МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет (МГГЭУ)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ С ПРИМЕРАМИ И ВАРИАНТАМИ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Составитель: Кадымов В.А.

Печатается в авторской редакции.

Москва
2015

УДК 517.2
ББК 22.16
К 13

Рецензент:
Кулемин А.В., профессор кафедры математики, д-р физ.-мат. наук

К 13 **Дифференциальное** и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий. Часть 2. Учебно-методическое пособие / состав.: В.А. Кадымов. – М.: МГГЭУ, 2015. – 60 с.

Методические указания соответствуют утвержденной программе курса высшей математики и рекомендованы кафедрой в качестве дополнительной литературы для изучения материала студентами первого курса. В ней в краткой форме представлен необходимый теоретический материал по основным разделам интегрального исчисления функций многих переменных, раскрываются понятия двойного, тройного и криволинейного интегралов. Указаны методы их вычисления. Приводятся различные приложения интегрального исчисления к геометрии, механике.

В пп.1, 2 вкратце изложен необходимый материал из предыдущих разделов математического анализа, которым необходимо владеть для изучения основных положений интегрального исчисления функции многих переменных.

Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Представлено решение типового варианта расчетно-графической работы. Приводятся варианты заданий (расчетно-графических работ) для самостоятельных занятий. Все это поможет студентам лучше понять материал и успешно подготовиться к экзамену.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов МГГЭУ, обучающихся по специальностям:

- прикладная математика и информатика: 01.03.02 (010400.62);

-экономика: 38.03.01 (080.100.62);

-менеджмент: 38.03.02 (080.200.62).

1. Необходимые сведения из интегрального исчисления функции одной переменной

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка имеет место равенство:

$$F'(x) = f(x), \text{ или } dF(x) = f(x)dx. \tag{1.1}$$

Пример 1. Для функции $f(x) = 4x^3$ первообразной будет не только $F(x) = x^4$, но и $x^4 + 5$, и вообще $x^4 + C$, где C — произвольная постоянная.

Теорема 1. Если $F(x)$ и $F_1(x)$ — две различные первообразные от функции $f(x)$ на $[a, b]$, то они отличаются между собой на постоянное число:

$$F_1(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b]. \tag{1.2}$$

Определение 2. Множество всех первообразных $F(x) + C$ от функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от данной функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1.3}$$

при этом $f(x)$ *называется подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подинтегральным выражением, x — переменной интегрирования*. Операция отыскания первообразной для $f(x)$ называется *интегрированием* (она обратна операции дифференцирования), причем можно записать:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x); \; d\int f(x)dx = f(x)dx = dF. \tag{1.4}$$

Формулы (1.4) следуют из (1.1) и (1.3)

Свойства неопределенного интеграла.

1. Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx.$$

2. Постоянный множитель k можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx.$$

Приведем таблицу интегралов от простейших функций (здесь α, a — некоторые числа):

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq-1)$
2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$
3. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
4. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$
5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tg\,x+C$
6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctg\,x+C$
7. $\int tg\,x\,dx=-\ln|\cos x|+C$
8. $\int ctg\,x\,dx=\ln|\sin x|+C$
9. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$; в частности $\int e^x dx=e^x+C$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C\ \ (a\neq 0)$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C\ \ (a\neq 0)$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C\ \ (|x|<a)$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Любую из вышеприведенных формул нетрудно проверить, взяв производную функции, стоящей в правой части равенства и убедившись в её совпадении с соответствующей подинтегральной функцией. Рассмотрим, например, пункт 2 таблицы:

$$\ln|x| = \left[\begin{array}{ll} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{array}\right. \quad \left(\ln|x|\right)' = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x},\ x < 0 \end{array}\right.$$

т.е. $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ и равенство п.2 справедливо.

1.1. Метод тождественных преобразований

Его идея заключается в разложении подинтегральной функции на сумму функций, каждую из которых можно проинтегрировать при помощи какого-либо другого метода, в том числе при помощи непосредственного использования таблицы интегралов.

Пример 2. $J = \int \frac{(x^4 + x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx = ?$

$$J = \int \left(x^8 + 2x^5 + x^2\right) x^{-\frac{1}{3}} dx = \int \left(x^{\frac{23}{3}} + 2x^{\frac{14}{3}} + x^{\frac{5}{3}}\right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{23}{3}+1}}{\frac{23}{3}+1} + 2\frac{x^{\frac{14}{3}+1}}{\frac{14}{3}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{3}{26}x^{\frac{26}{3}} + \frac{6}{17}x^{\frac{17}{3}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C;$$

Пример 3. $J = \int 5^x \left(2^{3x} + 4\right) dx = ?$

$$J = \int \left(5^x \left(2^3\right)^x + 4 \cdot 5^x\right) dx = \int 40^x dx + 4\int 5^x dx = \frac{40^x}{\ln 40} + \frac{4 \cdot 5^x}{\ln 5} + C.$$

Выполните самостоятельно. Найдите неопределенный интеграл, используя тождественные преобразования подинтегральной функции:

1) $\int \frac{(x+2)(3-x)}{x}dx$; 2) $\int \left(2^x - 3^x\right)^2 dx.$

1.2. Метод замены переменной

Если найти интеграл $\int f(x)dx$ непосредственно не удается, то к успеху может привести введение новой переменной t с помощью соотношения $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая функция с непрерывной производной $\varphi'(t)$, имеющая обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$. Поскольку $dx=\varphi'(t)dt$, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int \psi(t)dt, \tag{1.5}$$

где обозначено $\psi(t)=f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$. Если интеграл в правой части (1.5) удается найти:

$$\int \psi(t)dt=\Psi(t)+C,$$

то исходный интеграл определяется как функция x соотношением:

$$\int f(x)dx=\Psi(t)+C=\Psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C. \tag{1.6}$$

Пример 4. $\int \sin 5x\, dx = ?$. С помощью замены $x=\frac{t}{5}$, $dx=\frac{1}{5}dt$ (при этом $t=5x$) и формул (1.5), (1.6) получим:

$$\int \sin 5x\, dx=\int \sin\left(5\frac{t}{5}\right)\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int \sin t\, dt=-\frac{1}{5}\cos t+C=-\frac{1}{5}\cos 5x+C.$$

Весьма часто бывает удобно воспользоваться следующей разновидностью метода замены переменной (**способом подстановки**). Пусть требуется найти интеграл вида $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx.$ Его можно привести к более простому интегралу заменой переменной (подстановкой):

$t=\varphi(x),\ \ dt=\varphi'(x)\,dx,$ в результате чего получается равенство:

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt \tag{1.7}$$

Если интеграл, стоящий справа, удается найти:

$$\int f(t)\,dt=F(t)+C,$$

то исходный интеграл определяется как функция *x* формулой:

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx=F(t)+C=F\left[\varphi(x)\right]+C. \tag{1.8}$$

Подчеркнем, что в отличие от формул (1.5), (1.6), в данном случае не требуется отыскание обратной функции, поскольку здесь замене переменной соответствует соотношение $t=\varphi(x),$ уже разрешенное относительно *t*.

Пример 5. Найдите $\int\sqrt{3x^2+8}\ xdx.$ С помощью подстановки $t=3x^2+8;$ $dt=6xdx$ и формул (1.7), (1.8) получим

$$\int\sqrt{3x^2+8}\ xdx=\int\sqrt{t}\,\frac{dt}{6}=\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{6}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{9}\sqrt{t^3}+C=\frac{1}{9}\sqrt{\left(3x^2+8\right)^3}+C.$$

В процессе замены переменной (подстановки) иногда подробные выкладки можно опустить, не вводя явно переменную *t*, но подразумевая её присутствие. В этих случаях говорят, что применяется способ подведения под знак дифференциала.

Пример 6. $\int\cos\left(x^2+1\right)xdx=?$ Заметим, что $d\left(x^2+1\right)=2xdx,$ т.е. $xdx=\frac{1}{2}d\left(x^2+1\right),$ в результате чего:

$$\int\cos\left(x^2+1\right)xdx=\frac{1}{2}\int\cos\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\sin\left(x^2+1\right)+C.$$

Метод замены переменной в любой его разновидности часто применяется в сочетании с другими методами, например, с методом разложения.

Пример 7.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sin^2 3x} = \int \frac{\cos^2 3x + \sin^2 3x}{\cos^2 3x \cdot \sin^2 3x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 3x} + \frac{1}{\cos^2 3x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 3x} + \int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} + \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} tg\, 3x - \frac{1}{3} ctg\, 3x + C.$$

Выполните самостоятельно. Найдите неопределенный интеграл, пользуясь каким-либо вариантом метода замены переменной:

$$1)\ \int x\sqrt[3]{5 - x^2}\, dx;\ \ 2)\ \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x}}.$$

1.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$, и при этом требуется найти интеграл вида:

$$\int u(x) v'(x) dx.$$

Тогда справедлива формула

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx \qquad (1.9)$$

или, то же самое:

$$\int u(x) dv(x) = u(x) v(x) - \int v(x) du(x).$$

Формула (1.9) приводит к успеху, когда интеграл, стоящий в её правой части, более простой, чем искомый.

Пример 8. $\int x \cos 3x dx = ?$ Примем $u(x) = x$, $v'(x) = \cos 3x$, т.е. $dv = \cos 3x dx$.

Тогда $u'(x) = 1$, а $v(x)$ найдем как первообразную $v'(x)$: $v(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ и согласно (1.9) получим

$$\int x\cos 3x dx = \frac{x}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

Заметим, что удача зависит от правильного выбора функции $u(x)$. В самом деле, если бы в данном примере было принято $u(x) = \cos 3x$, $v'(x) = x$, т.е. $du = -3\sin 3x$, $v = \frac{x^2}{2}$, то формула (1.9), оставаясь справедливой, не привела бы к успеху:

$$\int x\cos 3x dx = \frac{x^2}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}\int x^2 \sin 3x dx,$$

поскольку при этом интеграл в правой части оказался сложнее исходного.

Пример 9. $J = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = ?$

Возьмем $u(x) = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$, откуда $v = tg\, x$, $du = dx$.

В результате $J = x\, tg\, x - \int tg\, x\, dx = x\, tg\, x + \ln|\cos x| + C$.

Пример 10. $J = \int \frac{\arccos\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx = ?$

Сделаем сначала замену переменной $t = \sqrt{x-1}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$, после чего получим: $J = 2\int \arccos t\, dt$.

Далее применим метод интегрирования по частям: возьмем $u(t) = \arccos t$, $dv = dt$, откуда $v = t$, $du = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Таким образом:

$$J = 2\left[t\arccos t - \int \frac{t(-dt)}{\sqrt{1-t^2}}\right] = 2\left[t\arccos t - \int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}\right] =$$
$$= 2\left(t\arccos t - \sqrt{1-t^2}\right) + C = 2\left(\sqrt{x-1}\arccos\sqrt{x-1} - \sqrt{2-x}\right) + C.$$

Выполните самостоятельно. Найдите неопределенный интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$$1)\ \int \frac{xdx}{\sin^2 x};\ 2)\ \int \left(x^2+1\right)\ln x dx.$$

1.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение 3. Дробной рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция, являющаяся отношением двух многочленов (полиномов):

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0},\ a_0\neq 0,\ b_0\neq 0, \qquad (1.10)$$

где $b_0, b_1, \ldots b_m, a_0, a_1, \ldots a_n$ — действительные числа; m, n — целые неотрицательные степени многочленов.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется правильной, если же $m \geq n$, то — неправильной.

Интегрирование дробно-рациональных функций основано на трех теоремах, представленных ниже.

Теорема 2. Любая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Подобное представление нетрудно получить с помощью известного правила деления многочленов. Так, например,

$$\frac{x^3+5x}{x+2}=x^2-2x+9-\frac{18}{x+2}.$$

Определение 4. Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}, k=2,3,4,\ldots;$

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}; \dfrac{p^2}{4}-4<0;$

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, k=2,3,4,\ldots; \dfrac{p^2}{4}-4<0,$

где A, B, a, p, q — действительные числа, причем квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Теорема 3. Любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде:

$$P_n(x) = a_n\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\ldots\left(x-a_s\right)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}\cdot \\ \cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{t_2}\ldots\left(x^2+p_ex+q_e\right)^{t_e}, \tag{1.11}$$

где $a_n, p_1, q_1, p_2, q_2 \ldots p_e, q_e$ — действительные числа; $k_1, k_2, \ldots k_s, t_1, t_2, \ldots, t_e$ — целые положительные числа, причем $k_1 + k_2 + \ldots k_s + 2t_1 + 2t_2 + \ldots 2t_e = n$; числа $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратности $k_1, k_2, \ldots k_s$ соответственно, а все трехчлены $x^2 + p_i x + q_i (i = 1, 2, \ldots, e)$ не имеют действительных корней.

Теорема 4. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}, (m < n)$ можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей указанных выше четырех типов.

Пусть (для простоты) $P_n(x)$ раскладывается так:

$$P_n(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^r \left(x^2+px+q\right)^t.$$

Тогда:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\beta)^r} + \\ + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{C_tx+D_t}{\left(x^2+px+q\right)^t},$$

где $k + r + 2t = n$, а все $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_r, C_1, D_1, \ldots, C_t, D_t$ — неизвестные действительные числа, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов. Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 11. Представьте правильную дробь $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^4-16}$ в виде суммы простейших правильных дробей и вычислите интеграл $\int f(x)dx$.

Сперва разлагаем исходную правильную дробь на сумму простейших правильных дробей:

$$\frac{2x+1}{x^4-16}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4}=$$
$$=\frac{A_1(x-2)\left(x^2+4\right)+A_2(x+2)\left(x^2+4\right)+\left(x^2-4\right)\left(A_3x+A_4\right)}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)},$$

и приравняем числители обеих частей последнего равенства:

$$2x+1=A_1(x-2)\left(x^2+4\right)+A_2(x+2)\left(x^2+4\right)+\left(x^2-4\right)\left(A_3x+A_4\right).$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, A_3,\ A_4$ можем применить один из известных методов (например, метод неопределенных коэффициентов, или метод приравнивания значений многочленов при определенных (четырех) значениях неизвестной x; эти методы достаточно подробно описаны в литературе). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3+\cdot=0 \\ -2A_1+2A_2+\cdot+A_4=0 \\ 4A_1+4A_2-4A_3+\cdot=2 \\ -8A_1+8A_2+\cdot-4A_4=1 \end{cases} \Rightarrow A_1=\frac{3}{32};A_2=\frac{5}{32};A_3=-\frac{1}{4};A_4=-\frac{1}{8}.$$

Используя полученное разложение дробно-рациональной функции, находим интеграл:

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{2x+1}{x^4-16}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4}\right)dx=$$
$$=\frac{3}{32}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+4}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$
$$=\frac{3}{32}\ln|x+2|+\frac{5}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)=$$
$$=\frac{3}{32}\ln|x+2|+\frac{5}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$$

Выполните самостоятельно. Проинтегрируйте дробно-рациональную функцию:

$$1)\ \int \frac{2x^2+3}{x+1}dx;\ 2)\ \int \frac{dx}{x\left(x^2+3\right)}.$$

1.5. Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование тригонометрических функций основано на формулах преобразования тригонометрических выражений.

Пример 12. $J = \int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^3 x} = ?$

$$J = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cos^3 x \sin^3 x} = 2^3 \int \frac{dx}{\cos^2 x (\sin 2x)^3}$$

Выбрав $t = tgx$, получим $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, откуда

$$J = 2^3 \int \frac{dt\left(1+t^2\right)^3}{\left(2t\right)^3} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3}dt = \int \left(\frac{1}{t^3} + 3\frac{1}{t} + 3t + t^3\right)dt =$$

$$= \frac{t^{-2}}{-2} + 3\ln|t| + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C = -\frac{2}{tg^2 x} + 3\ln|tgx| + \frac{3}{2}tg^2 x + \frac{1}{4}tg^4 x + C.$$

Выполните самостоятельно. Проинтегрируйте тригонометрическое выражение:

$$1)\ \int \sin^3(2x)dx;\ 2)\ \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx.$$

1.6. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы

Пусть на отрезке $\left[a,b\right]$ задана некоторая функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ на *n* частей (необязательно равных) так, чтобы $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (см. *рис. 1.1*). Обозначим длину отрезка $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1, 2, ..., n)$. На каждом отрезке

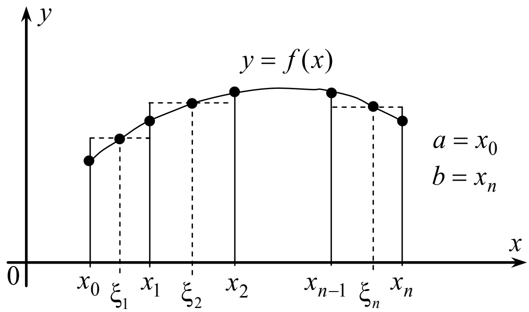

Рис. 1.1

$[x_{i-1}, x_i]$ выберем по произвольной точке ξ_i. Назовем *шагом разбиения* λ наибольшую из длин Δx_i : $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

Определение 5. *Интегральной суммой* σ_n функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется следующая величина:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Устремляя шаг разбиения λ к нулю дроблением $[a, b]$ на все большее количество отрезков, получим последовательность соответствующих интегральных сумм σ_n $(n \to \infty)$.

Определение 6. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$, ни от выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1.12)$$

Величины a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Если для функции $f(x)$ существует определенный интеграл (1.12), то $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Теорема 5 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она на этом отрезке интегрируема. Это условие не является необходимым.

Замечания.

1. В соотношении (1.12) предполагалось. $a < b.$ Если же $a > b$ или $a = b,$ то принимается по определению соответственно

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b],$ то интеграл (2.2) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x),$ осью ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b.$

3. Вычисление определенного интеграла по формуле (1.12) связано, как правило, с большими трудностями, поэтому для его вычисления используется приводимая ниже формула Ньютона-Лейбница, выражающая связь между определенными и неопределенными интегралами.

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b].$

Теорема 6. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b],$ то $\Phi(x)$ есть ее первообразная, т.е.

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{1.13}$$

Теорема 7. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная, то справедливо соотношение:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1.14}$$

которое называется формулой Ньютона-Лейбница.

Обычно в обозначении правой части этой формулы используют знак двойной подстановки: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Пример 13.

$$J=\int\limits_0^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{\sqrt{3}/2}=\arcsin\left(\sqrt{3}/2\right)-\arcsin 0=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}.$$

Выполните самостоятельно. Вычислите определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$1)\ \int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 t dt;\ 2)\ \int\limits_0^1\frac{tdt}{3+t^2}.$$

Пример 14. Установить, сходится или расходится интеграл $J=\int\limits_0^{\infty}\cos 3x dx.$

<u>Решение:</u> $J=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\cos 3x dx,$ но поскольку $\int\limits_0^b\cos 3x dx=\frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^b=$ $=\frac{1}{3}\sin 3b$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\sin 3b$ не существует, то $J=\int\limits_0^{\infty}\cos 3x dx$ расходится.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\left[a;+\infty\right).$ Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$ то он называется *несобственным интегралом с бесконечной верхней границей от функции* $f(x)$ и обозначается:

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл *сходится*. Если такого предела не существует (в частности, он бесконечен), то соответствующий несобственный интеграл не существует и называется *расходящимся*.

Если $f(x)$ непрерывна на $(-\infty,b],$ то несобственный интеграл с бесконечной нижней границей определяется аналогично:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

если же $f(x)$ непрерывна на $(-\infty,+\infty)$, то несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется соотношением:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c — любая фиксированная точка оси x.

Выполните самостоятельно. Вычислите несобственный интеграл с бесконечными пределами (если он сходится) или установите его расходимость:

$$1)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2};\ 2)\ \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\left[a;b\right)$ и $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \infty.$ Если существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$ то он называется сходящимся несобственным интегралом от $f(x)$ на $\left[a;b\right]$ и обозначается $\int_{a}^{b} f(x)dx =$ $= \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$

Если указанного предела не существует, то несобственный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ называется расходящимся.

Для случая, когда $f(x)$ непрерывна на $\left(a;b\right]$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty,$ несобственный интеграл определяется аналогично: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$

Пусть $f(x)$ непрерывна при $x \in [a;c) \cup (c;b],$ $a < c < b,$ и имеет в точке $x = c$ разрыв второго рода. Тогда *несобственным интегралом* от $f(x)$ на $\left[a;b\right]$ называется

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx,$$

при этом $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, если существует каждый из пределов, стоящих справа и *расходящимся*, если хотя бы один из них не существует.

Пример 15. $J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}=?$

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty,$$

несобственный интеграл расходится.

Пример 16. $J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=?$

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2,$$

несобственный интеграл сходится и его значение равно двум.

Выполните самостоятельно. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции на конечном отрезке (если он сходится) или докажите его расходимость:

$$1)\ \int\limits_0^2\frac{dx}{4-x^2};\ \ 2)\ \int\limits_1^e\frac{dx}{x\ln x}.$$

2. Вспомогательный материал из дифференциального исчисления функций многих переменных

Пусть задана функция $z=f(x,y)$. Выберем точку $M(x;y)$ внутри области определения $f(x,y)$ и рассмотрим малое приращение Δx аргумента $x=x+\Delta x$, оставив другой аргумент фиксированным и равным y. Тогда разность $\Delta_x z=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)$ называется частным приращением функции $f(x,y)$ в точке M.

Определение 7. *Частной производной* функции $z=f(x,y)$ по переменной x, обозначаемой $f'_x\left(x,y\right)$ или $\frac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right)$, в точке $M\left(x;y\right)$ называется предел

$$f_x'(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}, \qquad (2.1)$$

если он существует.

Аналогично вводятся частное приращение $\Delta_y z$ и частная производная функции z по y в точке M_0, обозначаемая $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ или $f_y'(x_0,y_0)$.

$$f_y'(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}. \qquad (2.2)$$

Определение 8. *Полным приращением* $f(x,y)$ в точке M называется разность

$$\Delta z=\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y). \qquad (2.3)$$

Определение 9. Функция $z=f(x,\ y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y), \qquad (2.4)$$

при этом величины A и B зависят только от M и не зависят от $\Delta x,\ \Delta y,$ а $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ при $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ (ее вид определяется видом функции $f(x,y)$ и координатами M_0).

Полным дифференциалом df (или dz) указанной функции $z=f(x,\ y)$ в точке M называется *главная часть ее полного приращения*, линейная относительно Δx и Δy:

$$dz(x,y)=df(x,y)=A\Delta x+B\Delta y, \qquad (2.5)$$

при этом $dy=\Delta y,\ \ dx=\Delta x.$

С точностью до бесконечно малой высшего порядка $\Delta z\approx dz$ при $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0.$

Теорема 8. Если $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке М, то в этой точке существуют* $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, *причем* $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f}{\partial y} = B$.

Если $z = f(x,y)$ — дифференцируемая функция двух независимых переменных x и y, которые в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных

$$x = \varphi(u,v);\ y = \psi(u,v),$$

то частные производные z по u и v преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (2.6)$$

Пример 17. Найдите частные производные и полный дифференциал функции $z = \sqrt{x}y^3$ в точке $M_0(4, 2)$.

Решение. В произвольной точке $M_0(x, y)$ будем иметь $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot 3y^2$; $dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} y^3 dx + 3\sqrt{x} y^2 dy$. В заданной точке $M_0(4, 2)$ получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 2^3 = 2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3\sqrt{4} \cdot 2^2 = 24;\ dz = 2dx + 24dy.$$

Выполните самостоятельно. Найдите частные производные и полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x,y)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$1)\ z = \sin^2(xy);\ M_0\left(1; \frac{\pi}{4}\right);\ 2)\ z = \frac{x^2 - y}{x + y};\ M_0(1; 0).$$

Пример 18. Вычислить приближенно $\sin 28^0 \cos 61^0$.

Решение. Переведем градусы в радианы:

$$28^0 = 30^0 - 2^0 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90};\ 61^0 = 60^0 + 1^0 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}.$$

Рассмотрим функцию $z = \sin x \cos y$, дифференцируемую в любой точке (x, y) и вычислим приближенно значение этой функции в точке:

$$M\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right).$$

Рассмотрим точку $M_0\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$ и примем $dx = -\frac{\pi}{90}$, $dy = \frac{\pi}{180}$.

Поскольку $z(M) = z(M_0) + \Delta z \approx z(M_0) + dz$, то

$$z(M) \approx z(M_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy.$$

Вычислим: $z(M_0) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \cos x \cos y\,|_{M_0} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\sin x \sin y\,|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

В результате будем иметь:

$$z(M) \approx \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\pi}{90}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi}{180} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi}{90}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi}{60} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{60}\right).$$

Если принять $\sqrt{3} \approx 1,73$ и $\pi \approx 3,14$, то $z(M) \approx 0,227$.

Выполните самостоятельно. Используя дифференциал функции, вычислите приближенно заданное выражение:

$$1)\ \cos 44^0 \sin 92^0;\ 2)\ \sqrt{(4,05)^2 + (2,98)^2}.$$

3. Двойной интеграл. Повторный интеграл. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление площадей фигур и объемов тел. Приложения к задачам механики

3.1. Двойной интеграл. Повторный интеграл. Понятие правильной (стандартной) области. Вычисление двойного интеграла

Пусть в замкнутой ограниченной области S плоскости oxy задана функция $z = f(x, y) = f(P)$. Разобьем область S произвольными линиями на n составных частей (площадок) $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ (см. *рис. 3.1*). Здесь и далее буквами $S, \Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ будем обозначать как сами области, так и их площади. Выберем на каждой из указанных площадок ΔS_i по произвольной точке $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i (i = 1, 2, ..., n)$. Наибольший размер площадки ΔS_i будем называть ее диаметром $diam\Delta S_i$.

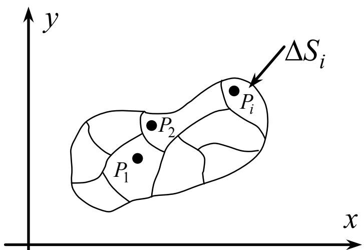

Рис. 3.1

Определение 10. *Интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области S называется величина:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta S_i.$$

Стягивая каждую из площадок ΔS_i в точку $\left(diam\Delta S_i \to 0\right)$ дроблением области S на все большее количество этих площадок, получим последовательность интегральных сумм σ_n.

Определение 11. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{diam\Delta S_i \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения S, ни от выбора точек $P_i \in \Delta S_i$, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f\left(x, y\right)$ по области S и обозначается:

$$\iint\limits_S f\left(x, y\right) dS = \iint\limits_S f\left(x, y\right) dxdy = \iint\limits_S f\left(P\right) dS = \lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta S_i, \qquad (3.1)$$

при этом S называется *областью интегрирования*, dS — *элементом площади.*

Теорема 9 (о существовании двойного интеграла). Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области S, то существует $\iint\limits_S f(x, y)dS$.

Замечание. Если $f(x, y) \geq 0$ в области S, то двойной интеграл (3.1) равен объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси oz, а направляющая является границей ∂S области S (см. *рис. 3.1*). Если же $f(x, y) = 1$, то двойной интеграл (3.1) равен площади $S = \iint\limits_S dS$.

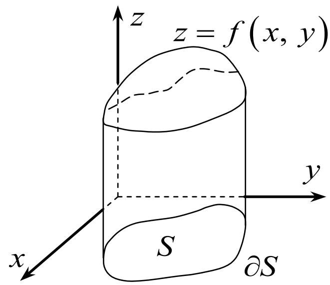

Рис. 3.2

Приведем основные свойства двойного интеграла, понимая под S замкнутую ограниченную область и предполагая, что указанные ниже двойные интегралы существуют.

1. $\iint\limits_S kf(x, y)dS = k\iint\limits_S f(x, y)dS.$

2. $\iint\limits_S [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,dS = \iint\limits_S f_1(x, y)dS \pm \iint\limits_S f_2(x, y)dS$

3. Пусть S разбита на несколько частей $S_1, S_2, \ldots, S_k$, которые не имеют общих внутренних точек, тогда:

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \iint\limits_{S_1} f(x, y)dS + \iint\limits_{S_2} f(x, y)dS + \ldots + \iint\limits_{S_k} f(x, y)dS.$$

4. Если $f(x, y) \leq \phi(x, y)$ при $(x, y) \in S$, то

$$\iint\limits_S f(x, y)dS \leq \iint\limits_S \phi(x, y)dS.$$

5. Если m и M наименьшее и наибольшее значения $f(x, y)$ при $(x, y) \in S$, то

$$m\cdot S\le\iint\limits_S f(x,y)\,dS\le M\cdot S$$

(напомним, что под *S* также понимается и площадь области *S*).

6. Теорема о среднем. Если $f(x,y)$ непрерывна в *S*, то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0)\in S$, что

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS=f(x_0,y_0)\cdot S,$$

при этом величина $f(x_0,y_0)=\dfrac{1}{S}\iint\limits_S f(x,y)\,dS$ называется *средним значением функции* $f(x,y)$ в области *S*.

Вычисление двойного интеграла по формуле (3.1) достаточно сложно, поэтому его сводят к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Определение 12. Область *S* называется *правильной (стандартной) в направлении оу*, если она образована линиями $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)$ и прямыми $x=a,\quad x=b,\quad (a<b)$, причем на отрезке $[a,b]$ обе функции φ_1, φ_2 непрерывны и $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ (см. *рис. 3.3*). В частности, любая из прямолинейных границ $x=a$ или $x=b$ может вырождаться в точку. Заметим, что любая прямая, параллельная оси *оу* и проходящая через какую-либо внутреннюю точку области *S* пересекает границу ∂S только в двух точках M_1, M_2.

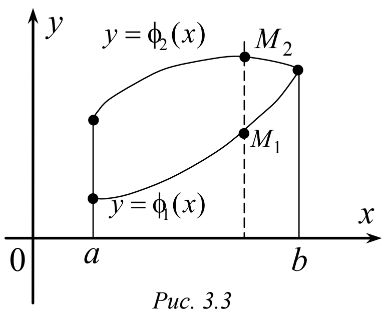

Рис. 3.3

Теорема 10 (о вычислении двойного интеграла). Если $f(x,y)$ непрерывна в области *S*, которая является правильной в направлении *оу*, то:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (3.2)$$

Средний и правый интегралы в формуле (3.2) называются *повторными* или *двукратными* интегралами. Формула (3.2) означает, что для вычисления указанного двойного интеграла нужно сначала найти внутренний определенный интеграл $\Phi(x)=\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy,$ считая x фиксированным (а значит нижний и верхний пределы интегрирования $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ также будут фиксированными). Полученную функцию $\Phi(x)$ надо затем проинтегрировать по x от a до b, т.е. вычислить $\int\limits_a^b \Phi(x)dx.$

Определение 13. Область S называется *правильной (стандартной) в направлении ox*, если она образована линиями $x=\psi_1(y), x=\psi_2(y)$ и прямыми $y=c,\ y=d\ (c<d),$ причем на $\left[c,d\right]$ обе функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y)\le\psi_2(y).$ Если область правильная как в направлении ox, так и в направлении oy то она называется *правильной (стандартной).*

Для $f\left(x,y\right)$ непрерывной в области S, правильной в направлении ox, справедлива формула, аналогичная (3.2):

$$\iint\limits_S f\left(x,y\right)dS=\int\limits_c^d\left\{\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f\left(x,y\right)dx\right\}dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f\left(x,y\right)dx \qquad (3.3)$$

Замечания.

1. Если область S правильная, то для вычисления двойного интеграла можно пользоваться любой из формул (3.2), (3.3).

2. Если область S не является правильной ни в каком из направлений ox или oy, то ее следует разбить на правильные в каких-либо направлениях области и затем использовать свойство двойного интеграла и формулы (3.2), (3.3).

Пример 19. Вычислить $J=\iint\limits_S\dfrac{dS}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$

где S — четверть круга радиуса a с центром в точке $O(0,0),$ для которой $x\ge 0,\ y\ge 0.$

Область S правильная в обоих направлениях (см. *рис. 3.4*). В направлении *оу* будем иметь $\varphi_1(x)=0, \varphi_2(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, т.к. уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$.

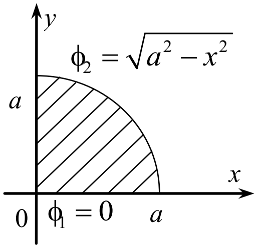

Рис. 3.4

Применяя формулу (3.2), получим:

$$J=\int\limits_o^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$\int\limits_0^a dx\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\int\limits_0^a dx(\arcsin 1-\arcsin 0)=\int\limits_0^a\frac{\pi}{2}dx=\frac{\pi a}{2}.$$

Пример 20. Вычислить $J=\iint\limits_S\left(x^2\sin^2 y\right)dS,$ где S образована осью *оу* и кривой $x=3\cos y$.

<u>Решение.</u> Область S правильная. В направлении *ох* будем иметь: $\psi_1(y)=0;\ \ \psi_2(y)=3\cos y;\ \ c=-\frac{\pi}{2};\ \ d=\frac{\pi}{2}.$

Согласно формуле (3.3) получим

$$J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\int\limits_0^{3\cos y}\left(x^2\sin^2 y\right)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\sin^2 y\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{3\cos y}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\left[\frac{1}{3}\sin^2 y\left(3\cos y\right)^3\right]=$$

$$=9\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 y\left(1-\sin^2 y\right)d(\sin y)=9\left[\frac{\sin^3 y}{3}-\frac{\sin^5 y}{5}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}.$$

3.2. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Как мы уже знаем, при вычислении определенного интеграла для упрощения расчетов часто используется замена переменной. Аналогичным образом, вычисление двойного интеграла иногда можно упростить заменой переменных x, y новыми переменными u, v. Здесь рассмотрим лишь случай замены декартовых координат x, y полярными r, φ, который очень важен для приложений. Выбрав в качестве полюса начало декартовой системы координат, а в качестве полярной оси $-ox$, получим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

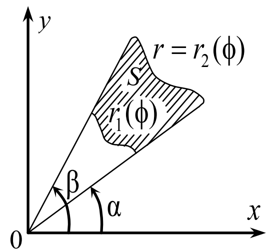

Рис. 3.5

Определение 14. Область S называется *правильной (стандартной) в полярных координатах*, если она образована лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ и линиями $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, причем на отрезке $\alpha \le \varphi \le \beta$ обе функции $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$ непрерывны и $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$ (см. *рис. 3.5*).

Можно показать, что если $f(x, y)$ непрерывна в области S, которая является правильной *(стандартной)* в полярных координатах, то:

$$\iint_S f(x, y)dS = \int_\alpha^\beta d\phi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{3.4}$$

Заметим, что если полюс лежит внутри S, то $0 \le \varphi \le 2\pi$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. Если область S не является правильной в полярных координатах, то ее следует разбить на правильные части.

С помощью двойного интеграла можно решать ряд прикладных задач. Среди них нахождение:

1. Площади области S;
2. Объема цилиндрического тела;
3. Массы M пластинки, занимающей область S;
4. Статических моментов M_x и M_y пластинки относительно координатных осей ox и oy соответственно;
5. Координат центра тяжести пластины x_c и y_c;
6. Моментов инерции пластинки относительно координатных осей J_x и J_y;
7. Моментов инерции относительно начала координат J_o.

Пример 21. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $r\cos\varphi = 1$ (т.е. $x = 1$) и окружностью $r = 2$ и не содержащей начала координат (см. *рис. 3.6*).

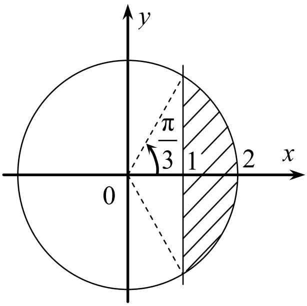

Рис. 3.6

Как было указано выше, площадь $S = \iint\limits_S dS$. Здесь область S образована линиями $r_1 = \dfrac{1}{\cos\varphi}, r_2 = 2$ и лучами $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$ (т.к. $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{2}$). Таким образом область S правильная в полярных координатах и ее площадь равна:

$$S = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} r dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 - \frac{1}{2\cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \left(2\varphi - \frac{1}{2} tg\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\ (\text{кв. ед.}).$$

Заметим, что эту же площадь можно найти и с помощью определенного интеграла.

Пример 22. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью *xoy*, цилиндром $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a = const)$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ при $z \geq 0$.

Линией пересечения цилиндра с плоскостью *xoy* является окружность радиуса *a* с центром на оси *ox* в точке $a(a > 0)$, т.е. рассматриваемое тело ограничено кругом $S = \left\{ (x,y) \mid (x-a)^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$, конической поверхностью $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными *OZ* (см. *рис. 3.7*).

Как было отмечено ранее,

$$V = \iint\limits_S f(x,y) dS = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

Этот интеграл удобнее вычислить в полярной системе координат по формуле (3.4), при этом $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Уравнение окружности ∂S (границы круга S) получим в виде:

$$(r\cos\varphi - a)^2 + r^2\sin^2\varphi = a^2,$$

$$\text{т.е. } r(r - 2a\cos\varphi) = 0,$$

откуда $r = 2a\cos\varphi$, при этом $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (верхняя полуокружность) и $\dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$ (нижняя полуокружность см. *рис. 3.8*).

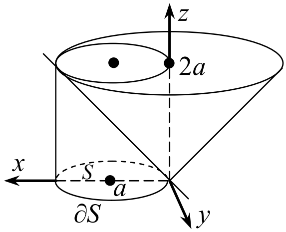

Рис. 3.7

В силу симметрии тела относительно плоскости xoz, ограничимся рассмотрением его половины, соответствующей $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. В данном случае кривая $r_1(\varphi)$ формулы (3.4) вырождается в точку $r = 0$; $r_2(\varphi) = 2a\cos\varphi$; $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$. Таким образом,

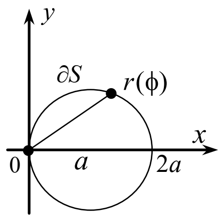

Рис. 3.8

$$V = 2\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2a\cos\varphi} r \cdot r dr = 2\int_0^{\pi/2} d\phi \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2a\cos\varphi} = 2\int_0^{\pi/2} 8\frac{a^3}{3}\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{16a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \sin^2\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) = \frac{16a^3}{3}\left.\left(\sin\kappa - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{16a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{32a^3}{9}(\textit{куб. ед.}).$$

Пусть в плоскости xoy область S занята плоской фигурой (пластинкой), поверхностная плотность которой задана как функция координат $\rho\left(x, y\right)$. Тогда масса всей пластинки равна

$$M = \iint_S \rho(x, y) dS. \tag{3.5}$$

Координаты центра тяжести $C\left(x_c, y_c\right)$ пластинки вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{M},\ y_c = \frac{M_x}{M}, \tag{3.6}$$

где $M_x = \iint\limits_S y\rho(x,y)dS, M_y = \iint\limits_S x\rho(x,y)dS,$ — статические моменты пластинки относительно осей *ox*, *oy*.

Если пластинка однородна, то $\rho(x,y) = \rho_0 = const.$

Моменты инерции J_x, J_y пластинки относительно осей *ox* и *oy*, а также момент инерции J_0 относительно начала координат определяются соотношениями:

$$J_x = \iint\limits_S y^2\rho(x,y)dS,\ J_y = \iint\limits_S x^2\rho(x,y)dS,\ J_0 = J_x + J_y. \tag{3.7}$$

Пример 23. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки $\left(\rho\left(x,y\right) = \rho_0 = const\right)$, имеющей форму кругового сектора радиуса a с углом при вершине 2α (см. *рис. 3.9*).

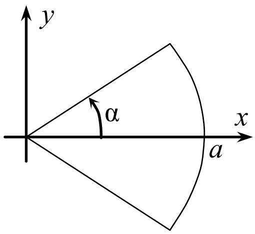

Рис. 3.9

Проведем расчеты по формулам (3.5), (3.6) в полярных координатах r,φ пользуясь соотношением (3.4). В силу симметрии относительно оси *ox* получим

$$M = \rho_0 \iint\limits_S dS = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha d\varphi \int\limits_0^a r dr = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha \frac{a^2}{2} d\varphi = \rho_0 a^2 \alpha.$$

В силу той же симметрии ясно, что $y_c = 0$, а M_y можно найти таким образом $(x = r\cos\varphi)$:

$$M_y = \rho_0 \iint\limits_S x dS = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha d\varphi \int\limits_0^a r^2 \cos\varphi dr = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha d\varphi \cos\varphi \frac{a^3}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\rho_0 a^3 \sin\varphi \Big|_0^\alpha = \frac{2}{3}\rho_0 a^3 \sin\alpha,$$

в результате чего:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{2\rho_0 a^3 \sin\alpha}{3\rho_0 a^2 \alpha} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

4. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл и его вычисление

4.1. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл и его вычисление

Пусть в замкнутой ограниченной области V пространства *oxyz* задана функция $u = f(x, y, z) = f(P), P \in V$. Аналогично тому, как это делалось для случая двух переменных, разобьем V на n малых частей $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ (буквами $V, \Delta V_1, ..., \Delta V_n$ будем обозначать как сами области, так и их объемы). В каждой области ΔV_i выберем по произвольной точке $P_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i (i = 1, 2, ..., n)$ и составим сумму, называемую интегральной:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i.$$

Дробя V на все большее количество частей, будем стягивать каждую из них в точку (при этом максимальное расстояние между точками границы области ΔV_i , т.е. диаметр $diam\, \Delta V_i$ стремится к нулю). В результате получим последовательность интегральных сумм $\sigma_n, n \to \infty$.

Определение 15. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{diam \Delta V_i \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения V, ни от выбора точек $P_i \in \Delta V_i$, то этот предел называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V f(P)dV = \lim_{diam \Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i, \tag{4.1}$$

при этом V называется *областью интегрирования*, dV — *элементом объема.*

Теорема 11 (о существовании тройного интеграла). Если функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области V, то тройной интеграл (4.2) существует.

Замечания.

1. Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам 1^0–6^0 двойного интеграла.
2. Если объемная плотность ρ тела, занимающего область V, задана как функция координат $\rho = f(x, y, z)$, то тройной интеграл (4.2) равен *массе* M этого тела.
3. Если в формуле (4.2) принять $f(x, y, z) \equiv 1$, то тройной интеграл равен объему тела $V = \iiint\limits_V dV$.

Вычисление тройного интеграла сводят к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть замкнутая ограниченная область интегрирования V обладает следующими свойствами:

1) она вся проецируется на плоскость oxy в двумерную область S, правильную в направлении oy, т.е. ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ $\big(\varphi_2(x) \ge \varphi_1(x)$ при $x \in [a, b]\big)$;

2) снизу область V ограничена поверхностью, определяемою функцией $z = h_1(x, y)$, а сверху — поверхностью, определяемою функцией $z = h_2(x, y)$, причем обе функции непрерывны в S и $h_2(x, y) \ge h_1(x, y)$ (см. *рис. 4.1*).

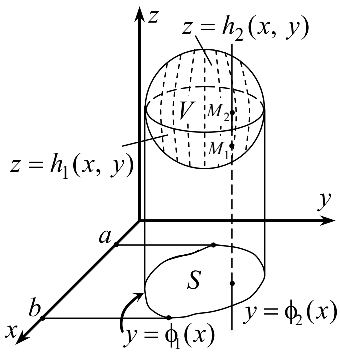

Рис. 4.1

Заметим, что любая прямая, параллельная оси z и проходящую через какую-либо внутреннюю точку области V, пересечет ее границу (т.е. ограничивающую ее поверхность) только в двух точках M_1 и M_2.

Теорема 12 (о вычислении тройного интеграла). Если $u = f(x, y, z)$ *непрерывна в области V рассмотренного вида, то:*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iint\limits_S \left\{ \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right\} dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\kappa_2(x)} dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \quad (4.2)$$

Самый правый интеграл в формуле (4.2) называется *трехкратным интегралом* по области V**.**

Если проекция V на oxy является правильной в направлении ox, то левое равенство в формуле (4.3) остается в силе и мы получим трехкратный интеграл, соответствующий соотношению (4.2).

Пример 24. Вычислить $J = \iiint\limits_V x^2 dV$, где V — шар $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Поскольку проекция шара на oxy — круг $x^2 + y^2 = R^2$, то получим:

$$J = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 dz.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая x, y постоянными:

$$J_1(x,y) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 dz = x^2 z\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 2x^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Затем, считая x постоянным, вычислим:

$$J_2(x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2x^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= 2x^2 \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy = 2x^2 \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy,$$

где $a = \sqrt{R^2-x^2}$. Поскольку:

$$\int \sqrt{a^2-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left[a^2 \arcsin\frac{y}{a} + y\sqrt{a^2-y^2}\right] + C,$$

то

$$J_2(x) = 2x^2 \cdot \frac{1}{2}\left[a^2 \arcsin\frac{a}{a} + a\sqrt{a^2-a^2} - a^2 \arcsin\left(-\frac{a}{a}\right) + a\sqrt{a^2-a^2}\right] =$$

$$= 2a^2x^2 \arcsin 1 = \pi\, a^2x^2 = \pi\, x^2\left(R^2-x^2\right).$$

Теперь найдем J:

$$J=\int\limits_{-R}^{R}\pi x^2\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left[R^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_{-R}^{R}=2\pi\left[\frac{R^5}{3}-\frac{R^5}{5}\right]=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

4.2. Геометрические и механические приложения тройного интеграла

Пример 25. Найдите с помощью тройного интеграла объем шара $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Поскольку $V=\iiint\limits_V dV,$ то, проделав все выкладки предыдущего примера, с той лишь разницей, что здесь $f(x,y,z)\equiv 1,$ а не x^2, получим известную формулу $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3.$

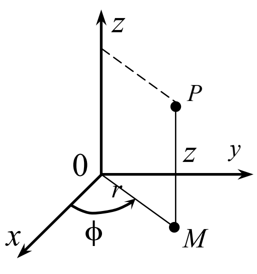

Рис. 4.2

Введем понятие цилиндрической системы координат. Для этого рассмотрим в декартовой системе координат точку $P(x,y,z)$ и ее проекцию M на плоскость oxy (см. *рис. 4.2*). Положение P вполне определяется полярными координатами r,φ точки M в плоскости oxy и аппликатой Z. Указанные величины r,φ,z называются *цилиндрическими координатами* точки M, причем ее декартовы координаты x,y,z связаны с цилиндрическими r,φ,z соотношениями:

$$x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi;\ z=z \tag{4.3}$$

Если проекцией тела V на плоскость oxy является область S, правильная в полярных координатах, то можно получить выражение для тройного интеграла в цилиндрической системе координат:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\phi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}rdr\int\limits_{h_1(\cos\varphi,\,r\sin\varphi)}^{h_2(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)dz. \tag{4.4}$$

Пример 26. Найти массу M прямого кругового цилиндра высотой h и радиуса R, если его плотность $\rho(P)$ равна квадрату расстояния r от точки P до его оси.

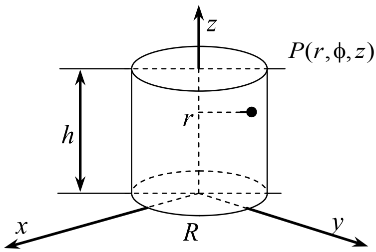

Рис. 4.3

Рассмотрим цилиндрическую систему координат, выбрав начало оси Z в центре основания цилиндра, а саму ось направив вдоль оси цилиндра (см. *рис. 4.3*). Тогда $\rho(P) = r^2$ и для массы M, согласно (4.4) получим:

$$M = \iiint\limits_V r^2 dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r dr \int\limits_0^h r^2 dz = h \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi\, hR^4}{2}.$$

Если тело с плотностью $\rho(x, y, z)$ занимает область V, то для координат его центра тяжести $C\left(x_c, y_c, z_c\right)$, а также моментов инерции J_x, J_y, J_z относительно декартовых осей ox, oy, oz справедливы формулы:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M},\ y_c = \frac{M_{zx}}{M},\ z_c = \frac{M_{xy}}{M}, \tag{4.5}$$

где $M_{xy} = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) z\, dV$; $M_{yz} = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) x\, dV$;

$M_{zx} = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) y\, dV$ — статические моменты относительно координатных плоскостей;

$$J_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dV,$$
$$J_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dV,$$
$$J_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y, z) dV. \tag{4.6}$$

5. Криволинейный интеграл, физический смысл, его вычисление. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь криволинейного и двойного интегралов. Формула Грина

5.1. Криволинейный интеграл и его вычисление

Определение 16. Если каждой точке $M(x, y)$ области S плоскости oxy поставлен в соответствие вектор $\vec{F}(M)$, то говорят, что в области S задано *векторное поле* $\vec{F}(M)$ или $\vec{F}(x, y)$.

Проекциями вектора (вектор-функции) $\vec{F}(x, y)$ на оси координат являются функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, т.е.:

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \{P(x, y), Q(x, y)\}.$$

Пусть в области S плоскости oxy задана непрерывная кривая L с началом в точке A и концом в точке B. Пусть в области S также задано векторное поле $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$.

Разобьем кривую L на n не обязательно равных частей точками:

$$A_0(x_0, y_0) = A,\ \ A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), ..., A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}),\ A_n(x_n, y_n) = B.$$

На каждом участке $A_{i-1}A_i$ выберем по произвольной точке $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, 2, ..., n$ (см. *рис. 5.1*) и составим сумму скалярных произведений, называемую *интегральной:*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i \right],$$

при этом $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ i = 1, 2, ..., n.$ Дробя кривую L на все большее количество участков и стягивая длину Δl_i каждого из них к нулю, получим последовательность интегральных сумм $\sigma_n (n \to \infty)$.

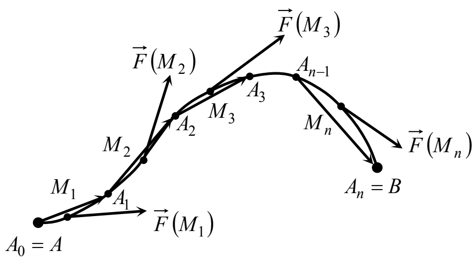

Рис. 5.1

Определение 17. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения *L*, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется *криволинейным интегралом* от вектор-функции $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ вдоль кривой *L* (дуги *AB*) в направлении от *A* к *B* и обозначается:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L \vec{F}(x,y)d\vec{r} =$$

$$= \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i \right], \tag{5.1}$$

где $d\vec{r} = \{dx, dy\}$. Согласно данному определению, криволинейный интеграл (4.9) равен работе силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль кривой *L* от точки *A* к точке *B*. Отметим некоторые свойства криволинейного интеграла.

1. При изменении направления интегрирования вдоль кривой *L* знак интеграла (5.1) меняется на противоположный

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy.$$

2. *Свойство аддитивности* (предполагается, что все интегралы существуют):

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$$

Определение 18. Если кривая L замкнута (т.е. ее начальная и конечная точки совпадают), то интеграл (4.9) называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L и обозначается:

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_L \vec{F} d\vec{r}, \tag{5.2}$$

при этом обязательно следует указать направление обхода контура L.

Рассмотрим кривую L (дугу AB), заданную параметрически с помощью функций $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, которые имеют на $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, причем значение $t = \alpha$ соответствует точке A, а $t = \beta$ — точке B. Такую кривую будем называть гладкой.

Теорема 13 (о существовании криволинейного интеграла). Для любой вектор-функции $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, непрерывной вдоль гладкой кривой AB (т.е. при $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывных вдоль AB) существует криволинейный интеграл (5.1). При этом:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta \left\{ P\left[\varphi(t), \psi(t)\right]\varphi'(t) + Q\left[\varphi(t), \psi(t)\right]\psi'(t) \right\} dt. \tag{5.3}$$

Пример 27. Вычислить $J = \int_L y^2 dx + x^2 dy,$

где L — верхняя половина эллипса, заданного параметрически: $x = a\cos t,$ $y = b\sin t$ (t — полярный угол), пробегаемая по ходу часовой стрелки.

Согласно (5.3) и свойству интеграла будем иметь:

$$J = -\int_0^\pi \left[y^2(t)x'(t) + x^2(t)y'(t) \right] dt = -\int_0^\pi \left[b^2 \sin^2 t(-a\sin t) + a^2 \cos^2 t(b\cos t) \right] dt =$$

$$= -\int_0^\pi \left[ab^2(1 - \cos^2 t) d\cos t + a^2 b(1 - \sin^2 t) d\sin t \right] =$$

$$= -ab^2\left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi} - a^2 b\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$-ab^2\left(-2+\frac{2}{3}\right) - a^2 b(0-0) = \frac{4}{3}ab^2.$$

5.2. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь криволинейного и двойного интегралов. Формула Грина

Пусть границей ∂S области S является гладкий замкнутый контур L. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ непрерывны в $\overline{S} = S \cup \partial S$, то справедлива *формула Грина:*

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{5.4}$$

при этом контур L обходится в положительном направлении, т.е. так, чтобы область S оставалась все время слева (см. *рис. 5.2*).

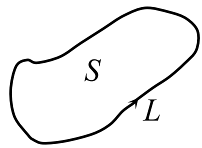

Рис. 5.2

Пример 28. Вычислить: $J = \oint\limits_L xy^2 dy - x^2 y dx$,

где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (xy^2)}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(-x^2 y)}{\partial y} = -x^2$, то согласно (5.4) получим:

$$J = \iint\limits_S \left(y^2 + x^2\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^2 r dr = \frac{R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Если в (5.3) принять $P(x) \equiv 0, Q(x) = x,$ или же $P(x) = -y,$ $Q(x) \equiv 0,$ то получим формулы вычисления площади S фигуры, ограниченной замкнутым контуром L:

$$S=\oint_L xdy=-\oint_L ydx=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx, \tag{5.5}$$

при этом обход контура L совершается в положительном направлении.

Пример 29. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Применяя формулы (5.5) и (5.3) будем иметь:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos t(b\cos t)-b\sin t(-a\sin t)\right]dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi\, ab.$$

Определение 19. Если для любых двух точек A и B из области S интеграл $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по любому контуру, целиком лежащему в S и соединяющему A и B, принимает одно и то же значение, зависящее только от положения точек A и B, то говорят, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования в области S.

Теорема 14. Для того, чтобы интеграл:

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

в области S не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

где Γ — любой замкнутый контур, лежащий в S.

Определение 20. Область S *называется односвязной,* если для любого замкнутого контура, лежащего в S, ограниченная им часть плоскости целиком содержится в S.

Теорема 15. Пусть $P(x,y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, непрерывны в односвязной области S.

Тогда для того, чтобы $\int\limits_L Pdx+Qdy$ в S не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы в S выполнялось соотношение:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \tag{5.6}$$

Будем называть выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *дифференциальным*.

Теорема 16. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в односвязной области *S*. Тогда для того чтобы дифференциальное выражение $Pdx+Qdy$ в области *S* было полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е. $dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, необходимо и статочно, чтобы в *S* выполнялось соотношение (5.6).

Пусть в *S задано векторное поле* $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$.

Определение 21. Если функция $U(x,y)$ такова, что $dU=Pdx+Qdy$ в *S*, то она называется *первообразной* данного дифференциального выражения; $U(x,y)$ также называется *потенциалом* векторного поля $\vec{F}$, а само поле $\vec{F}$ — *потенциальным.*

Важно подчеркнуть следующее:

(1) Для первообразной *U(x, y)* выполняются соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y). \tag{5.6}$$

(2) Можно показать, что первообразная $U(x,y)$ находится по ее дифференциалу с помощью формулы

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,\eta)\,d\xi+Q(\xi,\eta)\,d\eta, \tag{5.8}$$

при этом начальная точка $M_0(x_0,y_0)$ фиксирована, конечная — $M(x,y)$ является переменной точкой области *S,* а сам интеграл не зависит от пути интегрирования от M_0 к *M.* Переменные интегрирования здесь обозначены через $\xi,\eta,$ чтобы не спутать их с координатами точки $M(x,y)$.

(3) Если $dU=Pdx+Qdy$, то для любых двух точек $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ справедлива формула

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0). \quad (5.9)$$

Поскольку при заданных начальной $M_0(x_0, y_0)$ и конечной $M(x, y)$ точках для вычисления интеграла (5.8) можно взять любой контур, то выберем в качестве него ломаную M_0M_1M; где $M_1(x, y_0)$. Тогда вдоль M_0M_1 выполняется $\eta = y_0$, $d\eta = 0$, $x_0 \le \xi \le x$, а вдоль M_1M $\xi = x$, $d\xi = 0$, $y_0 \le \eta \le y$, откуда, согласно (5.8) будем иметь:

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta. \quad (5.10)$$

Пример 30.

а) Найдите первообразную $U(x,y)$ дифференциального выражения $xdx + ydy$.

б) Вычислите интеграл $J = \int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} xdx + ydy$.

Данное выражение есть полный дифференциал, поскольку $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = y$ и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Зафиксируем некоторую точку $M_0(x_0; y_0)$. Тогда, согласно (5.10),

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \xi d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} \eta d\eta = \frac{\xi^2}{2}\bigg|_{x_0}^{x} + \frac{\eta^2}{2}\bigg|_{y_0}^{y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_0^2 + y_0^2\right).$$

Если теперь константу $-\frac{1}{2}\left(x_0^2 + y_0^2\right)$ обозначить через c, то мы получим множество всех первообразных: $U(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + c.$

Для того, чтобы посчитать J, воспользуемся формулой (5.9):

$$J = U(3;4) - U(0;1) = \frac{1}{2}(9+16) + c - \frac{1}{2}(0+1) - c = 12.$$

6. Формула Гаусса-Остроградского. Поверхностный интеграл, его вычисление. Формула Стокса

Напомним некоторые понятия, введенные в курсе дифференциального исчисления функций многих переменных. Пусть в объеме $V \subset R^3$ введены непрерывные скалярное и векторное поля $U = U(x, y, z)$ и $\vec{a}(x, y, z) = = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ соответственно.

Определение 22. Вектор

$$gradU(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \tag{6.1}$$

называется *градиентом* поля $U(M)$ в точке $M \in V$.

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня в точке M в сторону возрастания функции $U(M)$ и по длине равен:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Величина

$$\frac{\partial U}{\partial l} = gradU \cdot \vec{l}^{\,0} = \frac{1}{\left|\vec{l}\right|}\left(\frac{\partial U}{\partial x}l_x + \frac{\partial U}{\partial y}l_y + \frac{\partial U}{\partial z}l_z\right)$$

называется производной функции $U(M)$ по направлению

$$\vec{l}^{\,0} = \frac{1}{\left|\vec{l}\right|}\left(l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}\right).$$

Определение 23. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}(M)$ называется *скаляр*

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \tag{6.2}$$

Вихрем векторного поля $\vec{a}(M)$ называется *вектор*

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{a}. \qquad (6.3)$$

Формально последний вектор можно записать в удобном виде:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим поверхность $S(M) \in V$ с единичным вектором внешней нормали

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

Определение 24. *Потоком векторного поля* $\vec{a}(M)$ через поверхность S в сторону, определенную единичным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности S называется интеграл:

$$\iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \vec{n} dS \equiv \iint\limits_{(S)} a_n dS \equiv \iint\limits_{(S)} \left(a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma\right) dS =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[a_x(M_i)\cos\alpha + a_y(M_i)\cos\beta + a_z(M_i)\cos\gamma \right] \Delta S_i. \qquad (6.4)$$

Теорема 17 (связь поверхностного и тройного интегралов). Если S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, то справедлива следующая *формула Гаусса-Остроградского*

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} a_n dS = \iiint\limits_{(V)} div\vec{a} dV. \qquad (6.5)$$

Определение 25. Криволинейный интеграл векторного поля $\vec{a}$ по кривой L:

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}d\vec{r} = \int\limits_{(A)}^{(B)} a_x dx + a_y dy + a_z dz \qquad (6.6)$$

представляет собой *работу поля* $\vec{a}$ вдоль кривой L (A и B — начальная и конечная точки на кривой L). Если кривая L — замкнутая, то криволинейный интеграл (6.6) называется *циркуляцией векторного поля* $\vec{a}$ вдоль контура L.

Теорема 18 (связь криволинейного и поверхностного интегралов). Если замкнутая кривая L ограничивает двустороннюю поверхность S, то имеет формула Стокса:

$$\oint\limits_{(L)} \vec{a}d\vec{r} = \oiint\limits_{(S)} \left(rot\vec{a}\right)_n dS, \qquad (6.7)$$

где $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности S, направление которого выбирается таким образом, чтобы для наблюдателя, смотрящего на направление $\vec{n}$, обход контура L совершается против хода часовой стрелки.

Определение 26. Вектороное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным*, если существует функция $U = U\left(M\right)$, такая что $\vec{a} = gradU$.

Для потенциальности поля $\vec{a}$, определенного в односвязанной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е. чтобы $rot\vec{a} = 0$. В этом случае существует потенциал U, который определяется из уравнения $dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Если потенциал U — однозначная функция, то

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \vec{a}d\vec{r} = U(B) - U(A),$$

т.е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от точек начала и конца пути. В частности, для замкнутого контура L циркуляция вектора $\vec{a}$ равна нулю $\oint\limits_{(L)} \vec{a}d\vec{r} = 0$.

7. Рекомендуемые задачи. Разбор варианта расчетно-графической работы

Раздел содержит некоторые типичные задачи, относящиеся к материалу, изложенному в предыдущих разделах. Сначала представлены общие формулировки этих задач и даны образцы их решений в конкретных примерах. Если задача уже разбиралась ранее, то указывается соответствующая ссылка. Далее следуют варианты заданий для самостоятельного решения, относящиеся ко всем разобранным задачам.

Разбор примера задания 1.

Пример 31. Вычислить двукратный интеграл $J=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xydy$ и представить графически область интегрирования.

Решение. Область интегрирования S представлена на *рис. 7.1*.

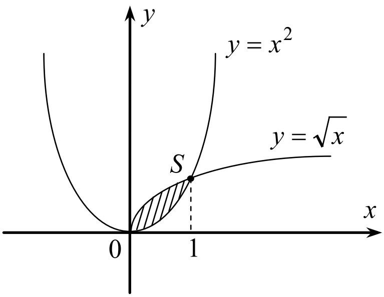

Рис. 7.1

$$J=\int\limits_0^1 dx\,x\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x-x^4\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^2-x^5\right)dx=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}.$$

Разбор примера задания 2.

Пример 32. Найдите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$

где

$$D=\left\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\right\},\quad f(x,y)=5.$$

Решение.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D 5dxdy=5\int\limits_0^2 dx\int\limits_{y=0}^{y=x} dy=5\int\limits_0^2 xdx=10,\,,$$

что в действительности совпадает с объемом прямой призмы с основанием в форме треугольника площади 2 (кв. ед.) и высотой 5 (ед. дл.).

Разбор примера задания 3.

Пример 33. Переходя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл:

$$J = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Решение.

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{-d\left(a^2 - r^2\right)}{2\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\sqrt{a^2 - r^2}\right)\Big|_0^a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ad\varphi = \frac{a\pi}{2}.$$

где S — четверть круга радиуса a с центром в точке $O(0,0)$, для которой $x \geq 0,\ y \geq 0.$

Разбор примера задания 4.

Пример 34. Вычислите координаты центра тяжести однородной пластины, занимающей четверть эллипса:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, (x \geq 0, y \geq 0).$$

Приводим решение. Координаты центра тяжести для однородной пластины, занимающей область S, имеют вид:

$$x_c = \frac{M_y}{M}; y_c = \frac{M_x}{M}, \text{ где } M = \iint_S dxdy,\ M_y = \iint_S xdxdy,\ \ M_x = \iint_S ydxdy.$$

Вычислим двойные интегралы, переходя к обобщенным полярным координатам $(r;\varphi)$: $\dfrac{x}{a} = r\cos\varphi; \dfrac{y}{b} = r\sin\varphi,$ $a = 1; b = 2; 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b,$ причем якобиан преобразования $J(r;\varphi) = rab$:

$$M = \iint_S dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (rab)dr = \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi}{2};$$

$$M_y=\iint\limits_S xdxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1(ar\cos\varphi)(rab)dr=a^2b\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\frac{a^2b}{3}=\frac{2}{3};$$

$$M_x=\iint\limits_S ydxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1(br\sin\varphi)(rab)dr=ab^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\frac{ab^2}{3}=\frac{4}{3}.$$

В результате, $x_c=\dfrac{4}{3\pi};y_c=\dfrac{8}{3\pi}$.

Разбор примера задания 5.

Пример 35. Вычислите момент инерции относительно оси x для однородной пластины (плотность пластины положить равной 1) в форме треугольника, образованного прямыми $x+y=2, x=2, y=2$.

Решение.

$$J_{xx}=\iint\limits_S y^2\rho_0 dxdy=\left|\rho_0=1\right|=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{y=2-x}^{y=2}y^2dy=\int\limits_0^2 dx\left.\frac{y^3}{3}\right|_{2-x}^2=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^2\left[2^3-(2-x)^3\right]dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^2\left(x^3-6x^2+12x\right)dx=\frac{1}{3}\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{12x^2}{2}\right)\right|_0^2=4.$$

Пример 36. Вычислить моменты инерции J_x, J_y, J_0 однородной пластины в форме четверти круга $x^2+y^2\le 1;\quad x\ge 0; y\ge 0$ относительно осей ox, oy и начала координат.

Решение.

$J_x=\rho_0\iint\limits_S y^2dS,\quad J_y=\rho_0\iint\limits_S x^2dS$ (ρ — постоянная плотность пластины).

Удобно перейти к полярным координатам $y=r\sin\varphi,\quad x=r\cos\varphi$, тогда:

$$J_x=\rho_0\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^2\sin^2\varphi\, rdr=\rho_0\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\rho_0\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1\right)=$$

$$=\frac{\rho_0}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\rho_0}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{\rho_0}{8}\left.\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{16}\rho_0.$$

Аналогично $J_y = \dfrac{\pi}{16}\rho_0$, причем очевидно $J_x = J_y$ в силу симметрии пластины относительно прямой $y = x$. В результате получим $J_0 = J_x + J_y = \dfrac{\pi}{8}\rho_0$.

Разбор примера задания 6.

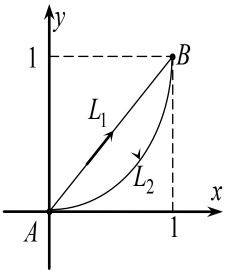

Рис. 7.2

Пример 37. Вычислить $J = \int\limits_{(A)}^{(B)} (x+y)dx + 2xydy$, где $A(0;\,0)$; $B(1;\,1)$ — вдоль различных путей L_1 и L_2:

L_1 — отрезок прямой AB;

L_2 — участок AB параболы $y = x^2$.

<u>Решение.</u>

1) На пути L_1 $y = x$, $dy = dx$, поэтому:

$$J = \int\limits_0^1 \left[(x+x)dx + 2x^2dx\right] = \int\limits_0^1 \left(2x + 2x^2\right)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

2) На пути L_2 $y = x^2$, $dy = 2xdx$, поэтому:

$$J = \int\limits_0^1 \left[\left(x + x^2\right)dx + 2xx^2 2xdx\right] =$$

$$\int\limits_0^1 \left(x + x^2 + 4x^4\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = \frac{49}{30}.$$

Разбор примера задания 7.

Пример 38. Вычислить $J = \int\limits_{A(1;1)}^{B(2;3)} y^2dx + 2xydy.$

Решение. Подынтегральное выражение действительно представляет собой полный дифференциал, поскольку $P(x,y)=y^2$; $Q(x,y)=2xy$ и $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$, а это значит, что J не зависит от пути L интегрирования, соединяющего точки A и B.

Выбрав в качестве L ломаную AMB, где $M(2;1)$ получим:

$$J=\int_1^2 1^2\,dx+\int_1^3 2\cdot 2y\,dy = x\Big|_1^2+\frac{4y^2}{2}\Bigg|_1^3=2-1+2(9-1)=17.$$

8. Варианты расчетно-графических работ для самостоятельного решения

Задание 1. Вычислите двукратный интеграл и представьте графически область интегрирования.

1.1. $\int_0^{\pi/2} dx \int_{\cos x}^{1} y^2 dy$ **1.2.** $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$ **1.3.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} x\sin y\, dx$

1.4. $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} x^2 y\, dy$ **1.5.** $\int_0^{\pi} dx \int_{\sin x}^{1} y\cos xy\, dy$ **1.6.** $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} x^3(1+y)\, dx$

1.7. $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{x^4}{y} dy$ **1.8.** $\int_1^2 dx \int_0^{1/x} e^{xy} dy$ **1.9.** $\int_0^{\pi} dy \int_0^{2\sin y} e^{\cos y} dx$

1.10. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} x^2 e^y dy$ **1.11.** $\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{x+1}}^{1} xy^3 dy$ **1.12.** $\int_0^1 dy \int_{y^3}^{\sqrt[3]{y}} \left(x^2+1\right) y\, dx$

1.13. $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2-1}^{x+1} xy\, dy$ **1.14.** $\int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} y\, dy$ **1.15.** $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{0} e^y dx$

1.16. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} dx \int_{ctgx}^{tgx} dy$

Задание 2. Найдите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Сравните результат с объемом соответствующего тела.

2.1. $D=\{0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$; $f(x,y)=3.$

2.2. $D=\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le x\}$; $f(x,y)=3.$

2.3. $D=\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le x\}$; $f(x,y)=3y.$

2.4. $D=\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le x\}$; $f(x,y)=3x.$

2.5. $D=\{0\le x\le 2;\ -x\le y\le x\}$; $f(x,y)=3y.$

2.6. $D=\{0\le x\le 2;\ -x\le y\le x\}$; $f(x,y)=3x.$

2.7. $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6x.$

2.8. $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6y.$

2.9. $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=2x.$

2.10. $D=\{0\le x\le 1;\ x-1\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6x.$

2.11. $D=\{0\le x\le 1;\ x-1\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6y.$

2.12. $D=\{0\le x\le 1;\ x-1\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6.$

2.13. $D=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$; $f(x,y)=x.$

2.14. $D=\{(x;y)\,|\,1\le x\le 2; 0\le y\le 3\}$; $f(x,y)=10.$

2.15. $D=\{(x;y)\,|\,2\le x\le 4; 0\le y\le 3\}$; $f(x,y)=5.$

2.16. $D=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$; $f(x,y)=4.$

Задание 3. Переходя к полярным координатам, вычислите заданные двойные интегралы.

3.1 $\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,$ где S — полукруг радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(y\ge 0)$.

3.2 $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ где S — круг $x^2+y^2\le 2x.$

3.3 $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ где S — круг $x^2+y^2\le 2y.$

3.4 $\iint\limits_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S — четверть круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(x \ge 0,\ y \ge 0)$.

3.5 $\iint\limits_S y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S — четверть круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(x \le 0,\ y \ge 0)$.

3.6 $\iint\limits_S ydxdy$, где S — круг $x^2+y^2-4x \le 0$.

3.7 $\iint\limits_S xdxdy$, где S — круг $x^2+y^2-4y \le 0$.

3.8 $\iint\limits_S \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, где S — четверть круга радиуса $r=3$ с центром в начале координат $(x \ge 0, y \le 0)$.

3.9 $\iint\limits_S \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$, где S — четверть круга радиуса $r=4$ с центром в начале координат $(x \le 0, y \le 0)$.

3.10 $\iint\limits_S x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S — полукруг радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(x \ge 0)$.

3.11 $\iint\limits_S y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S — четверть круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат $\left(x \ge 0, y \ge 0\right)$.

3.12 $\iint\limits_S (x^2-y^2)dxdy$, где S — полукруг радиуса $r=3$ с центром в начале координат $(y \le 0)$.

3.13 $\iint\limits_S xdxdy$, где S — полукруг $x^2+y^2+2y \le 0,\ x \ge 0$.

3.14 $\iint\limits_S ydxdy$, где S — полукруг $x^2+y^2+2x \le 0,\ y \ge 0$.

3.15 $\iint\limits_S xy^2dxdy$, где S — полукруг радиуса $r=1$ с центром в начале координат $(x \ge 0)$.

3.16 $\iint\limits_S yx^2dxdy,$ где S — четверть круга радиуса $r=1$ с центром в начале координат $(x\le 0,\ y\ge 0)$.

Задание 4. Дайте чертеж и вычислите координаты центра тяжести однородной пластины, имеющей форму:

4.1 треугольника с вершинами в точках $A(0;0),\ B(0;4),\ C(-2;4).$

4.2 фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x+4;\ y^2=-2x+4.$

4.3 четверти эллипса $\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0.$

4.4 фигуры, ограниченной кривой $y=1-x^2,$ осью ох и осью oy.

4.5 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами: $r\le 2;\ \dfrac{3\pi}{4}\le\varphi\le\pi.$

4.6 треугольника с вершинами в точках $A(0;0),\ B(2;3),\ C(0;3).$

4.7 фигуры, ограниченной кривыми $x=1-y^2;\ x-y+1=0.$

4.8 четверти эллипса $x^2+\dfrac{y^2}{9}\le 1, x\ge 0, y\ge 0.$

4.9 фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x,$ осью ox и осью oy.

4.10 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами: $r\le 3;\ \dfrac{5\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}.$

4.11 треугольника с вершинами в точках $A(0;0),\ B(-2;0),\ C(0;-3).$

4.12 фигуры, ограниченной кривыми $x=y^2;\ x=9.$

4.13 четверти круга $x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0.$

4.14 фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2;\ y=\sqrt{x}.$

4.15 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами: $r\le 1;\ \dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.$

4.16 треугольника с вершинами в точках $A(0;0),\ B(1;0),\ C(1;-2).$

Задание 5. Вычислите моменты инерции относительно указанных осей для однородной пластины, имеющей форму:

5.1 Треугольника, ограниченного прямыми $x+y=2;\ \ x=2;\ y=2$ относительно оси ox.

5.2 Прямоугольника со сторонами 1 и 2 относительно оси, проходящей через меньшую сторону.

5.3 Треугольника, ограниченного прямыми $y=x;\ y=-x;\ y=1$ относительно оси oy.

5.4 Треугольника с вершинами $A(0;0),\ B(2;0),\ C(0;1)$ относительно оси ox.

5.5 Квадрата, ограниченного линиями $x=0; x=2; y=0; y=2$ относительно начала координат.

5.6 Плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1+2x^2,\ y=3x,$ относительно оси ox.

5.7 Кольцевой пластины $1\le x^2+y^2\le 4$ относительно оси ox.

5.8 Четверти кольца $4\le x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ относительно начала координат.

5.9 Треугольника, ограниченного прямыми $x+y=3; x=3; y=3$ относительно оси oy.

5.10 Прямоугольника со сторонами 2 и 3 относительно оси, проходящей через большую сторону.

5.11 Треугольника, ограниченного прямыми $y=x;\ y=-x;\ y=1$ относительно оси ox.

5.12 Треугольника с вершинами $A(0;0),\ B(4;0),\ C(0;2)$ относительно оси oy.

5.13 Плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2; y=0$ относительно оси oy.

5.14 Плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1+2x^2,\ y=3x,$ относительно оси oy.

5.15 Кольцевой пластины $1\le x^2+y^2\le 9$ относительно начала координат.

5.16 Полукольца $4\le x^2+y^2\le 16,\ x\ge 0,$ относительно оси oy.

Задание 6. Вычислите криволинейный интеграл.

Варианты 1–5: вычислите интеграл вдоль указанной кривой от точки A до точки B.

Варианты 6–10: вычислите интеграл вдоль кривой L, заданной параметрически.

Варианты 11–16: вычислите интеграл по замкнутому контуру L, проходя его в положительном направлении; используйте формулу Грина. В вариантах 14–16 формулу Грина проверьте непосредственными вычислениями интегралов.

6.1 $\int\limits_{(A)}^{(B)} \frac{x^2}{y+1}dx + xdy;\;\; y = x^3;\;\; A(0;0),\;\; B(1;1)$

6.2 $\int\limits_{(A)}^{(B)} \left(x^2 - xy\right)dx + \left(xy + y^2\right)dy;\;\; y = x^2;\;\; A(1;1),\;\; B(2;4)$

6.3 $\int\limits_{(A)}^{(B)} \frac{y^4}{x}dx - \left(y^3 + x^2 y\right)dy;\;\; y = \sqrt{x};\;\; A(1;1),\;\; B(4;2)$

6.4 $\int\limits_{(A)}^{(B)} y^3 dx + xdy;\;\; y = e^x;\;\; A(0;1),\;\; B(1;e)$

6.5 $\int\limits_{(A)}^{(B)} ydx + x^2 ydy;\;\; y = \ln x;\;\; A(1;0),\;\; B(e;1)$

6.6 $\int\limits_L y^2 dx + xdy;\, x = 3\cos t,\, y = 2\sin t,\, 0 \le t \le \pi$

6.7 $\int\limits_L xydx - (x+y)dy;\, x = 2\cos t,\, y = \sin t,\, 0 \le t \le \pi$

6.8 $\int\limits_L ydx - xdy;\, x = t - \sin t,\, y = 1 - \cos t,\, 0 \le t \le 2\pi$

6.9 $\int\limits_L x^2 ydx + (y-x)dy;\, x = t^3,\, y = t^4 - 1,\, 0 \le t \le 1$

6.10 $\int\limits_L (x-y)dx + 2ydy;\, x = t^2,\, y = \cos t,\, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

6.11 $\oint\limits_L -y^3 dx + x^3 dy;\;\; L$ — окружность $x^2 + y^2 = 4.$

6.12 $\oint\limits_L \left(2x-\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(5y+\frac{x^3}{3}\right)dy$; L — окружность $x^2+y^2=1$.

6.13 $\oint\limits_L \left(-2yx^2+x+1\right)dx+(2x-1)y^2dy$; L — окружность $x^2+y^2=9$.

6.14 $\oint\limits_L (x+y)dx+x^2ydy$; L — треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;2)$.

6.15 $\oint\limits_L (2xy+1)dx+xy^2dy$; L — треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(1;-3)$ $C(1;0)$.

6.16 $\oint\limits_L (x^2-y^2)dx+2(x-y)^2dy$; L — треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(-1;3)$, $C(-1;0)$.

Задание 7. Вычислите криволинейный интеграл от выражения, являющегося полным дифференциалом.

7.1. $\int\limits_{A(-1;2)}^{B(2;3)} ydx+xdy$ **7.2.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;1)} (x+y)(dx+dy)$

7.3. $\int\limits_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \cos xdx+\sin ydy$ **7.4.** $\int\limits_{A(1;2)}^{B(2;5)} x^2dx+y^2dy$

7.5. $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;2)} xdx+ydy$ **7.6.** $\int\limits_{A(-1;1)}^{B(2;2)} x^2dx-ydy$

7.7. $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;2)} 2xydx+x^2dy$ **7.8.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)} \sin xdx-\cos ydy$

7.9. $\int\limits_{A(-2;1)}^{B(0;2)} \left(x+y\right)dx+xdy$ **7.10.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;1)} xdx+2y^2dy$

7.11. $\int\limits_{A(0;0)}^{B(2;1)} \left(x-y\right)dx-xdy$ **7.12.** $\int\limits_{A(1;1)}^{B(2;3)} 2xdx-ydy$

7.13. $\int\limits_{A(-1;0)}^{B(0;2)} xdx - y^2dy$ **7.14**. $\int\limits_{A(-1;0)}^{B(2;2)} x^2dx - y^2dy$

7.15. $\int\limits_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \sin xdx - \sin ydy$ **7.16.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;1)} xdx + y^3dy$

Литература

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Демидовича Б.П. – М., АСТ, 2001.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М., Наука, 1985.
3. *Кремер Н.Ш.* и др. Высшая математика для экономистов. 3-е изд. – М., ЮНИТИ, 2010.
4. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., Наука, 1988.
5. *Данко И.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2. – М., Высшая школа, 1996.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 1, 2. – М., Физматлит, 2005.

Содержание

Учебное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ С ПРИМЕРАМИ И ВАРИАНТАМИ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Составитель: **Кадымов** Вагид Ахмедович

Печатается в авторской редакции.

Технический редактор
- К.А. Антонов
Компьютерная верстка
- К.А. Антонов

Подписано в печать 16.05.2015. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 3,75.
Тираж 20 экз. Заказ № 31.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.

Для заметок

Для заметок

Для заметок