}{2}\ln\eta$$

или

$$U(\xi;\ \eta)=\frac{1}{\sqrt{\eta}}C_1(\xi)+C_2(\eta).$$

Учитывая, что

$$\xi=xy\ \text{ и }\ \eta=\frac{y}{x},$$

окончательно получаем:

$$U(x;\ y)=\sqrt{\frac{x}{y}}C_1(xy)+C_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

b) При $x=0$ или $y=0$ имеем уравнения:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ y=0$$

или

$$-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ x=0,$$

которые легко решаются.

3. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=x^2;\, a_{12}(x;y)=-xy;\, a_{22}(x;y)=y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta=x^2y^2-x^2y^2.$$

Так как $\Delta=0$ то уравнение является уравнением параболического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$x^2dy^2+2xydxdy+\text{y}^2dx^2=0,$$

или

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}+y^2=0.$$

Так как

$$D=4x^2y^2-4x^2y^2=0,$$

то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Введем новые переменные:

$$\xi=xy \text{ и } \eta=x.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)==\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$

$$=y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}=$$

$$=xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$

$$=x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\ +x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}-2xy\frac{\partial u}{\partial \xi}+$$

$$x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+xy\frac{\partial u}{\partial \xi}+x\frac{\partial u}{\partial \eta}+xy\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

или

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+x\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

или

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Учитывая, что $\xi=xy$ и $\eta=x,$ получаем:

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Итак:

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0\Rightarrow\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}=C_2(\xi)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{C_2(\xi)}{\eta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\xi,\eta)=C_2(\xi)\ln\eta+C_1(\xi).$$

Учитывая замену $\xi=xy$ и $\eta=x,$ получаем:

$$\mathcal{U}(x;y)=\varphi(xy)\ln x+\psi(xy).$$

4. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Введем новую функцию:

$$v=ux.$$

Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x;y)=1;\ a_{12}(x;y)=0;\ a_{22}(x;y)=-1.$$

Так как $\Delta=1>0$ — то уравнение является уравнением гиперболического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

или

$$dy^2-dx^2=0.$$

Итак:

$$y^2-dx^2=0\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\mp1\Rightarrow y=x+C_1\ \text{и}\ y=-x+C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = y - x \text{ и } \eta = y + x.$$

Тогда:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$$

или

$$-4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Следовательно, имеем:

$$v(\xi;\eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

или

$$v(x;y)=C_1(y-x)+C_2(y+x),$$

или

$$xu(x;y)=\varphi(y-x)+\psi(y+x),$$

или

$$u(x;y)=\frac{\varphi(y-x)+\psi(y+x)}{x}.$$

5. $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+xyu=0.$

Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

а также его общее решение.

7. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0}=3x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=0.$$

8. Найти решение уравнения

$$4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0}=\varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=\varphi_1(x).$$

9. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\,|_{y=\sin x}=\varphi_0\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=\sin x}=\varphi_1\left(x\right).$$

10. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\,|_{y=0}=f_1\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=0}=f_2\left(x\right).$$

11. Найти решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\,|_{y=1}=\varphi_0\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=1}=\varphi_1\left(x\right).$$

§ 4. Метод разделения переменных

Уравнения гиперболического типа

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Краевые условия:

$$U\left(0;t\right)=0 \text{ и } U\left(\ell;t\right)=0.$$

Начальные условия:

$$\varphi(x)=U(x;0)=\frac{16}{5}k\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)\right] \text{ и } \psi(x)=U_t(x;0)=0.$$

Решение уравнения будем искать в виде:

$$U(x;t)=X(x)T(t).$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$XT''=X''T$$

или

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=\lambda=\text{const}.$$

Из последнего уравнения имеем:

$$\frac{X''}{X}=\lambda \text{ или } X''=\lambda X$$

и

$$\frac{T''}{T}=\lambda \text{ или } T''=\lambda T.$$

Из начальных условий $U(0;t)=0$ и $U(\ell;t)=0$ имеем:

$$X(0)=0 \text{ и } X(\ell)=0.$$

Таким образом, нам надо найти ненулевое решение задачи:

$$X''=\lambda X$$
$$X(0)=0 \text{ и } X(\ell)=0.$$

Характеристическое уравнение уравнения $X''-\lambda X=0$ имеет вид:

$$k^2-\lambda=0.$$

При $\lambda>0$ имеем:

$$X(x)=C_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Используя начальные условия, получаем:

$$C_1=0,\ C_2=0.$$

Следовательно, $X(x)=0$ тождественно.

При $\lambda=0$ имеем:

$$X(x)=C_1+C_2x.$$

Используя начальные условия, получаем:

$$C_1=0,\ C_2=0.$$

Следовательно, $X(x)=0$ тождественно.

При $\lambda<0$ имеем:

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{-\lambda}x+C_2\sin\sqrt{-\lambda}x.$$

Используя начальные условия, получим:

$$C_1=0.$$

Следовательно:

$$X(x)=C_2\sin\sqrt{-\lambda}x.$$

Используя начальные условия, получим:

$$C_2\sin\sqrt{-\lambda}\ell=0.$$

Следовательно, так как ищем ненулевое решение, имеем:

$$\sin\sqrt{-\lambda}\ell = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\ell = \pi n \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{\pi n}{\ell} \Rightarrow -\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} \Rightarrow \lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}.$$

Таким образом, получили:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из уравнения

$$\frac{T''}{T} = -\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$$

имеем:

$$T'' + \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}T = 0$$

или

$$T_n(t) = \left(a_n\cos\frac{a\pi n}{\ell}t + b_n\sin\frac{a\pi n}{\ell}t\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

Таким образом, получили:

$$U_n(x;t) = \left(a_n\cos\frac{a\pi n}{\ell}t + b_n\sin\frac{a\pi n}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

или, в силу линейности данного уравнения:

$$U(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{a\pi n}{\ell}t + b_n\sin\frac{a\pi n}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x.$$

Так как

$$U'_t(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\sin\frac{a\pi n}{\ell}t\cdot\frac{\pi n}{\ell} + b_n\cos\frac{a\pi n}{\ell}t\cdot\frac{\pi n}{\ell}\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x,$$

то из условия $\psi(x) = U_t(x;0) = 0$ получаем: $b_n = 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots$

Следовательно:

$$U\left(x;t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{a\pi n}{\ell}t\ \sin\frac{\pi n}{\ell}x.$$

Так как

$$U\left(x;0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \sin\frac{\pi n}{\ell}x=\frac{16}{5}k\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)\right],$$

то

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\frac{16}{5}k\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx=$$

$$=-\frac{32k}{5\ell}\frac{\ell}{\pi n}\int_0^{\ell}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]d\cos\frac{\pi n}{\ell}x=$$

$$=-\frac{32k}{5\pi n}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]\cos\frac{\pi n}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell}+\frac{32k}{5\pi n}\frac{l}{\pi n}\int_0^{\ell}\left[4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3-6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+1\right]d\sin\frac{\pi n}{\ell}x=$$

$$=\frac{32k}{5\pi^2n^2}\frac{\ell}{\pi n}\int_0^{\ell}\left[12\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-12\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]d\cos\frac{\pi n}{\ell}x=$$

$$=\frac{32k}{5\pi^3n^3}\left[12\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-12\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]\cos\frac{\pi n}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell}-\frac{32k}{5\pi^2n^2}\frac{\ell}{\pi}\int_0^{\ell}\left[24\left(\frac{x}{\ell}\right)-12\right]\frac{1}{x}d\sin\frac{\pi n}{\ell}x=$$

$$=-\frac{32k}{5\pi^4n^4}\left[24\left(\frac{x}{\ell}\right)-12\right]\sin\frac{\pi n}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell}++\frac{32k}{5\pi^4n^4}\int_0^{\ell}24\left(\frac{1}{\ell}\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}dx=$$

$$=-\frac{768}{5\pi^5n^5}\cos\frac{\pi n}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell}==\frac{768}{5\pi^5n^5}\left(1-\cos\pi n\right)=\frac{768}{5\pi^5n^5}\left(1-\cos\pi n\right)=\frac{1536}{5\pi^5\left(2n+1\right)^5}.$$

Таким образом:

$$U\left(x;t\right)=\frac{1536}{5\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\left(2n+1\right)a\pi}{\ell}t\ \sin\frac{\left(2n+1\right)\pi}{\ell}x}{\left(2n+1\right)^5}.$$

Уравнения параболического типа

2. Задано уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<\ell,\ t>0.$$

Начальное условие:

$$U(x;0)=\varphi(x),\ x\in[0;\ell].$$

Краевые условия:

$$U(0;t)=0,\ U(\ell;t)=0,\ t>0.$$

Общее решение задачи задается формулой:

$$U(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{\frac{-\pi^2 n^2 a^2}{\ell^2}t}\sin\frac{\pi n}{\ell}x,$$

где

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности на бесконечности.

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<\ell, t>0.$$

Начальное условие:

$$U(x;0)=x^2,\ x\in(0;1].$$

Краевые условия:

$$U(0;t)=0,\ U(1;t)=1,\ t\geq 0.$$

Для решения этой задачи рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\tilde{U}(x;t)=U(x;t)-x.$$

Тогда функция $\tilde{U}(x;t)$ является решением задачи:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}=\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2},\ 0<x<\ell,\ t>0$$
$$\tilde{U}(x;0)=x^2-x,\ x\in(0;1]$$
$$\tilde{U}(0;t)=0,\ \tilde{U}(1;t)=0,\ t\geq 0.$$

Тогда согласно формуле выше имеем:

$$\tilde{U}(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\pi^2 n^2 t}\sin \pi n x,$$

где

$$C_n=2\int_0^1 (x^2-x)\sin \pi n x\, dx=\begin{cases} 0, \text{ при } n=2k \\ \dfrac{-8}{\pi^3 n^3}, \text{ при } n=2k+1 \end{cases},$$

где $k=1,2,3,\ldots$

Следовательно:

$$\tilde{U}(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^3(2k-1)^3}e^{-\pi^2(2k-1)^2 t}\sin\pi(2k-1)x,$$

т.е.

$$U(x;t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin \pi (2k-1) x + x.$$

Итого:

$$\left| U(x;t) - x \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin \pi (2k-1) x \right| \le$$

$$\le e^{-\pi^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} = C e^{-\pi^2 t},$$

где:

$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3}$ — сумма сходящегося ряда.

Таким образом

$$\left| U(x;t) - x \right| \le C e^{-\pi^2 t}.$$

Из последнего неравенства следует, что:

$$\lim_{t \to \infty} U(x;t) = x,$$

т.е. решение $U(x;t)$ при $t \to +\infty$ равномерно стремится к функции $V(x;t) = x$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

§ 1. Типы уравнений с частными производными

1. $\Delta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2} - \sin 2x\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2} - \sin 2x\right) > 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — область гиперболичности.

2. $\Delta = \dfrac{25}{4} - 2(x + y)$.

a) $y < \dfrac{25}{8} - x$ — область гиперболичности.

b) $y = \dfrac{25}{8} - x$ — область параболичности.

c) $y > \dfrac{25}{8} - x$ — область эллиптичности.

3. $\Delta = \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{7}{2}xy + \dfrac{9}{4}y^2$ — область гиперболичности.

4. $\Delta = 2\cos^2 y - \sin^2 x$.

a) $2\cos^2 y > \sin^2 x$ — область гиперболичности.

b) $2\cos^2 y = \sin^2 x$ — область параболичности.

c) $2\cos^2 y < \sin^2 x$ — область эллиптичности.

5. $\Delta = \cos^2 y\left(\sin^2 y - 1\right)$.

a) $\cos^2 y\left(\sin^2 y - 1\right) > 0$ — область гиперболичности.

b) $\cos^2 y = 0, \quad \sin^2 y = 1$ — область параболичности.

c) $\cos^2 y\left(\sin^2 y - 1\right) < 0$ — область эллиптичности.

6. $\Delta = 9x^2 - xy$.

a) $y < 9x$ — область гиперболичности.

b) $y = 9x$ — область параболичности.

c) $y > 9x$ — область эллиптичности.

7. $\Delta = -\frac{3}{4}\cos^2 x$.

a) $-\frac{3}{4}\cos^2 x < 0$ — область гиперболичности.

b) $-\frac{3}{4}\cos^2 x = 0$ — область параболичности.

c) $-\frac{3}{4}\cos^2 x > 0$ — область эллиптичности.

8. $\Delta = \cos 2x$.
a) $\cos 2x > 0$ — область гиперболичности.
b) $\cos 2x = 0$ — область параболичности.

9. $\Delta = 2a^2 - 1$.
a) $2a^2 - 1 < 0$ — область гиперболичности.
b) $2a^2 - 1 = 0,\ a = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ — область параболичности.
c) $2a^2 - 1 > 0$ — область эллиптичности.

10. $\Delta = a(a+2)$.
a) $a(a+2) < 0$ — область гиперболичности.
b) $a(a+2) = 0,\ a = 0,\ a = -2$ — область параболичности.
c) $a(a+2) > 0$ — область эллиптичности.

11. $\Delta = \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1)$.
a) $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0,\ \operatorname{tg} x = 0,\ \operatorname{tg} x = 1$ — область параболичности.
b) $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) > 0$ — область эллиптичности.

12. $\Delta = -12,\ -12 < 0$ — область эллиптичности.

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными в случае двух независимых переменных

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\ \xi=x+y,\ \zeta=3x-y.$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}=0,\ \xi=2x-y,\ \zeta=x.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+(\alpha+\beta)\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}+cu=0,\ \xi=x+y,\ \zeta=y.$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}+\dfrac{\xi-\zeta}{32}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=0,\ \xi=2x+\sin x+y,\ \zeta=2x-\sin x-y.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\dfrac{1}{\xi-\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{1}{2\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}=0,\ \xi=x^2-y^2,\ \ \zeta=x^2.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}-\dfrac{2\xi}{\zeta^2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\ \xi=y\sin x,\ \zeta=y.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\dfrac{1}{3\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}=0,\ \xi=x,\ \ \zeta=\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}},\ y>0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}-\frac{1}{6(\xi-\zeta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=0,\ \xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\ \zeta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\ y<0.$$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}+\dfrac{1}{4\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}+u=0,\ \xi=xy,\ \zeta=\dfrac{x^2}{y}.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0,\ \xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ \zeta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}-\dfrac{2\xi}{\xi^2+\zeta^2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\ \xi=y\ \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2},\ \zeta=y.$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}-\dfrac{\alpha-\frac{1}{2}}{\xi-\zeta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=0,\ \xi=x-2\sqrt{-y},\ \zeta=x+2\sqrt{-y},\ y<0.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{2\alpha-1}{\zeta}\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \zeta}=0,\ \xi=x,\ \zeta=2\sqrt{y},\ y>0.$$

§ 3. Метод характеристик

1. $\mathcal{U}(x;y)=\varphi(x+y-\cos x)+\psi(x-y+\cos x)$.
2. $\mathcal{U}(x;y)=\sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.
3. $\mathcal{U}(x;y)=\varphi(xy)\ln x+\psi(xy)$.
4. $\mathcal{U}(x;y)=\frac{\varphi(x-y)+\psi(x+y)}{x}$. Указание: ввести новую функцию $\mathcal{V}$, положив $\mathcal{V}=xu$.
5. $\mathcal{U}(x;y)=\frac{\varphi(x)-\psi(y)}{x-y}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольная функция. Указание: ввести новую функцию v, положив $\mathcal{V}=(x-y)u$.
6. $\mathcal{U}(x;y)=\ell^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(\varphi(x)+\psi(y)\right)$.
7. В области $1-x^2+y^2>0$ уравнения принадлежит гиперболическому типу, в области $1-x^2+y^2<0$ — эллиптическому типу. Кривая $x^2-y^2=1$ — является линией параболы.
$$\mathcal{U}(x;y)=\varphi\left(\frac{y+\sqrt{1-x^2+y^2}}{1+x}\right)+\psi\left(\frac{y-\sqrt{1-x^2+y^2}}{1+x}\right).$$
8. $\mathcal{U}(x;y)=3x^2+y^2$. Указание: следует воспользоваться общим решением $\mathcal{U}(x;y)=\varphi(x+y)+\psi(3x-y)$ данного уравнения.
9. $\mathcal{U}(x;y)=\varphi_0\left(x-\frac{2}{3}y^3\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y}\varphi_1(x)\,dx$

10. $\mathcal{U}(x;y)=\dfrac{\varphi_0(x-\sin x+y)+\varphi_0(x+\sin x-y)}{2}+\dfrac{1}{2}\int\limits_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y}\varphi_1(z)\,dz$

11. $\mathcal{U}(x;y)=f_1(x+y)+\dfrac{5}{6}\ell^{-\frac{x+y}{6}}\left\{\int\limits_{x+y}^{x-\frac{y}{5}}\ell^{\frac{z}{6}}f'_1(z)\,dz-\int\limits_{x+y}^{x-\frac{y}{5}}\ell^{\frac{z}{6}}f'_2(z)\,dz\right\}.$

12.
$$\mathcal{U}(x;y)=\frac{3}{4}\varphi_0\left(x\sqrt[3]{y}\right)+\frac{1}{4}y\varphi_0\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\varphi_0(x)x^{\frac{-7}{4}}dx$$
$$-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\varphi_1(x)\left(-x^{\frac{-7}{4}}\right)dx.$$

§ 4. Метод разделения переменных

1. $\mathcal{U}(x;t)=\dfrac{1536}{5\pi^5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell}\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}}{(2n+1)^5}.$

2. $\mathcal{U}(x;t)=\dfrac{32k}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell}\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}}{(2n+1)^3}.$

3. $\mathcal{U}(x;t)=\dfrac{8k}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi\alpha t}{2\ell}\,\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2\ell}.$

4. $U(x;t)=-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{8}{\pi^3(2k-1)^3}e^{-\pi^2(2k-1)^2t}\sin\pi(2k-1)x+x.$

5. $\mathcal{U}(x;t)=\dfrac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\ell^{\frac{-(1n+1)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$

6. $\mathcal{U}(x;t)=\dfrac{5C}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\ell^{\frac{-(1n+1)^2\pi^2a^2}{\ell^2}t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$

7. $\mathcal{U}(x;y)=\mathcal{A}t\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)-\dfrac{\ell^2\mathcal{A}}{6a^2}\left[\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right]+$

$+\dfrac{2\ell^2\mathcal{A}}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ell^{\frac{-\pi^2a^2n^2}{\ell^2}t}}{n^3}\sin\dfrac{\pi xn}{\ell}$

Решение следует искать в виде суммы $\mathcal{U}(x;t)=\mathcal{U}_1(x;t)+$ $+\mathcal{U}_2(x;t)$, где $\mathcal{U}_1(x;t)$ есть решение уравнения $\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\alpha^2\dfrac{\partial^2u_1}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $\mathcal{U}_1(0;t)=\mathcal{A}t$, $\mathcal{U}_1(e;t)=0$, а $\mathcal{U}_2(x;t)$ есть решение того же уравнения при условиях $\mathcal{U}_2(0;t)=0$, $\mathcal{U}_2(e;t)=0$, $\mathcal{U}_2(x;0)=-\mathcal{U}_1(x;0)$.

8. $\mathcal{U}(x;y)=\dfrac{4\mathcal{U}_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)(a-x)\pi}{b}\sin\dfrac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi a}{b}}.$

9. $\mathcal{U}(x;y)=\dfrac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\ell^{\frac{-\pi n}{a}}\sin\dfrac{\pi nx}{a}.$

10. $\mathcal{U}(r;0)=\dfrac{8A}{3}\operatorname{sh}\ln r\sin 0.$ Указание: ввести полярные координаты.

11. $\mathcal{U}(x;y)=A+\dfrac{A(b-2)}{2a}x-\dfrac{4Ab}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)\pi a}{b}}\cos\dfrac{(2k+1)\pi a}{b}.$

12. $\mathcal{U}(\rho;\varphi)=\dfrac{2A\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{\rho}{k}\right)^{\frac{\pi n}{\lambda}}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n\varphi}{\lambda}}{n}.$

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
3. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е. – М.: ГИТТЛ, 1966. – 444 с.
4. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ГИТТЛ, 1953.
5. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Гос. изд. ф.-м. литературы, 1962. – 767 с.
6. *Нуцубидзе Д.В., Каленова А.А.* Уравнения в частных производных: учебно-методическое пособие. – М.: МГГЭИ, 2011. – 48 стр.

Содержание

Учебное издание

Давид Вахтангович **Нуцубидзе,**
Наталья Васильевна **Труб,**
Андрей Владимирович **Агапчев,**
Анастасия Николаевна **Колесникова**

Сборник задач по уравнениям в частных производных

Ответственный редактор	С.А. Бобко
Технический редактор	К.А. Антонов
Редактор/корректор	Ю.Ф. Кравчинская
Компьютерная верстка	К.А. Антонов

Подписано в печать 30.01.2018. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 5.
Тираж 46 экз. Заказ № 7.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.