В.А. Кадымов, Е.А. Яновская

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий

Учебное пособие

Москва
2018

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет

**В.А. Кадымов,
Е.А. Яновская**

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ С ПРИМЕРАМИ И ВАРИАНТАМИ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Учебно-методическое пособие

Москва
2018

УДК 51
ББК 22.143
К 13

Рецензент:

Уварова Л.А., д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ Станкин

В.А. Кадымов, Е.А. Яновская
К 13 Линейная алгебра. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие. – М.: МГГЭУ, 2018. – 112 с.

В учебнике в краткой форме представлен необходимый теоретический материал по линейной алгебре и его приложениям: теория систем линейных алгебраических уравнений, линейные пространства, евклидовы пространства, линейные и самосопряженные операторы, билинейные и квадратичные формы.

Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Приводятся тесты для закрепления теоретического и практического материалов. В завершении книги представлены варианты контрольных заданий для самостоятельной работы.

Учебное пособие рекомендуется для студентов МГГЭУ, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Экономика».

Печатается в авторской редакции.

ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра — это часть алгебры, которая изучает конечномерные векторные (линейные) пространства, линейные отображения, линейные операторы и линейные преобразования (пространства в себя).

В своем изложении линейная алгебра использует такие инструменты, как теории матриц и определителей, теорию инвариантов и тензорного исчисления, квадратичные и билинейные формы.

Линейная алгебра находит применение в теории евклидовых пространств (линейные пространства с введенным скалярным произведением и метрикой), в задачах линейного программирования, эконометрике, аналитической геометрии (прямая и плоскость, кривые второго порядка и канонические преобразования), квантовой физике.

1. ИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Матрица и ее свойства. Матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений. Определитель и его свойства

В данном разделе будем исследовать системы алгебраических уравнений первой степени с несколькими неизвестными. Такие системы называют системами линейных уравнений или, кратко, линейными системами. При этом количество уравнений и количество неизвестных в системе могут не совпадать.

Пример 1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$ — система двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2.

Пример 2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ — система двух уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3.

В общем случае линейная система, состоящая из m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ (система размера $m \times n$) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

где значения a_{ij} и $b_i \left(i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n\right)$ заданы, причем здесь и далее они предполагаются действительными. Величины a_{ij} называются коэффициентами системы (1.1), а величина b_i — свободным членом i-го уравнения. Заметим, что в обозначении a_{ij} первый индекс i соответствует номеру уравнения, а второй — j — номеру неизвестного x_j. Так, в примере 1 представлена система размера 2×2: $m = n = 2;\ a_{11} = 1; a_{12} = 2; a_{21} = 3; a_{22} = 7;\ b_1 = 1; b_2 = 2.$

Определение. *Решением системы* (1.1) называется упорядоченное множество n чисел $\{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\}$, таких, что каждое из уравнений этой системы обращается в тождество при замене в нем x_1 на x_1^0, x_2 на x_2^0, …, x_n на x_n^0.

Так, заметим, что множество $\{3; -1\}$, т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ является решением системы примера 1.

Определение. Система (1.1) называется ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения. Система, имеющая решение, называется ***совместной***. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение и ***неопределенной***, если у нее более одного решения (далее мы увидим, что в этом случае решений будет бесконечно много).

Пример 3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ — система несовместна, т.к. ее уравнения противоречивы.

Пример 4. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ — система совместна, определена. Действительно, первое уравнение равносильно соотношению $x_1 = x_2$. Подставив его во второе уравнение, получим $x_2 + x_2 = 2$, в результате чего найдем единственное решение: $x_1 = 1; x_2 = 1$.

Пример 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$ — система совместна, неопределенна.

В самом деле, поскольку оба уравнения есть одно и то же, то систему можно заменить одним уравнением $x_1 + 2x_2 = 1$, которое перепишем в виде $x_1 = 1 - 2x_2$. Взяв теперь любое число α в качестве x_2, заметим, что $x_1 = 1 - 2\alpha; x_2 = \alpha$ — есть решение нашего уравнения (а значит и всей исходной системы). Поскольку α произвольно, то и решений системы бесконечно много. Так, например, при $\alpha=0$ получим частное решение $x_1=1; x_2=0;$ при $\alpha=1/2$ получим другое частное решение $x_1=0; x_2=1/2$ и т.д.

Определение. Система (1.1) называется ***однородной***, если все $b_i\left(i=1,2,...,m\right)$.

Однородная система всегда совместна, т.к. заведомо имеет решение $x_1=0, x_2=0,..., x_n=0,$ которое называется ***тривиальным***.

Определение. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они или обе несовместны, или же обе совместны и при этом любое решение первой системы является решением второй, а также любое решение второй системы является решением первой.

Заметим без доказательства, что если к линейной системе применить следующие преобразования, называемые ***элементарными***:

- поменять местами уравнения;
- умножить обе части какого-либо уравнения на любое отличное от нуля число;
- к обеим частям какого-либо уравнения прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на любое число, то получится ***система, эквивалентная*** исходной.

Основная задача теории систем линейных уравнений состоит в том, чтобы выяснить, совместна данная система или нет и, если совместна, то найти все ее решения.

Действия над матрицами. Матричные уравнения

Определение. ***Матрицей*** размера $m\times n$ называется таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{11}; a_{12};...; a_{mn}$ называются элементами матрицы A, причем элемент a_{ij} расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Матрица называется ***прямоугольной***, если $m \neq n$.

Матрица называется ***квадратной***, если $m = n$, при этом n называется порядком квадратной матрицы. Например, $A = \left(a_{11}\right)$ — квадратная матрица первого порядка, состоящая из одного элемента a_{11}; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица второго порядка.

Определение. ***Транспонированием*** матрицы A называется преобразование, делающее строки этой матрицы столбцами, в результате чего получается новая матрица A^T:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Введем сокращенную запись матриц: $A = \left(a_{ij}\right)$ — матрица A с элементами $a_{ij}, i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n.$

Равенство матриц. Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ называются равными: $A = B,$ если они обе одинакового размера $m \times n$ и равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i; j.$

Сложение матриц. Если матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ одинакового размера $m \times n,$ то их суммой называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)$ того же размера, у которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\left(i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n\right)$: Обозначается: $C = A + B.$

Пример 6. Иллюстрация правила сложения матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица θ размера $m \times n$, у которой все элементы равны нулю, называется ***нуль-матрицей*** размера $m \times n$.

Для сложения матриц справедливы следующие законы:

1) $A + B = B + A$ — коммутативный (переместительный);
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативный (сочетательный), при этом скобки обозначают первоочередность выполнения действий сложения;
3) $A + \theta = \theta + A = A$ для любой матрицы *A*, если *A* и θ одного размера.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число α αназывается матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$: Обозначается: $B = \alpha A = A\alpha$.

Пример 7. Иллюстрация правила умножения матрицы на число:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

Введенная операция обладает следующими свойствами:

1) $0 \cdot A = \theta$;
2) $1 \cdot A = A$;
3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$;
4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
5) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

Здесь *A* и *B* — матрицы одного размера, α и β — два любых числа, скобки обозначают первоочередность действий.

Пример 8. Проиллюстрируем свойство 4:

$$3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \right) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 18\\ 0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -3\\ -9 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 15\\ -9 & 21\end{pmatrix}.$$

В то же время: $3\cdot\begin{pmatrix}1+2 & 6-1\\ 0-3 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 15\\ -9 & 21\end{pmatrix}.$

Произведение матриц. Пусть $A=\left(a_{ij}\right)$ — матрица размера $m\times n$; $B=\left(b_{ij}\right)$ — матрица размера $n\times l$. Их произведением называется матрица $C=AB$; $C=\left(c_{ij}\right)$ размера $m\times l$, элементы которой вычисляются по следующему правилу. Элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы C, представляет собой сумму попарных произведений элементов i-й строки матрицы A на элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},\ \left(i=1,2,\ldots,m;\, j=1,2,\ldots,l\right).$$

Подчеркнем, что произведение $C=AB$ определено только если количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B, при этом у матрицы C столько же строк, сколько их у матрицы A и столько же столбцов, сколько их у матрицы B. Изобразим произведение $AB=C$ следующей схемой (рис. 1.1).

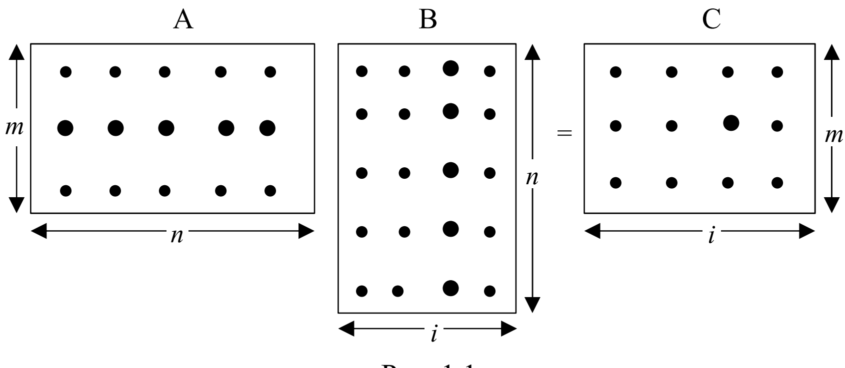

Рис. 1.1

На схеме указаны размерности всех матриц и точками обозначены их элементы, при этом $m = 3; n = 5; l = 4.$ Крупно выделен элемент $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} + a_{24}b_{43} + a_{25}b_{53}$ и те элементы матриц A и B, попарные произведения которых входят в выражение для c_{23}.

Пример 9. Иллюстрация правила умножения матриц:

1) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 0\cdot 5 & 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 0\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot(-4) + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 5\cdot 0 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 17 \end{pmatrix};$$

2) $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \bigl(2\cdot(-3) + 4\cdot 0 + 1\cdot 2\bigr) = (-4);$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 0\cdot 2 & 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

4) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & -1+1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. произведение ненулевых матриц может быть нуль-матрицей.

Операция умножения матриц обладает свойствами:

1) $A(BC) = (AB)C;$

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B;$

3) $(A + B)C = AC + BC;$

4) $C(A + B) = CA + CB;$

где α — любое число, а размеры матриц таковы, что все указанные операции имеют смысл.

Читателю предлагается проверить эти свойства для квадратных матриц второго порядка.

Следует особо подчеркнуть, что в общем случае $AB \neq BA$, т.е. произведение матриц *некоммутативно.* В этом легко убедиться, перемножив две квадратные матрицы из п.4) примера 9 в обратном порядке. Однако для некоторых матриц равенство $AB = BA$ все же выполняется и в этом случае такие матрицы называются коммутативными или перестановочными. Простейший пример такого рода — любая квадратная матрица A и нуль-матрица того же порядка:

$$A \cdot O = O \cdot A = O.$$

Основы теории определителей

Далее в пределах данного раздела будем рассматривать только квадратные матрицы.

Определение. Всякой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие число, которое называется определителем или детерминантом этой матрицы и обозначается:

$$\det A, |A|, \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При этом определитель матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ равен ее элементу:

$$|A| = a_{11}, \tag{1.2}$$

определитель матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ равен:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \tag{1.3}$$

определитель матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \quad (1.4)$$

Правило вычисления определителей матриц более высоких порядков введем несколько ниже.

Для запоминания формулы (1.4) следует учесть, что первые три слагаемые, входящие со знаком «плюс», вычисляются как тройные произведения элементов матрицы по схеме, изображенной на

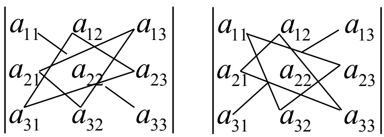

Рис. 1.2

рис. 1.2 слева. При этом $a_{11}a_{22}a_{33}$ — произведение элементов, стоящих на диагонали, называемой главной, а два другие слагаемые — произведения элементов, расположенных в вершинах обозначенных на схеме треугольников. Слагаемые со знаком «минус» вычисляются по схеме, изображенной на рис. 1.2 справа. При этом $a_{31}a_{22}a_{13}$ — произведение элементов на другой диагонали, а остальные два слагаемые — произведения элементов, стоящих в вершинах соответствующих треугольников.

Пример 10.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -10;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 + 0 \cdot (-6) \cdot 7 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 7 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 4 -$

$-(-2) \cdot (-6) \cdot 1 = 20 - 12 - 70 - 12 = -74$

В дальнейшем для краткости будем употреблять термины: «определитель порядка n», «строка определителя», «столбец определителя», понимая под этим, соответственно, определитель матрицы порядка n, а также строку или столбец этой матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу A произвольного порядка n. Хотя существует определение понятия ее детерминанта непосредственно через элементы матрицы по формуле, аналогичной (1.3) или (1.4), однако, уже при $n=4$ эта формула весьма громоздка, поэтому будем определять детерминант порядка n через детерминант порядка $n-1$. Для этого введем ряд понятий.

Определение. Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель матрицы порядка $n-1$, получающейся из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит a_{ij}.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется величина, равная выражению: $(-1)^{i+j} M_{ij}$, (т.е. равная минору M_{ij}, если сумма индексов $i+j$ четна и равная $-M_{ij}$, если эта сумма нечетна).

Пример 11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Рассмотрим элемент $a_{11}=1$.

Вычеркнув первую строку и первый столбец, получим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$. Согласно определению $M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=12$, $A_{11}=(-1)^{1+1} M_{11}=$ $=M_{11}=12$.

Теперь выберем, например, элемент a_{23}.

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=(-1)^{2+3} M_{23}=-M_{23}=4.$$

Аналогично получаются дополнительные миноры и алгебраические дополнения остальных элементов.

Пример 12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Здесь дополнительные миноры элементов матрицы представляют собой соответствующие определители первого порядка, при этом $M_{11}=4; M_{12}=3; M_{21}=2;\ M_{22}=1;$ $A_{11}=1; A_{12}=-3;\ A_{21}=-2; A_{22}=1$.

Правило вычисления определителя порядка $\boldsymbol{n(n \geq 2)}$**.** Определитель порядка n равен сумме попарных произведений элементов любой его строки (или столбца) на алгебраические дополнения этих элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad (1.5)$$

- формула разложения определителя по элементам i-й строки, или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

- формула разложения определителя по элементам j-го столбца. Можно доказать, что выражение стоящее справа в этих формулах не зависит от номера строки или столбца.

Пример 13. Вычислим $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по элементам первой строки:

$$|A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) - (-22) = 1.$$

Легко проверить, что если вычислять $|A|$ по формуле (1.4), то получится то же значение. Тот же результат будет и при разложении $|A|$ по элементам любой другой строки или любого столбца.

Пример 14. Вычислим $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по элементам второй строки:

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-33) - 4(-15) + 5 \cdot 1 = 131.$$

Замечания.

1. При вычислении определителя второго порядка разложение по элементам любой строки или столбца дает формулу (1.3). Например, по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Для определителя третьего порядка из формулы (1.5) также можно получить формулу (1.4) и, наоборот, из формулы (1.4) формулу (1.5).
3. Вычисление определителя матрицы большого порядка непосредственно по формуле (1.5), как правило, весьма трудоемко. Например, определитель, пятого порядка выражается через пять определителей четвертого порядка, каждый из которых, в свою очередь, выражается через четыре определителя третьего порядка. Таким образом, перед применением формулы (1.5) часто имеет смысл провести некоторые преобразования исходной матрицы, упрощающие вычисление ее детерминанта. При этом следует использовать свойства опре-

делителей, которые сейчас будут сформулированы. Эти свойства, справедливые для определителей любого порядка, для случая 2-го или 3-го порядка легко проверить с помощью формул (1.3) или (1.4).

Свойства определителей

1^0. При транспонировании матрицы определитель не меняется. Например, для определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Из этого свойства следует, что любое утверждение, справедливое для строк определителя, справедливо также и для его столбцов и наоборот. В связи с этим последующие свойства сформулируем только для строк, заметив, что они справедливы и для столбцов.

2^0. Если в какой-либо строке определителя все элементы равны нулю, то определитель равен нулю.

3^0. Если поменять местами какие-либо две строки определителя, то он изменит знак. Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

4^0. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

5^0. Общий множитель всех элементов какой-либо одной строки можно вынести за знак определителя. Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6^0. Если в определителе какие-либо две строки пропорциональны, то он равен нулю. Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, λ — любое действительное число.

7^0. Если в какой-либо i-й строке определителя каждый элемент a_{ij} является суммой двух слагаемых $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, то этот определитель равен сумме двух определителей, у каждого из которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в данном определителе, а i-я строка содержит, соответственно, только b_{ij} и только c_{ij}. Например, если речь идет о второй строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8^0. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки, умноженные на одно и то же число. Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, где λ — любое действительное число.

Последнее свойство является следствием двух предыдущих.

Пример 15. Вычислим определитель из примера 14, предварительно преобразовав исходную матрицу. Для удобства расчетов поменяем местами первую и третью строки, в результате чего, согласно свойству 3^0, определитель поменяет знак:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее, аналогично тому, как мы поступали в методе Гаусса, преобразуем матрицу к виду, когда все ее элементы в первом столбце, кроме a_{11}, равны нулю. Для этого умножим первую строку на -2 и прибавим ко второй; умножим первую строку на -3 и прибавим к третьей; умножим на -1 и прибавим к четвертой, при этом, согласно свойству 8^0, определитель не изменится, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Поменяв местами вторую и четвертую строки, получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Далее занулим (как в методе Гаусса) элементы, стоящие во втором столбце в третьей и четвертой строках и затем занулим элемент в третьем столбце, четвертой строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 10 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 131 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель треугольного вида разложим по первому столбцу и затем, раскладывая по первому столбцу определители низших порядков, получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 131 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 131 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 131 \end{vmatrix} = 131.$$

Попутно заметим, что определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Заметим также, что если в процессе элементарных преобразований у матрицы появилась нулевая строка (столбец), то по свойству 2^0 определитель равен нулю.

Вернемся к системе линейных уравнений (1.1), поставив ей в соответствие матрицу коэффициентов размера $m \times n$, матрицу-столбец неизвестных и матрицу-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда, СЛАУ (1.1) с учетом свойств матриц может быть переписана в эквивалентной, матричной форме:

$$AX = B \qquad (1.1)'$$

Введем понятие ***расширенной матрицы*** СЛАУ $\bar{A}$, которая получается из матрицы A добавлением к ней столбца свободных членов системы и соответственно имеет размерность $m \times (n+1)$.

Рассмотрим случай $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

1.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

В этом разделе мы представим 3 общих метода решения СЛАУ:

- метод (правило) Крамера;
- метод обратной матрицы;
- метод Гаусса.

Матрица A — квадратная $(m=n)$ с определителем $|A|$. Если $|A|\neq 0,$ то справедливы формулы, выражающие решение системы (1.6) через ее коэффициенты и свободные члены. Эти формулы, приводимые без доказательства, называются «правилом Крамера».

Правило Крамера. Если $|A|\neq 0,$ то система (1.6) совместна и определенна, а ее решение выражается при помощи дробей:

$$x_1=\frac{d_1}{d},\ x_2=\frac{d_2}{d},\ldots,\ x_n=\frac{d_n}{d}, \tag{1.7}$$

где $d=|A|,$ а d_i — определитель, получающийся из d заменой i-го столбца на столбец свободных членов:

$$d_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad d_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$d_n=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Пример 16. Решите по правилу Крамера систему: $\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$

Решение. $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5;$ $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$ $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7,$

$x_1 = -\dfrac{1}{5},\ x_2 = \dfrac{7}{5}.$

Замечания.

1. Если $d = 0$ и при этом какой-либо из определителей $d_1, d_2, ..., d_n$ отличен от нуля, то система (1.6) несовместна. Если же $d = 0$ и $d_1 = d_2 = ... = d_n = 0,$ то система (1.6) может быть в одних случаях несовместной, в других — совместной, неопределенной. Чтобы уточнить этот вопрос необходимо дополнительное исследование системы.
2. Пусть система (1.6) однородна: $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0.$ Тогда если $d \neq 0,$ то, согласно правилу Крамера, у системы единственное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Если же у однородной системы есть решения, отличные от нулевого, то тогда $d = 0$ (т.к. иначе у нее только одно решение — нулевое).

Если у однородной системы $d = 0,$ то она обладает решениями, отличными от нулевого, т.е. совместна, неопределенна. Этот факт оставим без доказательства.

Выполните самостоятельно.

1. При каких значениях c однородная система уравнений с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2-c \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ имеет нетривиальные решения?

Переходим к изложению метода обратной матрицы. Будем рассматривать только квадратные матрицы.

Теорема. Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового порядка. Тогда определитель их произведения равен произведению их определителей.

$$|AB| = |A||B| \tag{1.8}$$

Следствие: $|AB| = |BA|$.

Определение. Единичной матрицей E порядка n называется квадратная матрица, у которой элементы на главной диагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Так, например, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что E коммутирует с любой квадратной матрицей такого же порядка: $AE = EA = A$, кроме того, определитель матрицы E любого порядка равен единице: $|E| = 1$ (как произведение элементов главной диагонали).

Определение. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля и *вырожденной*, если он равен нулю.

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если она удовлетворяет условию

$$AA^{-1} = E. \tag{1.9}$$

В этом случае можно доказать, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, т.е. что A и A^{-1} коммутативны. Заметим, что не для любой квадратной матрицы существует обратная. Так, если A вырожденная $\left(|A| = 0\right)$, то для нее не существует обратной, поскольку иначе выполнялись бы равенства: $\left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right|$ и $\left|AA^{-1}\right| = |E| = 1$, откуда $|A|\left|A^{-1}\right| = 1$, чего не может быть в силу $|A| = 0$.

Итак, если матрица A имеет обратную, то она невырождена (т.е. $|A| \neq 0$). Но любая ли невырожденная матрица имеет обратную?

Оказывается, что любая.

Теорема. Если квадратная матрица A невырождена, то она имеет единственную обратную матрицу A^{-1}.

Чтобы построить обратную матрицу к заданной матрице $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n, нужно выполнить следующие действия.

1. Убедиться, что определитель $d = |A|$ отличен от нуля.
2. Составить новую матрицу, которая получается из A заменой каждого элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение A_{ij}:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонировать эту матрицу, получив матрицу A*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

называемую взаимной или присоединенной к матрице A.

4. Получить матрицу A^{-1} умножением A* на величину $\dfrac{1}{d}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* = \begin{pmatrix} A_{11}/d & A_{21}/d & \cdots & A_{n1}/d \\ A_{12}/d & A_{22}/d & \cdots & A_{n2}/d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}/d & A_{2n}/d & \cdots & A_{nn}/d \end{pmatrix}, \qquad (1.10)$$

Построив A^{-1}, следует убедиться в отсутствии ошибок вычислений проверкой соотношения (1.9).

В силу (1.8), (1.9), а также равенства $|E| = 1,$ определитель обратной матрицы связан с определителем матрицы A соотношением

$$|A^{-1}| = \frac{1}{d}. \qquad (1.11)$$

Пример 17. Для заданной матрицы A найдите обратную:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $d = 2; A_{11} = 2; A_{12} = -1; A_{21} = 0; A_{33} = 1,$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \; A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $d = 5,$ $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \dots$

Процесс вычисления остальных A_{ij} опустим.

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; A^{-1} = \frac{1}{5}A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Проверкой легко убедиться в правильности результата.

Вернемся к системе n линейных уравнений с n неизвестными (1.6), которую можно записать в виде **матричного уравнения**

$$AX = B; \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

Пусть матрица A — невырожденная $\left(d=|A|\neq 0\right)$ и, следовательно, имеет обратную A^{-1}. Умножив обе части уравнения (1.12) слева на A^{-1}, получим $A^{-1}\left(AX\right)=A^{-1}B$, но поскольку $A^{-1}\left(AX\right)=$ $=\left(A^{-1}A\right)X=EX=X$, то будем иметь равенство

$$X=A^{-1}B,\text{ или}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}/d & \cdots & A_{n1}/d\\A_{12}/d & \cdots & A_{n2}/d\\\vdots & \ddots & \vdots\\A_{1n}/d & \cdots & A_{nn}/d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}, \qquad (1.13)$$

представляющее собой **решение** системы (1.6) **в матричной форме**. Заметим, что (1.13) можно трактовать и как матричную запись правила Крамера.

Пример 18. Решите систему $\begin{cases}4x_1+3x_2=-3\\x_1-5x_2=5\end{cases}$.

Решение. Матричная форма системы: $\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

Вычислим $d=\begin{vmatrix}4 & 3\\1 & -5\end{vmatrix}=-23$ и затем найдем обратную матрицу $\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{23}\begin{pmatrix}-5 & -3\\-1 & 4\end{pmatrix}$. В результате получим решение:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=-\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-5 & -3\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще несколько матричных уравнений относительно неизвестной матрицы $X=\left(x_{ij}\right)$ размера $n\times l$.

1) $\underline{AX=B}$, где A — невырожденная квадратная матрица порядка n; B — матрица размера $n\times l$ (A и B заданы). Это уравнение отличается от (1.12) лишь более общим видом матри-

цы B, поэтому способ построения решения и его вид будет тем же: $\underline{X = A^{-1}B}$.

2) $\underline{XA = B}$, где A — невырожденная квадратная матрица порядка l; B — матрица размера $n \times l$. Умножив обе части уравнения справа на A^{-1}, получим $XAA^{-1} = BA^{-1}$, т.е. $XE = BA^{-1}$, откуда $\underline{X = BA^{-1}}$.

3) $\underline{AXB = C}$, где A, B — невырожденные квадратные матрицы порядка n и l соответственно, c — размера $n \times l$. Решение получим так: $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$, т.е. $EXE = A^{-1}CB^{-1}$, откуда $\underline{X = A^{-1}CB^{-1}}$.

Пример 19. Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Построив указанные обратные матрицы, после соответствующего перемножения трех матриц получим:

$$X = \begin{pmatrix} 7/12 & 0 \\ -1/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Универсальным методом решения линейных систем является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Поясним его идею на нескольких примерах.

Пример 20. Решите систему $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

Решение. Заметим, что в первом уравнении коэффициент при x_1 отличен от нуля $(a_{11} = 2)$. Преобразуем данную систему к эквивалентной, оставив первое уравнение без изменения, а все остальные заменив новыми, не содержащими x_1. Эти новые уравнения получим следующим образом. Сначала умножим обе части первого уравнения на такое число (здесь оно равно двум), чтобы получилось уравнение с коэффициентом при x_1, равным коэффициенту при x_1, во втором уравнении, т.е. четырем, в результате чего получим

$$4x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 2.$$

Вычитая обе части полученного уравнения из соответствующих частей второго уравнения исходной системы (или, что то же самое, складывая второе уравнение с первым, умноженным на –2), будем иметь

$$4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - \left(4x_1 - 4x_2 - 6x_3\right) = 0 - 2 \Rightarrow x_2 + 4x_3 = -2.$$

Это уравнение и возьмем в качестве второго в новой системе. Третье уравнение новой системы строим аналогично. Умножив обе части первого уравнения на 3/2, получим уравнение

$$3x_1 - 3x_2 - \frac{9}{2}x_3 = \frac{3}{2}$$

с таким же коэффициентом при x_1, что и в третьем уравнении исходной системы. Вычитая обе его части их соответствующих частей третьего уравнения исходной системы, запишем:

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - \left(3x_1 - 3x_2 - \frac{9}{2}x_3\right) = 11 - \frac{3}{2} \Rightarrow 9x_2 + \frac{17}{2}x_3 = \frac{19}{2}.$$

Это уравнение и возьмем в качестве третьего в новой системе.

Итак, рассмотрим новую, эквивалентную исходной, систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = -2 \\ 9x_2 + \dfrac{17}{2}x_3 = \dfrac{19}{2}. \end{cases}$$

Ее опять преобразуем, оставив в ней первое и второе уравнения без изменения, а третье заменив новым, содержащим только переменную x_3. Для этого, умножив второе уравнение рассматриваемой системы на 9, получим уравнение

$$9x_2 + 36x_3 = -18$$

с тем же коэффициентом при x_2, что и в третьем уравнении. Вычитая обе его части из соответствующих частей третьего уравнения, будем иметь

$$9x_2 + \frac{17}{2}x_3 - \left(9x_2 + 36x_3\right) = \frac{19}{2} - \left(-18\right) \Rightarrow -\frac{55}{2}x_3 = \frac{55}{2}.$$

В результате исходная система преобразована к эквивалентной системе, так называемого, треугольного вида

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 + 4x_3 = -2 \\ \qquad\quad -\frac{55}{2}x_3 = \frac{55}{2}, \end{cases}$$

решение которой легко построить. Из третьего уравнения найдем неизвестное $x_3 = -1$; подставляя его во второе уравнение, найдем $x_2 = -2 - 4x_3 = 2$ и подставляя затем оба найденных неизвестных в первое уравнение, получим

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + 2x_2 + 3x_3\right) = 1.$$

Указанный алгоритм подтверждает единственность решения построенной системы треугольного вида и, следовательно, единственность решения $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1$ исходной системы, которая, таким образом, является совместной, определенной.

Пример 21. Решите систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Решение. Применим метод Гаусса, исключая сначала x_1 из второго и третьего уравнений с помощью первого:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2\left(x_1 - 2x_2 - x_3\right) = 4 - 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3\left(x_1 - 2x_2 - x_3\right) = 2 - 3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ \quad 5x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Исключим x_2 из третьего уравнения, вычитая из него второе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 5x_2 + 5x_3 - \left(5x_2 + 5x_3\right) = -1 - 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ \qquad\qquad 0 = -3. \end{cases}$$

В полученной системе, эквивалентной исходной, последнее равенство невыполнимо, что означает ее несовместность, а значит и несовместность исходной системы.

Пример 22. Решите систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Решение. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - \left(x_1 + 3x_2 + 2x_3\right) = 2 - 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2\left(x_1 + 3x_2 + 2x_3\right) = 3 - 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Исключим x_2 из третьего уравнения, вычитая из него второе:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - 3x_3 = 1 \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Отбросив последнее равенство, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

трапецеидального вида, отличающуюся от системы треугольного вида тем, что количество ее уравнений меньше количества неизвестных. Покажем, что у нее бесчисленное множество решений.

Перенеся члены с x_3 в правые части обоих уравнений, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 - 2x_3 \\ \quad -5x_2 = 1 + 3x_3 \end{cases}$$

треугольного вида относительно x_1; x_2. Эти неизвестные называются ***базисными***, а неизвестное x_3 — ***свободным***. Придавая x_3 произвольные значения $x_3 = \alpha$, можно последовательно выразить x_2 и x_2 через то же значение α:

$$x_2 = -\frac{1}{5}\left(1 + 3x_3\right) = -\frac{1}{5}\left(1 + 3\alpha\right);$$

$$x_1 = 1 - 2x_3 - 3x_2 = 1 - 2\alpha + \frac{3}{5}\left(1 + 3\alpha\right) = \frac{1}{5}\left(8 - \alpha\right).$$

Итак, решения трапецеидальной системы (а значит и исходной) имеют вид

$$x_1 = \frac{1}{5}(8-\alpha);\;\; x_2 = -\frac{1}{5}(1+3\alpha);\;\; x_3 = \alpha,$$

где α — любое число, т.е. этих решений бесчисленное множество. Таким образом, исходная система совместна, неопределенна.

Система с произвольным числом уравнений и неизвестных исследуется методом Гаусса совершенно аналогично. При этом в процессе последовательного исключения неизвестных могут возникнуть следующие ситуации:

1) На некотором этапе получается уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных в левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля; тогда система несовместна.
2) Такого уравнения не получается и система приводится к **треугольному виду** (при этом число уравнений оказывается равным числу неизвестных); тогда система совместна, определенна.
3) Указанного выше уравнения не получается и система приводится к **трапецеидальному виду** (при этом число уравнений оказывается меньше числа неизвестных); тогда система совместна, неопределенна, причем обладает бесчисленным множеством решений.

Метод Гаусса применим к любым системам линейных уравнений, коэффициенты и свободные члены которых заданы своими числовыми значениями.

При исследовании СЛАУ важное значение имеет понятие ранга матрицы.

Определение. ***Рангом матрицы*** называется число, равное наибольшему из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы и обозначается символом $rang(A)$.

Имеет место теорема, которая позволяет предложить эффективный способ вычисления ранга матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Согласно этой теореме, ранг матрицы равен числу ненулевых строк матрицы после ее приведения к треугольному или трапецеидальному виду. Следующая теорема устанавливает критерий совместности СЛАУ.

Теорема (Кронекера-Капелли). СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда $r(A)=r(\overline{A})$.

Пользуясь теоремой Кронекера-Капелли, а также методом Гаусса решения СЛАУ, можем представить следующий ***вывод***:

Любая СЛАУ:

1) **несовместна** при $rang(A)\neq rang(\overline{A})$;

2) **совместна** при $rang(A)=rang(\overline{A})$, а именно,

2а) **определенна** (имеет единственное решение), если $rang(A)=$ $=rang(\overline{A})=n,$ где n — число неизвестных системы;

2б) **неопределенна** (имеет бесчисленное множество решений), если $rang(A)=rang(\overline{A})<n.$

Рассмотрим примеры.

Пример 23. Исследуйте на совместность и решите систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=8 \\ 2x_1-x_2+x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=-3 \end{cases}.$$

Решение. Находим ранги матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & -8 & 11 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow rang(A)=3;$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & -8 & 11 & -27 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow rang(\overline{A})=3.$$

Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли, система совместна и определенна. Найдем это решение, пользуясь методом Гаусса.

$$\overline{A} \equiv \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & -8 & 11 & -27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Исходная система приведена к эквивалентной системе треугольного вида, которое имеет единственное решение. Последовательно решая последние уравнения, получим:

$$x_3 = -1; x_2 = 2; x_1 = 1.$$

Пример 24. Исследуйте на совместность и решите систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Решение. Находим ранги матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\left(A\right) = 2;$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rang\left(\overline{A}\right) = 2.$$

Следовательно, система совместна и неопределенна.

Найдем это решение, пользуясь методом Гаусса.

$$\overline{A} \equiv \left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Систему приведена к трапециадальному виду, которая имеет бесчисленное множество решений, зависящее от одной произвольной постоянной. Примем за свободную переменную $x_3 = c.$ Тогда, из второго уравнения получаем, что $x_2 = \frac{1}{5}\left(7x_3 + 17\right) = \frac{1}{5}\left(7c + 17\right) = \frac{7}{5}c + \frac{17}{5}.$ И, наконец, из первого уравнения получаем:

$$x_1 = -2x_2 + 3x_3 + 8 = -2\left(\frac{7}{5}c + \frac{17}{5}\right) + 3c + 8 = \frac{1}{5}c + \frac{6}{5}.$$

Таким образом, получили общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/5)c + (6/5) \\ (7/5)c + (17/5) \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1/5 \\ 7/5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ 17/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где c — произвольная постоянная. В частности, при $c = 1$ получаем решение, совпадающее с решением предыдущего примера.

Пример 25. Исследуйте на совместность систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

Решение. Находим ранги матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -5 & 7\\ 0 & -5 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -5 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\left(A\right)=2;$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 8\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 8\\ 0 & -5 & 7 & -17\\ 0 & -5 & 7 & -19\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 8\\ 0 & -5 & 7 & -17\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow rang\left(\overline{A}\right)=3.$$

Следовательно, система несовместна $\left(rang\left(A\right)\neq rang\left(\overline{A}\right)\right)$.

1.3. Пространство решений однородной СЛАУ и его базис (фундаментальная система решений). Общее решение однородной СЛАУ. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений. О связи общих решений однородной и неоднородной СЛАУ

Рассмотрим однородную СЛАУ с n неизвестными

$$AX=\theta, \tag{1.15}$$

которая получается из общей неоднородной СЛАУ (1.12), где надо положить $B\equiv\theta$. Здесь $A=\left(a_{ij}\right)$ — размерности $m\times n$; X — искомый столбец с n элементами $x_1,x_2,...,x_n$; θ — нулевой столбец с m элементами. Заметим, что система совместна, так как всегда по крайней мере нулевое решение $x_1=x_2=...=x_n=0$. Множество решений системы (1.15), как было отмечено ранее, образует линейное пространство T_n.

Определение. Базис всех решений однородной СЛАУ называется ***фундаментальной совокупностью (системой) решений*** этой системы и обозначают ФСР.

Имеет место **теорема 1**:

Размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ равна $n-r$, где n — число неизвестных; r — ранг матрицы системы.

Теорема 2. Общее решение однородной СЛАУ (1.15) имеет вид:

$$X=\sum_{k=1}^{n-r}c_kX_k, \tag{1.16}$$

где $c_1,c_2,...,c_{n-r}$ — произвольные числа, а $X_1,X_2,...,X_{n-r}$ — ФСР системы (1.15).

Пример 26. Найдите ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=0\\4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=0.\\2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=0\end{cases}$$

Решение. Применяем метод Гаусса:

$$\overline{A}\equiv\left(A\middle|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&3&-2&4&0\\4&-2&5&1&7&0\\2&-1&1&8&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&3&-2&4&0\\0&0&-1&5&-1&0\\0&0&-2&10&-2&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&3&-2&4&0\\0&0&-1&5&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Следовательно, $rang\left(A\right)=2.$ Выберем в качестве базисных переменных x_2,x_3, а x_1,x_4,x_5 — свободные переменные. Положим $x_1=c_1;\ x_4=c_2;x_5=c_3.$ Разрешая преобразованные два уравнения системы относительно $x_2,x_3,$ получаем:

$$x_3=5x_4-x_5=5c_2-c_3;x_2=2x_1+3x_3-2x_4+4x_5=2c_1+13c_2+c_3.$$

Таким образом, общее решение системы можем записать так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\2c_1+13c_2+c_3\\5c_2-c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}= \tag{1.17}$$

$$=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3$$

где $X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix};X_2=\begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix};X_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ — ФСР системы.

Рассмотрим теперь неоднородную СЛАУ

$$AX=B, \tag{1.18}$$

где B — ненулевой столбец. Пусть $rang\left(A\right)=r$.

Имеет место **теорема**:

Общее решение неоднородной СЛАУ (1.18) имеет вид:

$$X=X_0+\sum_{k=1}^{n-r}c_kX_k, \tag{1.19}$$

где X_0 — какое-либо частное решение системы (1.18), а $X_1,X_2,...,X_{n-r}$ — ФСР соответствующей однородной СЛАУ; $c_1,c_2,...,c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Пример 27. Найдите общее решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=1\\4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=1\\2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=-1\end{cases}.$$

Решение. Эта система отличается от предыдущего примера только правой частью. Применяем метод Гаусса:

$$\left(A\middle|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&3&-2&4&1\\4&-2&5&1&7&1\\2&-1&1&8&2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&3&-2&4&1\\0&0&-1&5&-1&-1\\0&0&-2&10&-2&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&3&-2&4&1\\0&0&-1&5&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Эквивалентная система уравнений имеет трапециадальный вид, т.е. система совместная и неопределенная. Выберем за базисные переменные x_2, x_3 (как в предыдущем примере), а x_1, x_4, x_5 — свободные переменные. Положим $x_1 = c_1; x_4 = c_2; x_5 = c_3$. Разрешая последние два уравнения эквивалентной системы относительно x_2, x_3, получаем:

$$x_3 = 1+5x_4 - x_5 = 1+5c_2 - c_3; x_2 = -1+2x_1+3x_3-2x_4+4x_5 =$$
$$= 2+2c_1+13c_2+c_3.$$

Таким образом, общее решение системы можем записать так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\2+2c_1+13c_2+c_3\\1+5c_2-c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=$$
$$= X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3.$$

2. ЛИНЕЙНОЕ (ВЕКТОРНОЕ) ПРОСТРАНСТВО

2.1. Определение линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства (векторов). Размерность и базис линейного пространства. Координаты произвольного вектора в выбранном базисе

Определение. Множество V называется ***линейным (векторным) вещественным пространством***, если выполнены следующие 3 условия:

1) на множестве V определена операция сложения элементов, т.е. для $\forall x, y \in V \to z = x + y \in V$;
2) для элементов множества V определена операция умножения на вещественное число, т.е. для

$$\forall x \in V, \forall \alpha \in R \to y = \alpha x \in V;$$

3) приведенные операции удовлетворяют следующим требованиям (8 аксиомам линейного пространства):
   1^0. $\forall x, y \in V : x + y = y + x.$
   2^0. $\forall x, y, z \in V : (x + y) + z = x + (y + z).$
   3^0. $\exists \theta \in V$, что для $\forall x \in V : x + \theta = x$, ($\theta$ называется нулевым элементом).
   4^0. Для $\forall x \in V, \exists x' \in V$, такой, что $x + x' = \theta$, (x' называется элементом, противоположным x).
   5^0. Для $\forall x \in V : 1 \cdot x = x.$
   6^0. Для $(\forall x \in V), (\forall \alpha, \beta \in R) : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$
   7^0. Для $(\forall x \in V), (\forall \alpha, \beta \in R) : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$
   8^0. $(\forall x, y \in V), (\forall \alpha \in R) : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

Отметим, что если вместо R возьмем множество комплексных чисел z, то получаем ***комплексное линейное пространство***.

Ниже представим примеры линейных пространств.

Пример 28. V_1, V_2, V_3 — множества геометрических векторов (направленных отрезков) на прямой, плоскости и в пространстве с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число образуют вещественные линейные пространства. Нетрудно убедиться, соответствующие аксиомы 1–8 выполняются.

Пример 29. Множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $AX = \theta$ с n неизвестными, где A — квадратная матрица системы размерности $n \times n.$ Очевидно, что сумма двух решений, а также умножение решения на число снова приводят к решению однородной СЛАУ. Кроме того, выполняются все 8 аксиом линейного пространства.

Отметим, что множество решений неоднородной СЛАУ $AX = B, \left(B \neq \theta\right)$ не является линейным пространством хотя бы потому, что оно не содержит нулевого элемента ($X = \theta$ не является решением неоднородной СЛАУ).

Пример 30. Множество матриц H_n^m размерности $m \times n$ с введенными операциями сложения матриц и умножения на число является линейным пространством.

Пример 31. Обозначим через $R^n \equiv H_n^1$ — множество матриц-строк размерности $1 \times n,$ элементами которых являются конечные последовательности из n действительных чисел $x = \left(x_1; x_2; ...; x_n\right),$ $x_i \in R, \forall i = 1, ..., n$ с операциями сложения и умножения матриц на вещественное число λ:

$$x + y = \left(x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n\right), \lambda x = \left(\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n\right)$$

При этом аксиомы 1–8 линейных пространств выполняются, нулевой вектор будет иметь вид $\theta = \left(0; 0; ...; 0\right),$ а вектор, противоположный вектору x, имеет вид $-x = \left(-x_1; -x_2; ...; -x_n\right).$ Линейное пространство R^n еще называют **пространством арифметических векторов**. Аналогично можем ввести линейное пространство C^n строк размерности $1 \times n$ с комплексными элементами.

Пример 32. Множество многочленов $P_n(x)$ на множестве действительных чисел R (или на C) степени не выше n также является линейным пространством.

Пример 33. Множество $C(X)$ всех действительных функций, определенных и непрерывных на некотором множестве X, является линейным пространством:

$$\forall f, g \in C(X)$$
$$\text{и } \forall x \in X \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x); (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

При этом аксиомы 1–8 линейного пространства выполняются. Аналогично можно ввести $C^1(X), C^2(X), \ldots, C^n(X)$ — множества функций, имеющих непрерывные производные 1-го, 2-го и т.д. порядков соответственно, которые также являются линейными пространствами.

Пример 34. R^x — множество действительных функций, определенных на множестве X с операциями сложения и умножения на число, также является линейным пространством.

Свойства линейных пространств

1^0. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент θ.

2^0. Для $\forall x \in V$ существует единственный противоположный элемент x'.

3^0. Для $\forall x \in V : 0 \cdot x = \theta$.

4^0. Для противоположного элемента x' имеет место формула: $x' = (-1)x = -x$.

5^0. Для $\forall \alpha \in R : \alpha\theta = \theta$.

6^0. Разностью элементов $x, y \in V$ называют такой $z \in V$, что $y + z = x$. И это обозначают: $z = x - y$.

Определение. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства V называются ***линейно зависимыми***, если существует нетривиальная линейная комбинация: $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0, \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0 \right)$. В противном случае, элементы $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ называются ***линейно независимыми***.

Имеет место

Теорема. Для того, чтобы элементы $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих элементов был линейной комбинацией остальных.

Представим примеры линейно зависимых и независимых векторов.

Пример 35.

1. Два неколлинеарных вектора $x, y \in R^n$ линейно независимы: $x \neq c \cdot y$.
2. Три компланарных вектора $x, y, z \in R^3$ линейно зависимы: $c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0 \right)$.
3. Функции $f_1 = 2\sin^2 x, f_2 = 1, f_3 = 3\cos^2 x$ на отрезке $[a;b]$ линейно зависимы.
4. Матрицы (элементы пространства H_2^2) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — линейно независимы:
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = \theta \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Пример 36. Найдите вектор $\vec{x} \in R^3$ из уравнения $-3\vec{a} + \vec{x} + 4\vec{c} = -12\vec{a} + 15\vec{b} - 2\vec{c} - 2\vec{x}$, если $\vec{a} = (-4;0;2)$, $\vec{b} = (1;5;2)$ и $\vec{c} = (0;1;3)$.

Решение. Переносим слагаемые и приводим подобные члены:

$$3\vec{x} = -9\vec{a} + 15\vec{b} - 6\vec{c} \Rightarrow \vec{x} = -3\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c} = (-3;5;-2).$$

Пример 37. Исследуйте на линейную зависимость систему векторов из R^3:

а) $\vec{a}_1 = (4;0;0)$, $\vec{a}_2 = (0;-2;-5)$, $\vec{a}_3 = (-4;-2;-5)$;

б) $\vec{a}_1 = (3;3;3)$, $\vec{a}_2 = (5;-1;3)$, $\vec{a}_3 = (1;-3;-4)$.

Решение. Достаточно проверить наличие у векторного уравнения

а) $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 0\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 - 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$

нетривиального решения $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0.$ Находим определитель матрицы при неизвестных $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0,$ следовательно, согласно следствию правила Крамера, однородная СЛАУ имеет бесчисленное множество решений, а значит, существует нетривиальное решение $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0,$ т.е. векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы.

б) $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0,$

и потому однородная СЛАУ имеет единственное (тривиальное) решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$ т.е. векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы.

Пример 38. В пространстве R^4 даны 3 вектора: $\vec{a}(1;2;3;1)$, $\vec{b}(-1;1;4;5)$, $\vec{c}(-1;4;11;11)$. Будут ли они линейно зависимы? Дайте объяснение.

Решение. Проверяем наличие нетривиального решения $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$ у векторного уравнения

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 + 11\lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

Как известно, однородная СЛАУ всегда совместна (существует тривиальное решение). С другой стороны, $m < n$ (где $n = 4$ — количество неизвестных; $m = 3$ — число уравнений), т.е. система, согласно теореме Кронекера-Капелли, неопределенна, имеет бесчисленное множество решений. Следовательно, векторы $\overline{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

Определение. Совокупность элементов $e_1, e_2, ..., e_n \in V$ называется ***базисом линейного пространства V***, если:

1) элементы линейно независимы;
2) любой элемент $x \in V$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $e_1, e_2, ..., e_n \in R$:

$$\left(\forall x \in V\right)\left(\exists \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n \in R\right) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i e_i.$$

Последнее равенство называют разложением элемента x по базису $e_1, e_2, ..., e_n$, а числа $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$ называют ***координатами вектора*** x в выбранном базисе.

Имеют место:

Теорема 1. Разложение вектора x по данному базису единственно, т.е. существует единственный набор $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n \in R$ такой, что $x = \tilde{x}_1 e_1 + \tilde{x}_2 e_2 + ... + \tilde{x}_n e_n$.

Теорема 2. При сложении элементов линейного пространства их координаты в данном базисе складываются. При умножении элемента на число его координаты умножаются на это число.

2.2. Преобразование базиса и координат вектора (элемента ЛП) при изменении базиса. Матрица перехода к другому базису. Изоморфизм ЛП

Пусть в произвольном векторном пространстве V размерности n заданы два базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e'_1, e'_2, ..., e'_n$. Так как векторы $e'_1, e'_2, ..., e'_n \in V$, то их можно разложить по базису $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + ... + c_{n1}e_n \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{n2}e_n \\ .... \\ e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + ... + c_{nn}e_n \end{cases}, \qquad (2.1)$$

или $e'_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \left(i = 1, 2, ..., n\right).$

Матрицей перехода от «старого» базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к «новому» базису $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ называют матрицу

$$\underset{(n\times n)}{C} = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

столбцы которой образованы координатами разложений векторов e'_i по базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

Отметим, что матрица C невырожденная $\left(\det C \neq 0\right)$, поскольку векторы $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ линейно независимы.

Выведем формулу, которая связывает координаты произвольного вектора $x \in V$ в двух различных базисах:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + ... + x'_n e'_n, \tag{2.3}$$

где через x_i и x'_i обозначены координаты вектора $x \in V$ в двух базисах.

Подставляя в (2.3) разложения (2.1), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{m=1}^{n} x'_m e'_m = \sum_{m=1}^{n} x'_m \left(\sum_{k=1}^{n} c_{km} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{km} x'_m\right) e_k.$$

В силу единственности разложения вектора $x \in V$ по векторам базиса, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{m=1}^{n} c_{1m} x'_m = c_{11} x'_1 + c_{12} x'_2 + ... + c_{1n} x'_n \\ x_2 = \sum_{m=1}^{n} c_{2m} x'_m = c_{21} x'_1 + c_{22} x'_2 + ... + c_{2n} x'_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \sum_{m=1}^{n} c_{nm} x'_m = c_{n1} x'_1 + c_{n2} x'_2 + ... + c_{nn} x'_n \end{cases} \tag{2.4}$$

Если обозначить через X-матрицу-столбец (размерности $n \times 1$), состоящую из координат вектора x в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, а через X' — матрицу-столбец того же вектора a в базисе $e'_1, e'_2, ..., e'_n$, то последнюю формулу можем переписать так:

$$X = CX'.$$

Так как $\det C \neq 0$ (C — невырожденная матрица), то существует обратная матрица C^{-1} так, что

$$X' = C^{-1}X. \qquad (2.5)$$

Говорят, что между элементами множеств M и M' установлено взаимно однозначное соответствие, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие единственный элемент $x' \in M'$, и каждому $x' \in M'$ соответствует единственный элемент $x \in M$ и это записывают: $x \leftrightarrow x'$. Элемент x' при этом называется ***образом*** элемента x, а x — ***прообразом*** элемента x'.

Определение. Два линейных пространства V и V' (над одним и тем же числовым полем) называются ***изоморфными***, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее двум следующим условиям:

1^0. $x \leftrightarrow x'; y \leftrightarrow y' \Rightarrow x + y \leftrightarrow x' + y', \left(x, y \in V; x', y' \in V'\right)$.

2^0. $x \leftrightarrow x', \forall \alpha \in R \Rightarrow \alpha x \leftrightarrow \alpha x'$.

Взаимно однозначное соответствие элементов линейных пространств, удовлетворяющее условиям 1^0 и 2^0, называется ***изоморфизмом*** линейных пространств и обозначают: $V \leftrightarrow V'$.

Отметим, что если $V \leftrightarrow V'$, то и $\theta \leftrightarrow \theta'$, где θ, θ' — нулевые элементы пространств V, V' соответственно.

Имеет место **теорема**: два линейных пространства (над одним и тем же числовым полем) одинаковой размерности изоморфны, и, обратно, два изоморфных линейных пространства имеют одинаковые размерности.

Пример 39. Найдите координаты вектора x в базисе e_1', e_2', если известно его разложение в «старом» базисе $x = e_1 + e_2$, а также связь базисных векторов $\begin{cases} e_1' = 7e_1 + 4e_2 \\ e_2' = 5e_1 + 3e_2 \end{cases}$.

Решение. Находим матрицу перехода от «старого» базиса к «новому»: $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычисляем обратную матрицу:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

и по формуле (2.5) получаем:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = -2e_1' + 3e_2'$.

Пример 40. Вектор $x = (32; -4)$, заданный в стандартном базисе, разложите по базису

$$a_1(3; -2), a_2(5; 1).$$

Решение. Пусть x_1, x_2 — искомые координаты:

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2, \tag{2.6}$$

тогда

$$(32; -4) = (3x_1 + 5x_2; -2x_1 + x_2) \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 32 \\ -2x_1 + x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = 4.$$

Значит, $x = 4a_1 + 4a_2$.

Представим другой способ решения, основанный на понятии скалярного произведения, о котором речь пойдет ниже. Умножим последовательно (2.6) на a_1 и a_2:

$$\begin{cases} (x,a_1) = x_1(a_1,a_1) + x_2(a_2,a_1) \\ (x,a_2) = x_1(a_1,a_2) + x_2(a_2,a_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 104 = 13x_1 + 13x_2 \\ 156 = 13x_1 + 26x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = 4.$$

Пример 41. Вектор $a(14;-5;-13)$, заданный своими координатами в стандартном базисе R^3, разложите по базису векторов $c_1(1;-5;-2)$, $c_2(3;2;1), c_3(-1;-2;5)$.

Решение. Прежде всего следует обосновать, что векторы c_1, c_2, c_3 образуют базис, т.е. эти векторы линейно независимы. Для чего достаточно показать, что векторное уравнение $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$ имеет единственное тривиальное решение. Последнее условие выполняется, так как согласно правилу Крамера, определитель матрицы, составленной из координат векторов c_1, c_2, c_3, отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обозначим через t_1, t_2, t_3 искомые координаты вектора a в базисе c_1, c_2, c_3, тогда $a(14;-5;-13) = t_1 c_1 + t_2 c_2 + t_3 c_3 = t_1(1;-5;2) + t_2(3;2;1) +$ $+ t_3(-1;-2;5) = (t_1 + 3t_2 - t_3; -5t_1 + 2t_2 - 2t_3; -2t_1 + t_2 + 5t_3)$.

Последнее векторное равенство эквивалентно системе трех уравнений:

$$\begin{cases} t_1 + 3t_2 - t_3 = 14 \\ -5t_1 + 2t_2 - 2t_3 = -5 \\ -2t_1 + t_2 + 5t_3 = -13 \end{cases},$$

решение которой можно получить с помощью метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 14 \\ -5 & 2 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 5 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 14 \\ 0 & 17 & -7 & 65 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -100 & 200 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_3 = -2; t_2 = 3; t_1 = 3.$$

Итак, $a = 3c_1 + 3c_2 - 2c_3$.

Пример 42. При каких значениях параметра t произвольный вектор $x \in R^3$ можно разложить по векторам $a_1 = (1;4;3)$, $a_2 = (2;\,1-t;1)$, $a_3 = (5;4;1)$, заданным в стандартном базисе?

Решение.

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \Rightarrow \left(x_1; x_2; x_3\right) = \lambda_1(1;4;3) + \lambda_2(2;1-t;1) +$$
$$\lambda_3(5;4;1) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3; \lambda_1 + \left(1-t\right)\lambda_2 + 4\lambda_3; 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 \\ x_2 = \lambda_1 + \left(1-t\right)\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ x_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}.$$

Иначе говоря, требуется найти такие значения параметра t, при которых последняя система совместна, т.е.

$$\Delta = \left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1-t & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow t \ne -9/7.$$

Пример 43.

1 Пространство H_n^m матриц размерности $m \times n$ изоморфно пространству P_{mn-1} многочленов степени, не превосходящей $m \times n - 1$, так как оба пространства имеют размерность $m \times n$.

2 Пространство R^3 матриц — строк размерности 1×3 и пространство многочленов $P_n\left(x\right)$ степени не выше $2\left(n=2\right)$ изоморфны.

2.3. Линейное подпространство. Сумма и пересечение подпространств, их свойства. Линейная оболочка

Определение. Подмножество M элементов линейного пространства L называется ***подпространством*** пространства L, если выполнены следующие условия:

1) $\forall x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$;

2) $(\forall x \in M), (\forall \alpha \in R) \Rightarrow \alpha x \in M$.

Имеет место ***теорема:*** любое подпространство само является линейным пространством.

Пусть заданы элементы линейного пространства $x_1, x_2, ..., x_n \in V$.

Определение. ***Суммой*** $M_1 + M_2$ линейных подпространств M_1 и M_2 линейного пространства V называется совокупность всех $a \in V$, таких что $a = x + y$, где $x \in M_1, y \in M_2$. Если для каждого элемента $a \in V$ это разложение единственно, то сумма линейных подпространств M_1 и M_2 называют ***прямой*** и это записывается в виде $M_1 \oplus M_2$.

Определение. ***Пересечением*** $M_1 \cap M_2$ линейных подпространств M_1 и M_2 линейного пространства V называется совокупность всех $a \in V$, таких что $a \in M_1, a \in M_2$.

Свойства

1) Сумма и пересечение линейных подпространств являются линейными пространствами.
2) Размерность суммы линейных подпространств равна сумме размерностей линейных подпространств минус размерность их пересечения.

Определение. ***Линейной комбинацией*** элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ называется сумма $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Линейной оболочкой элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ называется множество всех линейных комбинаций этих элементов и обозначается $L(x_1, x_2, ..., x_n)$. При этом совокупность $x_1, x_2, ..., x_n$ называется порождающей системой линейной оболочки $L(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Имеет место **теорема**: линейная оболочка $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ является подпространством линейного пространства.

Определение. Пусть *M* — подпространство линейного пространства *V*, и элемент $x_0 \in V/M$. Рассмотрим множество *Г* всех элементов $y \in V$, представимых в виде $y = x_0 + x$, где $x \in M$. Множество *Г* называется ***гиперплоскостью***, полученной в результате сдвига подпространства *M* вдоль элемента x_0.

Пример 44. Найдите линейную оболочку $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и проверьте, принадлежит ли этой оболочке вектор $\vec{x}$, если $\vec{a} = (1,0), \vec{b} = (2,0), \vec{c} = (3,0), \vec{x} = (-3,7)$.

Решение. По определению, линейной оболочкой $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ считается любая комбинация вида $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$. Вопрос сводится к существованию решения $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ векторного уравнения: $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -3 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 = 7 \end{cases}.$

Последняя система, согласно методу Гаусса, несовместна. Следовательно, вектор $\vec{x}$ не принадлежит линейной оболочке $L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Пример 45. Найдите линейную оболочку множества решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Находим общее решение, а также фундаментальную совокупность решений данной СЛАУ. Ранг матрицы коэффициентов системы равен двум. Выберем свободные переменные x_2, x_4:

$x_2 = c_1; x_4 = c_2$. Тогда, разрешая систему относительно x_1 и x_3, получим:

$$x_3 = -c_2; x_1 = -x_2 + x_4 = -c_1 + c_2.$$

Мы получили общее решение однородной системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(c_1, c_2 X_2 \in R\right). \tag{2.7}$$

Следовательно, векторы $\vec{a} = \left(-1;1;0;0\right)$ и $\vec{b} = \left(1;0;-1;1\right)$ образуют фундаментальный набор решений однородной системы. Как следует из (2.7), любое решение системы является их линейной комбинацией, а значит, искомая линейная оболочка есть

$$L\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = c_1\vec{a} + c_2\vec{b}, \left(c_1, c_2 \in R\right).$$

2.4. Евклидово пространство, скалярное произведение и матрица метрических коэффициентов. Вычисление скалярного произведения в произвольном базисе. Неравенство Коши-Буняковского

Для описания таких понятий как длина вектора, угол между векторами вводится новая операция — скалярное произведение векторов линейного пространства.

Определение. ***Скалярным произведением*** на линейном пространстве V называют отображение (функцию, закон, правило), по которой каждой паре векторов (элементов) $x, y \in V$ ставится в соответствие некоторое действительное число $\left(x, y\right) \equiv x \cdot y \in R,$ и при этом выполняются 4 аксиомы:

1^0. $(x,y)=(y,x),(\forall x,y\in V)$;

2^0. $(x,y+z)=(x,y)+(x,z),(\forall x,y,z\in V)$;

3^0. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),(\forall\lambda\in R)(\forall x,y\in V)$;

4^0. $(x,x)\geq 0,(\forall x\in V)$, причем $(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta.$

Определение. ***Евклидовым пространством*** называют линейное пространство с заданным скалярным произведением.

Определение. ***Длиной (нормой)*** элемента x евклидова пространства называется неотрицательное число $\sqrt{(x,x)}$, и обозначается символом $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Углом между двумя ненулевыми векторами x и y называют угол φ такой, что

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|},(0\leq\varphi\leq\pi). \tag{2.8}$$

При таком определении угла между векторами необходимо убедиться в том, что выполняется неравенство

$$\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\leq 1\Rightarrow(x,y)\leq\|x\|\cdot\|y\|\Leftrightarrow(x,y)^2\leq\|x\|^2\|y\|^2,$$

или

$$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y). \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) называется ***неравенством Коши-Буняковского***.

Докажем справедливость последнего неравенства. Действительно, рассмотрим неотрицательное число

$$f(t)=(x+ty,x+ty)=(x,x)+2t(x,y)+t^2(y,y)=$$
$$=t^2\|y\|^2+2t(x,y)+\|x\|^2\geq 0. \tag{2.10}$$

Здесь мы использовали свойства скалярного произведения, а $t \in R$ — произвольное число. Условие (2.10) справедливо для $\forall t \in R,$ если относительно дискриминанта последнего квадратного трехчлена выполнено требование

$$D \equiv 4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0 \Rightarrow (x,y)^2 \le \|x\|^2\|y\|^2.$$

Отметим очевидные свойства нормы элемента:

1^0. $\|x\| \ge 0, (\forall x \in V),$ причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$

2^0. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, (\forall x \in V), (\forall \lambda \in R);$

3^0. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Определение. Векторы x и y называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю: $(x,y) = 0.$

Пример 46. В линейном пространстве $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на $[a,b],$ скалярное произведение можно задать формулой

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Покажите, что все четыре аксиомы скалярного произведения будут выполнены.

Решение. Представим результаты проверки:

1^0. $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = (g,f);$

2^0. $(f,g+\varphi) = \int_a^b f(t)\big(g(t)+\varphi(t)\big)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt +$

$$+\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = (f,g) + (f,\varphi);$$

3^0. $(\lambda f,g) = \int_a^b \lambda f(t)g(t)dt = \lambda\int_a^b g(t)f(t)dt = \lambda(f,g);$

4^0. $(f,g)=\int\limits_a^b f^2(t)dt \geq 0$, причем $\int\limits_a^b f^2(t)d=0 \Leftrightarrow f(t)\equiv 0$.

В пространстве R^n арифметических векторов определим скалярное произведение двух векторов $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $y=(y_1;y_2;...;y_n)$ формулой

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

При этом норма (длина) элемента принимает вид

$$\|x\|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_n{}^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при таком способе задания скалярного произведения стандартный базис R^n $e_1=(1;0;...;0)$, $e_2=(0;1;0;...;0),...,e_n=(0;0;...;0;1)$ является ортогональным.

Пример 47. В стандартном базисе пространства R^2 заданы векторы $a=(3;-2)$ и $b=(3;-3)$. Найдите вектор $x\in R^2$, если известно, что $(x;a)=5,(x;b)=6$.

Решение. Обозначим $x=x_1e_1+x_2e_2$. Тогда,

$$\begin{cases}(x,a)=(x_1;x_2)\cdot(3;-2)=3x_1-2x_2=5\\(x,b)=(x_1;x_2)\cdot(3;-3)=3x_1-3x_2=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\end{cases}.$$

Следовательно, в стандартном базисе вектор x имеет вид $x=e_1-e_2=(1;-1)$.

Пример 48. Найдите вектор $x\in R^4$, если известно, что $(x,a)=6$, $x=\lambda b$, и заданы векторы a и b в стандартном базисе: $a=(-1;-2;-1;3)$, $b=(2;1;-2;0)$.

Решение. Обозначим $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$. Тогда,

$$\begin{cases} (x,a) = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x = \lambda b \Rightarrow x_1 = 2\lambda; x_2 = \lambda; x_3 = -2\lambda; x_4 = 0\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -3; x_1 =$$

$$= -6; x_2 = -3; x_3 = 6; x_4 = 0.$$

Ниже представим формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов $x, y \in V$ в произвольном базисе $e_1, e_2, ..., e_n \in V$ евклидова пространства. Ограничимся рассмотрением евклидова пространства размерности $\dim V = 3.$ Пусть известны скалярные произведения векторов базиса, т.е. знаем числа

$$g_{ij} = (e_i, e_j), (i, j \in \{1,2,3\}) \tag{2.11}$$

Как следует из аксиом скалярного произведения,

$$g_{11} = (e_1, e_1) > 0, g_{22} = (e_2, e_2) > 0, g_{33} = (e_3, e_3) > 0, g_{12} = g_{21}, g_{13} =$$
$$= g_{31}, g_{23} = g_{32}.$$

В результате матрица скалярных произведений $G = (g_{ij})$ оказывается симметрической: $G^T = G.$

Определение. Числа g_{ij} называются метрическими коэффициентами, а матрица $G = (g_{ij}),$ составленная из метрических коэффициентов, называется матрицей Грина.

Рассмотрим теперь два произвольных вектора трехмерного евклидова пространства $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ и $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3.$

Найдем скалярное произведение этих векторов, воспользовавшись аксиомами скалярного произведения:

$$(x, y) = (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j,$$

или кратко, в матричном виде:

$$(x,y)=(x_1;x_2;x_3)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=X^T GY, \qquad (2.12)$$

где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$

Из положительности скалярного произведения следует, что для всех элементов (векторов) $x \neq \theta$ выполняется условие

$$(x,x)=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}x_i x_j > 0. \qquad (2.13)$$

Условие (2.13) означает положительную определенность квадратичной формы. Как известно, это условие выполняется, если только

$$\Delta_1 = g_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0. \qquad (2.14)$$

Условия (2.14) определяют дополнительные требования, накладываемые на метрические коэффициенты g_{ij}.

В общем случае произвольного евклидова пространства, когда $\dim V = n,$ скалярное произведение любых векторов x и y пространства определяется формулой

$$(x,y)=X^T GY=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_i y_j, \qquad (2.15)$$

причем для угловых миноров матрицы метрических коэффициентов

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

2.5. Ортогональный базис, метод ортогонализации. Ортонормированный базис. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение. Линейные отображения, образ, ранг, ядро, дефект отображения

Определение. Базис евклидова пространства $e_1, e_2, ..., e_n$ называется ***ортогональным***, если

$$g_{ij} = \left(e_i, e_j\right) = 0 \text{ для всех } i \neq j.$$

Базис евклидова пространства $e_1, e_2, ..., e_n$ называется ***нормированным***, если длина любого вектора базиса равна единице:

$$\|e_i\| = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\left(e_i, e_i\right)} = 1, \left(i = 1, 2, ..., n\right).$$

Ортогональный и нормированный базис пространства называется ***ортонормированным*** базисом.

Итак, для векторов ортонормированного базиса имеем:

$$g_{ij} = \left(e_i, e_j\right) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = E, \left(i, j = 1, 2, ..., n\right).$$

Норма элемента x, заданного в ортонормированном базисе, и косинус угла между двумя ненулевыми векторами имеют вид:

$$\|x\| = \sqrt{\left(x, x\right)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{\left(x, y\right)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}}.$$

Рассмотрим пространство арифметических векторов R^n и определим в этом пространстве скалярное произведение двух векторов $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ и $y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$ формулой

$$\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n. \tag{2.16}$$

При таком способе задания скалярного произведения стандартный базис пространства R^n

$$e_1=\left(1,0,0,...,0\right),e_2=\left(0,1,0,...,0\right),...,e_n=\left(0,0,0,...,1\right)$$

является ортонормированным:

$$\left(e_i,e_j\right)=0\cdot 0+0\cdot 0+...1\cdot 0+...+0\cdot 1+...+0\cdot 0=0,\left(i\neq j\right);$$
$$\left\|e_i\right\|=\sqrt{\left(e_i,e_i\right)}=\sqrt{0\cdot 0+0\cdot 0+...1\cdot 1+...+0\cdot 0}=1\,.$$

В произвольном евклидовом пространстве имеются различные ортонормированные базисы. Изложим алгоритм построения ортонормированного базиса, для этого приведем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $e_1,e_2,...,e_n$ — ортонормированный базис, а вектор $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_me_m+...+x_ne_n$, где $x_i=\left(x,e_i\right)$. Тогда вектор $u=x-x_1e_1-x_2e_2-...-x_me_m$ будет ортогонален первым m векторам базиса, т.е. векторам $e_1,e_2,...,e_m$.

Действительно, умножая скалярно вектор u на вектор $e_i,\left(1,2,...,m\right)$, получим:

$$\left(u,e_i\right)=\left(x,e_i\right)-x_1\left(e_1,e_i\right)-x_2\left(e_2,e_i\right)-...-x_i\left(e_i,e_i\right)-...-x_m\left(e_m,e_i\right)=$$

$=\left(x,e_i\right)-x_i\left(e_i,e_i\right)=x_i-x_i=0$, что и подтверждает справедливость леммы.

Теперь представим алгоритм процесса ортогонализации на примере произвольного неортонормированного базиса ν_1,ν_2,ν_3,ν_4 четырехмерного евклидова пространства:

1) на первом шаге нормируем вектор ν_1, разделив его на его длину, и получим первый единичный вектор искомого ортонормированного базиса $e_1 = \frac{\nu_1}{\|\nu_1\|}$;
2) на втором шаге постоим вектор u_2, ортогональный вектору e_1: $u_2 = \nu_2 - \alpha_1 e_1$, где $\alpha_1 = (\nu_2, e_1)$, а затем пронормируем его: $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$;
3) на следующем этапе введем третий вектор u_3, ортогональный векторам e_1 и e_2: $u_3 = \nu_3 - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2$, где $\beta_1 = (\nu_3, e_1)$, $\beta_2 = (\nu_3, e_2)$, и затем нормируем его: $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$;
4) на последнем шаге построим вектор u_4, ортогональный векторам e_1, e_2, e_3: $u_4 = \nu_4 - \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2 - \gamma_3 e_3$, где $\gamma_i = (\nu_4, e_i)$, $(i = 1, 2, 3)$. И нормируем его: $e_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|}$.

В результате мы перешли от произвольного неортонормированного базиса $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ четырехмерного евклидова пространства к ортонормированному базису e_1, e_2, e_3, e_4.

Пример 49. Методом ортогонализации постройте ортонормированный базис по заданному базису евклидова пространства R^2 $\nu_1 = (1;1), \nu_2 = (1;2)$.

Решение. Нормируем ν_1 и получаем первый единичный вектор искомого ортонормированного базиса:

$$e_1 = \frac{\nu_1}{\|\nu_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Построим вектор $u_2 = \nu_2 - \alpha e_1$ так, чтобы выполнялось равенство:

$$\left(u_2,e_1\right)=0\Rightarrow\left(\nu_2-\alpha e_1,e_1\right)=\left(\nu_2,e_1\right)-\alpha\left(e_1,e_1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=\left(\nu_2,e_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot2=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Находим u_2: $u_2=\nu_2-\alpha e_1=\left(1;2\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$

Нормируем u_2 и получаем второй вектор искомого ортонормированного базиса:

$$e_2=\frac{u_2}{\left\|u_2\right\|}=\frac{1}{\left(1/\sqrt{2}\right)}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Определение. ***Ортогональным дополнением*** к подпространству M_1 евклидова пространства V называется совокупность всех элементов пространства V, ортогональных M_1, и обозначается символом $M_1^{\perp}=\left\{y\middle|y\in V;\left(x,y\right)=0;\forall x\in M_1\right\}$.

Говорят, что пространство V представляет ***прямую сумму*** подпространств M_1 и M_2, если для $\forall x\in V$ имеет место единственное представление в виде суммы: $x=x_1+x_2, x_1\in M_1, x_2\in M_2$ и это обозначают $M_1\oplus M_2$.

В частности, для $\forall x\in V$ имеет место единственное представление в виде суммы: $x=x_1+x_2,\ x_1\in M_1,\ x_2\in M_1^{\perp}$, т.е. $V=M_1\oplus M_1^{\perp}$.

Пример 50. Среди решений системы $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=-1\\2x_1+2x_2+x_3=-1\end{cases}$ найдите те, которые ортогональны вектору $\vec{a}\left(1;2;3\right)$ относительно скалярного произведения.

Решение. Найдем сперва общее решение системы, воспользовавшись методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Примем в качестве свободной переменной x_3, и положим $x_3 = c.$ Тогда, из уравнений системы получаем:

$$x_2 = -\frac{1}{2}(3x_3 + 1) = -\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}, x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 1 = 0.$$

Итак, получили общее решение системы:

$$(x_1; x_2; x_3) = \left(c; -\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}; c\right).$$

Постоянную c найдем из условия ортогональности:

$$(x, \vec{a}) = \left(c; -\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}; c\right) \cdot (1; 2; 3) = c + 2\left(-\frac{3}{2}c - \frac{1}{2}\right) - 3c = c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1.$$

Следовательно, $(x_1; x_2; x_3) = (1; -2; 1).$

Пример 51. Подтвердите, что векторы $a_1 = (3; -2; 1)$, $a_2 = (-2; 2; 10)$; $a_3 = (-22; -32; 2)$, заданные своими координатами в стандартном базисе, образуют ортогональный базис пространства R^3, и найдите в нем координаты вектора $x = (-3; -3; -3)$.

Решение. Нетрудно убедиться в том, что $(a_1, a_2) = (a_1, a_3)$ $= (a_2, a_3) = 0,$ т.е. векторы взаимно ортогональны и образуют базис в R^3. Находим координаты $(x_1; x_2; x_3)$ вектора x в этом базисе:

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \Rightarrow \begin{cases} (x, a_1) = x_1 (a_1, a_1) \\ (x, a_2) = x_2 (a_2, a_2), \\ (x, a_3) = x_3 (a_3, a_3) \end{cases}$$ откуда следует, что

$$x_1 = \frac{(x, a_1)}{\|a_1\|^2} = -\frac{2}{14}; \; x_2 = \frac{(x, a_2)}{\|a_2\|^2} = -\frac{5}{18}; \; x_3 = \frac{(x, a_3)}{\|a_3\|^2} = \frac{156}{1512}.$$

Пример 52. Найдите координаты вектора $x=(3;-2;-1)$ в ортогональном базисе $a_1=(0;2;1), a_2=(3;2;-4); a_3=(-10;3;-6)$ пространства R^3.

Решение. $x=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3 \Rightarrow \begin{cases}(x,a_1)=x_1(a_1,a_1)\\(x,a_2)=x_2(a_2,a_2),\\(x,a_3)=x_3(a_3,a_3)\end{cases}$ откуда следует, что

$$x_1=\frac{(x,a_1)}{\|a_1\|^2}=\frac{0-4-1}{0+4+1}=-1;\ x_2=\frac{(x,a_2)}{\|a_2\|^2}=\frac{9-4+4}{9+4+16}=\frac{9}{29};$$

$$x_3=\frac{(x,a_3)}{\|a_3\|^2}=\frac{-30-6+6}{100+9+36}=-\frac{6}{29}.$$

Пример 53**.** В пространстве R^3 даны векторы $\vec{a}_1=(2;3;0)$ и $\vec{a}_2=(-3;2;1)$. Найдите третий вектор $\vec{a}_3$ такой, чтобы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ образовали ортогональный базис. Нормируйте векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ и представьте соответствующий ортонормированный базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

Решение. По условию, $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$, т.е. векторы ортогональны. Выберем третий, перпендикулярный им вектор, согласно векторному произведению, $\vec{a}_3=\pm(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)=\pm\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&0\\-3&2&1\end{vmatrix}=\pm(3;-2;13)$.

Заметим, что в данной задаче мы обошлись без применения метода ортогонализации.

Пример 54. Докажите обобщенную теорему Пифагора: если векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортогональны, то $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.

Доказательство. По условию, $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{v},\vec{u})=0,$ следовательно, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2(\vec{u},\vec{v})+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.

Пример 55. Докажите неравенство треугольника: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le$ $\le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Решение. Так как $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{u},\vec{v}\ )}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \le 1$, то $(\vec{u},\vec{v}\ ) \le \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$, следовательно, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u},\vec{v}\ ) + \|\vec{v}\|^2 \le \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2$, откуда и следует искомое неравенство.

Пример 56. Докажите «равенство параллелограмма»: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 +$ $+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.

Решение. Складывая два очевидных равенства:

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u},\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$ и $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u},\vec{v}\ ) + \|\vec{v}\|^2$, получим искомое равенство.

В начале главы мы ввели понятие матрицы перехода от «старого» базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к «новому» базису $e'_1, e'_2, ..., e'_n$:

$$\underset{(n\times n)}{C} = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

которая устанавливает связь между координатами произвольного вектора x в «старом» и «новом» базисах:

$$X = CX', \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_1 \\ \dots \\ x'_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.17)$$

Предположим, что линейное пространство является евклидовым. Тогда скалярное произведение (x,x), как следует из (2.15), можно записать следующим образом:

$$(x,x) = X^T G X, \tag{2.18}$$

где G — матрица метрических коэффициентов базиса $e_1, e_2, ..., e_n$.

Подставим (2.16) в (2.17), и учитывая свойство операции транспонирования, получим:

$$(x,x) = (CX')^T GCX' = (X')^T C'GCX' = (X')^T G'X', \tag{2.19}$$

где через G' обозначена матрица метрических коэффициентов «нового» базиса $e'_1, e'_2, ..., e'_n$. Таким образом, мы нашли связь между матрицами G и G' в «старом» и «новом» базисах:

$$G' = C^T G'C. \tag{2.20}$$

Предположим, что оба базиса, «старый» и «новый», ортонормированы. И поскольку в ортонормированных базисах матрицы метрических коэффициентов G и G' являются единичными, то последнее равенство можно переписать так:

$$G' = E = C^T EC \Rightarrow E = C^T C. \tag{2.21}$$

Определение. Матрица C перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется ***ортогональной матрицей***.

Из (2.21) следует, что матрица, обратная к ортогональной матрице C, совпадает с транспонированной матрицей C^T:

$$C^{-1} = C^T. \tag{2.22}$$

Отметим, что ортогональную матрицу можно определять также и равенством (2.22).

Итак, мы можем сформулировать следующую теоремы.

Теорема. Для того, чтобы матрица была ортогональной, необходимо и достаточно выполнение одного из условий:

1) $CC^T = E$;

2) $C^{-1} = C^T$.

Отметим, что определитель ортогональной матрицы равен $\pm 1 (\det C = \pm 1)$:

$$\left|CC^T\right| = |C|\left|C^T\right| = |C|^T = |E| = 1.$$

Сделаем одно ***замечание***. Если исходный («старый») базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ является ортонормированным $(G = E)$ и матрица перехода C ортогональна $\left(C^{-1} = C^T\right)$, то матрица метрических коэффициентов «нового» базиса также будет единичной

$$G' = C^T EC = C^T C = E,$$

и потому «новый» базис $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ будет ортонормированным.

Определение. Ортогональная матрица C называется ***собственной***, если ее определитель $\det C = 1$.

Определение. Отображением ЛП V в ЛП W называется правило $\hat{A}$, по которому для $\forall x \in V$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in W$ и это записывается: $y = \hat{A}(x)$, где $\hat{A}$ — оператор отображения. Отметим, что частным случаем отображения является функция $y = f(x)$.

Отображение $y = \hat{A}(x)$ называется линейным, если для $\forall x_i \in V$ и для $\forall \lambda \in R$:

1. $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}(x_1) + \hat{A}(x_2)$;
2. $\hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}(x)$.

Отображение, переводящее линейное пространство в самого себя $(V = W)$, называют **линейным преобразованием (или линейным оператором)**. Отметим частный случай линейного отображения — линейный **функционал**, заданный на произвольном линейном множестве $\hat{A}: V \to R$ и имеющее областью значений множество вещественных (либо комплексных) чисел:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in V : \hat{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \hat{A}(x) + \beta \hat{A}(y).$$

Примеры линейных функционалов:

1. Скалярное произведение с фиксированной функцией $\varphi(x)$: $\hat{A}(f) = \int\limits_{(\Omega)} f(x)\varphi(x)\,dx;$
2. $\hat{A}(f) = \int\limits_{(\Omega)} Lf(x)\,dx,$
   где L — линейный оператор, действующий на функцию $f(x)$; Ω — область интегрирования.
3. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx;$
4. $\int\limits_1^2 \left[5f''(x) + 2f'(x) + 3f(x)\right]dx;$
5. $\hat{A}(f) = f(1) - f(0);$
6. $\hat{A}(f) = f''(x)\big|_{x=0}.$

Приведем другие примеры линейных отображений.

1. $\underset{(m\times 1)}{Y} = \underset{(m\times n)}{\hat{A}} \cdot \underset{(n\times 1)}{X}, \left(V \equiv R^n, W \equiv R^m\right)$ — отображение, которое каждой матрице-столбцу $\underset{(n\times 1)}{X} \in R^n$ ставит в соответствие матрицу-столбец $\underset{(m\times 1)}{Y} \in R^m$;
2. $\underset{(m\times 1)}{Y} = \alpha \cdot \underset{(m\times 1)}{X}, (\alpha \in R)$ — отображение подобия.

Определение. Образом $\left(\boldsymbol{im\hat{A}}\right)$ линейного отображения $\hat{A}$ называется множество элементов пространства $y \in R^m$, для которых существует $x \in R^n$ такой, что $\hat{A}(x) = y$.

Рангом линейного отображения называется размерность образа этого отображения.

Ядром $\left(\boldsymbol{ker\hat{A}}\right)$ линейного отображения $\hat{A}$ называется множество всех элементов пространства $x \in R^n$, каждый из которых отображение $\hat{A}$ переводит в нулевой элемент $y = \theta$ пространства R^m.

Дефектом $\left(\boldsymbol{der\hat{A}}\right)$ линейного отображения называется размерность этого отображения.

Имеет место

Теорема. Образ и ядро линейного отображения являются линейными подпространствами соответственно пространств R^m и R^n.

Пример 57. Линейный оператор $\hat{A}$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ в некотором базисе векторного пространства R^3. Найдите базис ядра и размер дефекта оператора.

Решение. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3) \in ker\hat{A}$ — элемент ядра оператора $\hat{A}$, т.е. $\hat{A}(x) = \theta \Rightarrow A \cdot X = \theta$, или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем последнюю систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, (c \in R).$$

Совокупность векторов x составляет подпространство решений уравнения $\hat{A}(x) = \theta$, а значит, есть ядро оператора $\hat{A}$. В качестве базиса можем выбрать вектор $y=(7;5;1)^T$, при этом размерность дефекта оператора равна единице.

2.6. Линейные операторы в векторном пространстве, матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Как отметили выше, ***линейным оператором*** $\hat{A}$ (или ***линейным преобразованием*** векторного пространства V) называется такое отображение, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие единственный вектор $y=\hat{A}(x) \in V$, если это отображение удовлетворяет следующим условиям:

1) $\hat{A}(x_1+x_2)=\hat{A}(x_1)+\hat{A}(x_2), (\forall x_1, x_2 \in V)$;

2) $\hat{A}(\lambda x)=\lambda \hat{A}(x), (\forall x \in V), (\forall \lambda \in R)$.

Вектор $y=\hat{A}(x)$ называют ***образом*** вектора x, а сам вектор x — ***прообразом*** вектора y.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ — некоторый базис пространства V, а $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$ — произвольный вектор из V. В силу линейности оператора $\hat{A}$ имеем:

$$y=\hat{A}(x)=\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{A}(e_i). \qquad (2.23)$$

Разложим вектор $\hat{A}(e_i) \in V$ по базису:

$$\hat{A}(e_i)=\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \Rightarrow y=\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i\right) e_k, \qquad (2.24)$$

где a_{ki} — координаты вектора $\hat{A}(e_i)$ в выбранном базисе. С другой стороны, разложим таким же образом и вектор $y \in V$: $y=\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, и сравнивая последнее с (2.24), получаем:

$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i, (k = 1, 2, ..., n),$ или в матричном виде

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.25)$$

Определение. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.*** Отметим, что базисные векторы преобразуются с помощью столбцов матрицы *A*, а координаты произвольного вектора — с помощью строк матрицы *A*.

Пример 58. Линейное преобразование в R^3 с базисом e_1, e_2, e_3 задано образами векторов базиса:

$$\begin{cases} \hat{A}(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3, \\ \hat{A}(e_2) = 3e_1 + e_2 + 3e_3, \\ \hat{A}(e_3) = -e_1 + 2e_3. \end{cases}$$

Составьте матрицу линейного оператора и найдите образ $y = \hat{A}(x)$ вектора $x = 2e_1 + 3e_2 - e_3$.

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&1&0\\1&3&2\end{pmatrix}\Rightarrow Y=AX\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&1&0\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\\9\end{pmatrix},$$

$y=A(x)=12e_1+7e_2+9e_3.$

Пример 59. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис в двумерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим преобразование поворота на плоскости вокруг центра O на угол φ, при котором связь между векторами «нового» и «старого» базисов имеет вид:

$$\begin{cases}e_1'=\cos\varphi e_1+\sin\varphi e_2\\ e_2'=-\sin\varphi e_1+cos\varphi e_2\end{cases},$$

причем матрица линейного преобразования

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\ \sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица A_φ является ортогональной $\left(A^{-1}{}_\varphi=A^T{}_\varphi\right)$ и собственной $\left(\left|A_\varphi\right|=1\right)$, при этом ортогональная матрица сохраняет ориентацию базиса. Координаты образа $y=\hat{A}(x)$ произвольного вектора y можем найти из соотношений:

$$Y=A_\varphi X\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi\\ y_2=x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi\end{cases}.$$

Действия с линейными операторами

1^0. Суммой двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называют оператор $\hat{A}+\hat{B}$, определяемый равенством

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)(x)=\hat{A}(x)+\hat{B}(x).$$

2^0. Произведение оператора $\hat{A}$ называют оператор

$$\left(\lambda\hat{A}\right)(x) = \lambda\hat{A}(x).$$

3^0. Нулевым оператором $\hat{0}$ называют оператор

$$\hat{0}(x) = \theta, \left(\forall x \in R\right).$$

Отметим, что множество линейных операторов на V с заданными операциями сложения и умножения на число является линейным пространством.

4^0. Если операторам $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в некотором базисе линейного пространства соответствуют матрицы A и B, то оператору $\hat{A}+\hat{B}$ будет соответствовать сумма матриц $A+B$, а оператору $\lambda\hat{A}$ — матрица λA.

5^0. Пусть даны два оператора $\hat{A}: V \to V$ и $\hat{B}: V \to V$. Произведением (композицией) двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называют третий оператор $\hat{C} = \hat{B}\bullet\hat{A}$ такой, что для $\forall x \in V$

$$\hat{C}(x) = \hat{B}\left(\hat{A}(x)\right).$$

Композиции операторов соответствует матрица $C = BA$. Роль единицы при умножении операторов выполняет тождественный оператор $\hat{E}$ такой, что $\hat{E}(x) = x$ для $\forall x \in V$. При этом тождественному оператору соответствует единичная матрица E.

6^0. Для любых операторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

6.1. $\hat{A}\bullet\left(\hat{B}\bullet\hat{C}\right) = \left(\hat{A}\bullet\hat{B}\right)\bullet\hat{C}$;

6.2. $\hat{A}\bullet\left(\hat{B}+\hat{C}\right) = \hat{A}\bullet\hat{B} + \hat{A}\bullet\hat{C}, \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\bullet\hat{C} = \hat{A}\bullet\hat{C} + \hat{B}\bullet\hat{C}$;

6.3. $\left(\lambda\hat{A}\right)\bullet\hat{B} = \hat{A}\bullet\left(\lambda\hat{B}\right) = \lambda\left(\hat{A}\bullet\hat{B}\right), \left(\forall\lambda \in R\right)$;

6.4. $\left(\lambda\hat{E}\right)\bullet\hat{A} = \hat{A}\bullet\left(\lambda\hat{E}\right), \left(\forall\lambda \in R\right)$.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть A есть матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, A' — матрица того же оператора $\hat{A}$ в «новом» базисе $e'_1, e'_2, ..., e'_n$, C — матрица перехода от «старого» базиса к «новому». Имеет место

Теорема. Матрицы A и A' линейного оператора $\hat{A}$ в базисах $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ соответственно связаны равенством

$$A' = C^{-1}AC \qquad (2.26)$$

Действительно,

$$Y = AX \Rightarrow (CY') = A(CX') \Rightarrow Y' = C^{-1}(ACX') =$$
$$= (C^{-1}AC)X' \Leftrightarrow A' = C^{-1}AC.$$

Пример 60. В базисе e_1, e_2 двумерного пространства линейный оператор $\hat{A}$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу A' оператора $\hat{A}$ в базисе e'_1, e'_2, связанным со «старым» базисом соотношениями $e'_1 = e_1 - 2e_2, e'_2 = 3e_1 + e_2$.

Решение. Находим матрицу перехода:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \det C = 7,$ и далее обратную матрицу:

$C^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$

откуда получаем:

$$A' = C^{-1}AC = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 61. Линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисе e_1, e_2, e_3. Найдите матрицу оператора в новом базисе e_1', e_2', e_3', связанном со «старым» базисом матрицей перехода

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу, обратную матрице перехода:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица линейного оператора в новом базисе:

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 3 \\ -9 & -3 & 4 \\ -18 & -11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что $|A| = |A'| = 7,$ т.е. определитель матрицы оператора не изменился при переходе к другому базису.

2.7. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора в векторном пространстве. Самосопряженные (симметрические) операторы. Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора

Определение. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором линейного оператора*** $\hat{A}$, если существует число $\lambda \in R$, такое что

$$\hat{A}x = \lambda x, \left(x \neq \theta\right). \qquad (2.27)$$

Число λ называется ***собственным значением оператора*** $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору x.

Отметим, что изучение собственных векторов и собственных значений представляет особый интерес ввиду того, что многие соотношения, содержащие линейный оператор, сильно упрощаются, если в качестве векторов базиса выбрать собственные векторы оператора (так обстоит дело в вопросах приведения квадратичной формы к сумме квадратов, преобразования матриц к диагональному виду и др.).

Пусть оператор $\hat{A}$ задан в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (2.27) можем переписать в матричном виде:

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX = \lambda EX \Rightarrow \left(A - \lambda E\right)X = 0, \qquad (2.28)$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в виде однородной системы

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{n2}x_2 + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Система (2.29) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\det(A-\lambda E) \neq 0. \tag{2.30}$$

При этом определитель

$$\det(A-\lambda E) = |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

представляет собой многочлен степени n относительно λ.

Определение. Многочлен $\det(A-\lambda E)$ называется ***характеристическим многочленом оператора*** $\hat{A}$, а корни этого многочлена, т.е. решения уравнения (2.30), называются характеристическими корнями оператора $\hat{A}$.

Имеют место

Теорема 1. Характеристический многочлен $|A-\lambda E|$ не зависит от выбора базиса пространства.

Теорема 2. Собственные векторы x_i, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_i\left(i=1,2,...,n\right)$ линейно независимы.

Теорема 2 фактически означает, что в том случае, когда линейный оператор $\hat{A}$ имеет n различных собственных значений, принадлежащие этим собственным значениям собственные векторы можно выбрать в качестве базиса n — мерного линейного пространства.

Следующая теорема показывает, какой вид будет иметь матрица A линейного оператора $\hat{A}$ в базисе из собственных векторов.

Теорема 3. Для того, чтобы матрица A линейного оператора $\hat{A}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы векторы базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ были собственными векторами этого оператора.

Пример 62. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе двумерного пространства матрицей

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2-9\lambda+14=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\left[\begin{matrix}2\\ 7\end{matrix}\right..$$

Координаты собственного вектора $x^{(1)}=\left(x_1;x_2\right)$, принадлежащего собственному значению $\lambda_1=2$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases}\left(4-\lambda_1\right)x_1+3x_2=0\\ 2x_1+\left(5-\lambda_1\right)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+3x_2=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_2=c_1, x_1=$$

$$=-\frac{3}{2}c_1,\left(c_1\neq 0, c_1\in R\right).$$

Так, мы получили первый собственный вектор

$$x^{(1)}=\left(-\frac{3}{2}c_1;c_1\right)=c_1\left(-\frac{3}{2};1\right).$$

Найдем координаты второго собственного вектора $x^{(2)}$, принадлежащего собственному значению $\lambda_2=7$:

$$\begin{cases}(4-\lambda_2)x_1+3x_2=0\\2x_1+(5-\lambda_2)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x_1+3x_2=0\\2x_1-2x_2=0\end{cases}\Rightarrow x^{(2)}=(c_2;c_2)=$$

$$=c_2(1;1),(c_2\neq 0,c_2\in R).$$

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$ в вещественном евклидовом пространстве V называется ***самосопряженным***, если для любых двух векторов $x,y\in V$ выполняется равенство скалярных произведений:

$$\left(\hat{A}x,y\right)=\left(x,\hat{A}y\right).$$

Самосопряженные операторы выполняют особую роль в преобразованиях билинейных и квадратичных форм. Имеют место

Теорема 1. Для того, чтобы линейный оператор $\hat{A}$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в ортонормированном базисе пространства матрица A оператора была симметрической.

Теорема 2. В любом евклидовом вещественном пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица A самосопряженного оператора имеет диагональный вид:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Отметим несколько важных **свойств самосопряженных операторов**:

- все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами;
- собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям этого оператора, ортогональны.

Пример 63. В некотором базисе задана матрица линейного оператора $\hat{A}: A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Укажите базис пространства, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид, и запишите матрицу A' в новом базисе.

Решение. Находим собственные значения матрицы, совпадающие с корнями характеристического уравнения:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6-\lambda)\left(\lambda^2 - 12\lambda + 27\right) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = \left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{matrix}\right.$$

Поскольку все собственные значения различны, а матрица A симметрическая, то оператор $\hat{A}$ самосопряженный и соответствующие собственные векторы будут взаимно ортогональны. Найдем, согласно (2.29), собственные векторы, соответствующие собственным значениям матрицы:

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (5-\lambda)x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0\cdot x_2 + (7-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Полагая в последней системе $\lambda = \lambda_1 = 6,$ получим:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 0. \\ 2x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Гаусса:

$$\overline{A} = \left(A|B\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

откуда получаем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c/2 \\ c \\ c \end{pmatrix}, \left(c \in R, c \neq 0\right).$$

Выберем $c = 2,$ в результате получим один из собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_1 = 6$: $x^{(1)} = \left(-1; 2; 2\right).$ После нормирования вектора $x^{(1)}$ получим единичный собственный вектор:

$$e_1' = \frac{x^{(1)}}{\left|x^{(1)}\right|} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3.$$

Положим теперь $\lambda = \lambda_2 = 3,$ и найдем координаты соответствующего собственного вектора $x^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0 \cdot x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}, \left(c \in R, c \neq 0\right).$$

При $c=1$ собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_2=3$, имеет вид: $x^{(2)}=(-2;-2;1)$, и после нормирования получим единичный собственный вектор:

$$e_2'=\frac{x^{(2)}}{\left|x^{(2)}\right|}=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}e_1-\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}e_3.$$

Найдем теперь координаты собственного вектора $x^{(3)}$, соответствующего значению $\lambda_3=9$:

$$\begin{cases}-3x_1-2x_2+2x_3=0\\ -2x_1-4x_2+0\cdot x_3=0\\ 2x_1+0\cdot x_2-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}c\\ -c/2\\ c\end{pmatrix},(c\in R,c\neq 0).$$

При $c=2$ получим собственный вектор $x^{(3)}=(2;-1;2)$, и далее нормируем его:

$$e_3'=\frac{x^{(3)}}{\left|x^{(3)}\right|}=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3.$$

Запишем матрицу C перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к «новому» базису e_1',e_2',e_3':

$$C=\begin{pmatrix}-1/3 & -2/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & -1/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}.$$

Причем матрица C — ортогональная $\left(C^{-1}=C^T\right)$ и собственная $(\det C=1)$.

С помощью непосредственной подстановки матриц A и C нетрудно убедиться, что матрица A в ортонормированном базисе e_1', e_2', e_3' принимает диагональный вид:

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами, соответствующими различным собственным значениям

б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Ответ: б) $4/\sqrt{65}$; в) $3/\sqrt{130}$.

2. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\lambda_1 = 2$, $(1; 1; 0)$; $\lambda_2 = 3$, $(2; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$;
б) $\lambda_1 = 2$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 1)$; $\lambda_2 = 4$, $(1; 1; -1)$.

3. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (2;\ 3;\ a-1)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$?

Ответ: $a = 4$.

4. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v} = (1;\ 3;\ a-2)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 3$?

Ответ: $a = 3$.

5. Проверьте, что вектор $x = (2;1;2;2)$ является собственным вектором матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}$$

и найдите соответствующее ему собственное значение λ.

Ответ: $\lambda = -4$.

2.8. Билинейные и квадратичные формы (КФ). Положительная определенность квадратичной формы

Определение. Числовая функция $A(x;y): V \times V \to R$ называется ***билинейной формой***, если для любых векторов $x, y, z \in V$ и любого действительного числа λ выполняются соотношения:

1) $A(x+y;z) = A(x;z) + A(y;z)$, $A(\lambda x;y) = \lambda A(x;y)$;

2) $A(x;y+z) = A(x;y) + A(x;z)$, $A(x;\lambda y) = \lambda A(x;y)$.

Другими словами, билинейная форма есть линейная функция каждого из своих аргументов.

Пусть в n-мерном векторном пространстве V выбран некоторый базис $e_1, e_2, ..., e_n$, билинейную форму $A(x;y)$ в нем можно задать равенством:

$$A(x;y) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j, \qquad (2.31)$$

где $x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i,\ y=\sum_{i=1}^{n}y_i e_i\in V,\ a_{ij}=A\left(e_i;e_j\right).$

Определение. Матрица, составленная из чисел $a_{ij}=A\left(e_i;e_j\right)$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется матрицей билинейной формы $A\left(x;y\right)$ в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$.

Как видно из (2.31), с помощью матрицы A любую билинейную форму можно записать в виде

$$A\left(x;y\right)=X^T AY,$$

где X и Y — соответственно матрицы-столбцы координат векторов x и y в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$.

Определение. Билинейная форма называется ***симметрической***, если для любых двух векторов $x,y\in V$ справедливо равенство

$$A\left(x;y\right)=A\left(y;x\right).$$

Отметим, что билинейная форма (2.31) будет симметрической тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_{ij}=a_{ji}$, $\left(\forall i,j=1,2,\ldots,n\right)$.

Важным примером симметрической билинейной формы служит скалярное произведение векторов произвольного евклидова пространства:

$$A\left(x;y\right)=\left(x,y\right)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}x_i y_j,\ \ g_{ij}=g_{ji}, \tag{2.32}$$

где $g_{ij}=\left(e_i,e_j\right)$ — элементы матрицы метрических коэффициентов.

С билинейной симметрической формой тесно связаны квадратичные формы, которые имеют широкое применение в теории кривых и поверхностей второго порядка.

Определение. Пусть $A(x;y)$ есть симметрическая билинейная форма. Функция $A(x;y=x)=A(x;x)$ называется ***квадратичной формой***.

Таким образом, в заданном базисе $e_1,e_2,...,e_n$ линейного пространства произвольная квадратичная форма $A(x;x)$ задается формулой:

$$A(x;x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T AX, \quad a_{ij}=a_{ji},(\forall i,j=1,2,...,n). \qquad (2.33)$$

Пример 64. Составьте матрицу квадратичной формы

$$A(x;x)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3$$

и запишите форму в матричном виде.

Решение.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x;x)=(x_1;x_2;x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=X^T AX.$$

Пусть в линейном пространстве выбраны два базиса $e_1,e_2,...,e_n$ и $e_1',e_2',...,e_n'$. Тогда матрицы-столбцы координат вектора

$$x=x_1e_1+x_2e_2+...x_ne_n=x_1'e_1'+x_2'e_2'+...x_n'e_n'$$

связаны соотношением $X=CX'$, где C — матрица перехода от базиса $e_1,e_2,...,e_n$ к базису $e_1',e_2',...,e_n'$. Используя матричную запись квадратичной формы, получим:

$$A(x;x)=X^T AX=(CX')^T ACX'=(X')^T C^T ACX'=(X')^T\left(C^T AC\right)X',$$

т.е. матрица A квадратичной формы в «новом» базисе принимает вид:

$$A' = C^T AC. \qquad (2.34)$$

2.9. Критерий Сильвестра. Приведение КФ к каноническому виду. Преобразование матрицы КФ, приводящее ее к каноническому виду

Определение. Квадратичная форма $A(x;x)$ называется ***положительно определенной*** (или ***отрицательно определенной***), если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство

$$A(x;x) > 0, \quad \left(A(x;x) < 0\right) \qquad (2.35)$$

Имеет место

Теорема (Критерий Сильвестра). Квадратичная форма

$$A(x;x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы A этой формы:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Чередование знаков главных миноров, начиная со знака «–» для минора $\Delta_1 = a_{11}$, есть необходимое и достаточное условие отрицательной определенности квадратичной формы.

Пример 65. Выясните, является ли квадратичная форма

$$A(x;x) = -x_1^2 - 6x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

знакоопределенной.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы и определяем знаки главных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Следовательно, согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма является отрицательно определенной.

Определение. Говорят, что КФ $A(x;x)$ имеет ***канонический вид***, если ее матрица в выбранном базисе имеет диагональный вид:

$$A(x;x) = X^T AX = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

Имеет место

Теорема. Пусть $A(x;x)$ есть квадратная форма в n-мерном евклидовом пространстве. Тогда в этом пространстве существует ортонормированный базис, в котором квадратичная форма имеет вид:

$$A(x;x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2,$$

где λ_n есть собственные значения соответствующего самосопряженного оператора (или корни характеристического уравнения соответствующей симметрической матрицы).

Существует несколько способов приведения квадратичной формы к каноническому виду, отметим некоторые из них.

1. Метод Лагранжа (метод последовательного выделения полных квадратов в записи квадратичной формы, задающий невырожденное линейное преобразование). Отметим, что канонический вид КФ определяется неоднозначно и зависит от выбора ведущей (начальной) переменной.

2. Метод, позволяющий с помощью собственных векторов симметрической матрицы квадратичной формы построить ортонормированный базис.

Пример 66. Задана квадратичная форма в некотором базисе:

$$A(x;x)=7x_1^2+8x_2^2+x_3^2+6x_1x_2-4x_1x_3.$$

А) Исследуйте на знакоопределенность;

Б) Найдите преобразование, приводящее КФ к каноническому виду.

Решение. А) Составим и решим характеристическое уравнение для матрицы КФ:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & -2 \\ 3 & 8-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+16\lambda^2-58\lambda+15=0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3}=\left[\begin{array}{c} 5 \\ \dfrac{11+\sqrt{109}}{2} \\ \dfrac{11-\sqrt{109}}{2} \end{array}\right.$$

Все собственные числа положительны, значит, КФ является положительно определенной.

Заметим, что ответ на этот вопрос можно дать и с помощью критерия Сильвестра:

$$\Delta_1 = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 47, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15,$$

все главные миноры положительны, следовательно, КФ является положительно определенной.

В) Выпишем сначала все слагаемые, содержащие переменную x_1, и преобразуем алгебраическую сумму:

$$7x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 = 7\left(x_1^2 + 2\frac{3}{7}x_1x_2 - 2\frac{2}{7}x_1x_3\right) =$$

$$= 7\left(x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3\right)^2 - \frac{9}{7}x_2^2 - \frac{4}{7}x_3^2$$

Таким образом, нашли линейное преобразование, приводящее КФ к каноническому виду:

$$y_1 = x_1 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3; y_2 = x_2; y_3 = x_3.$$

В результате получаем:

$A(x;x) = 7y_1^2 + \dfrac{47}{7}y_2^2 + \dfrac{3}{7}y_3^2$, т.е. форма положительно определена.

Приведем свойства квадратичных форм, записанных в каноническом виде:

- **Закон инерции**: число положительных, число отрицательных и число нулевых коэффициентов при квадратах переменных в квадратичной форме, представленной в каноническом виде, не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду.
- **Свойство ранга**: ранг матрицы квадратичной формы равен числу отличных от нуля коэффициентов квадратичной формы, записанной в каноническом виде, и не изменяется при ее линейных преобразованиях.

Пример 67. Квадратичная форма задана в ортонормированном базисе $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$:

$$A(x;x) = 7x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

1) Приведите КФ к каноническому виду;

2) Укажите линейное преобразование, приводящее к каноническому виду.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу перехода к ортонормированному базису e_1', e_2', e_3', составленному из собственных векторов оператора $\hat{A}$ (как известно, именно в таком базисе матрица КФ имеет диагональный вид). Определим собственные числа оператора $\hat{A}$:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-1)(3-\lambda) - 4(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda - 6\right) = 0, \lambda_1 = -3; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3$$

Находим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям.

При $\lambda_1 = -3$:

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нашли первый собственный вектор $x^{(1)} = (-2;1;0)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -3$. Нормируем его, в результате получаем:

$$e_1' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проделаем то же при $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, при $\lambda_3 = 3$ получаем:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X^{(3)} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Мы нашли матрицу C перехода от исходного ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к новому ортонормированному базису e_1', e_2', e_3':

$C = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что матрица C — ортогональная, т.е. $C^T = C^{-1}$.

Выпишем формулы перехода от «старых» координат x_1, x_2, x_3 к «новым» координатам x_1', x_2', x_3'

$$X = CX' \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_2' \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}.$$

В новом базисе КФ принимает вид:

$$A(x'; x') = -3(x_1')^2 + 2(x_2')^2 + 3(x_3')^2.$$

Проверим правильность проведенных вычислений, т.е. убедимся, что матрица квадратичной формы в новом базисе принимает диагональный вид:

$$A' = C^T AC = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Методом Лагранжа приведите к каноническому виду КФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 8x_2^2 + 9x_3^2 + 18x_1x_2 + 8x_2x_3 + 18x_3x_1$$

Отв.: $f(x_1, x_2, x_3) = 9(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 5x_3)^2 + 25x_3^2.$

2. Выясните, является ли положительно определенной КФ

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = -8x_1x_2 - 6x_3x_1 + 13x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

Отв.: да, является.

3. Выясните, является ли знакоопределенной КФ

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1x_3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

Отв.: нет, не является.

3. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ. РАЗБОР ТИПОВОГО ЗАДАНИЯ

Этот раздел содержит решение типовых задач. Каждый вариант включает 9 заданий.

В первом задании требуется решить неоднородную СЛАУ, и в случае совместности системы построить это решение и указать базис соответствующей однородной системы. Это задание в пособии представлено примерами 21, 22, 24.

Во втором задании нужно решить СЛАУ методом Крамера. Необходимо убедиться в выполнении исходных условий применимости метода. Пример решения этого задания можно найти в №16.

В третьем задании систему из предыдущего задания необходимо решить методом обратной матрицы и сравнить решение с решением, полученным ранее с помощью метода Крамера. Подобный пример рассмотрен в №18.

В четвертом примере необходимо убедиться в том, что заданная тройка векторов образует базис в R^3, и далее найти координаты указанного вектора a в этом базисе. Похожие примеры можно найти в №№39-41.

В пятом задании даны два вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in R^3$. Убедитесь, что векторы ортогональны. Требуется:

- найти третий вектор $\vec{a}_3$ такой, чтобы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образовали ортогональный базис;

- провести нормировку векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и представить соответствующий ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Подобный пример можно найти в №53.

В шестом задании линейный оператор $\hat{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей A.

Требуется найти матрицу оператора в новом базисе e'_1, e'_2, e'_3, связанном со «старым» базисом матрицей перехода C. Типичный пример разобран в №61.

В седьмом задании в некотором базисе задана матрица A линейного оператора. Требуется:

- подобрать базис пространства, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид;
- записать матрицу A' в новом базисе.

В качестве образца возьмите пример 63 из учебного пособия.

В восьмом задании нужно составить матрицу квадратичной формы

$$A(x;x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

и записать квадратичную форму в матричном виде. Это задание представлено в примере 64.

В заключительном, девятом задании в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 задана квадратичная форма $A(x;x)$. Требуется:

1) привести КФ к каноническому виду;

2) указать линейное преобразование, приводящее КФ к каноническому виду. Подобное задание представлено в №67.

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решите неоднородную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Если система совместная, то постройте общее решение и укажите базис (фундаментальную систему решений) однородной СЛАУ.

01) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	02) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$	03) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
04) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$	05) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$	06) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$
07) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	08) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$	09) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$
10) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$	11) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$	12) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 5x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$

13) $\begin{cases} -3x_1+2x_2+x_3=3 \\ 5x_1-x_2+4x_3=1 \\ -x_1+3x_2+6x_3=7 \end{cases}$	14) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1+3x_2+2x_3=1 \\ 3x_1-4x_2-5x_3=2 \end{cases}$	15) $\begin{cases} 6x_1-x_2-x_3=1 \\ 2x_1-3x_2=4 \\ x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ -x_1+5x_2-2x_3=3 \end{cases}$
16) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4=1 \\ -x_1+x_2-2x_4=0 \\ 3x_1-4x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$	17) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1+3x_2+2x_3=1 \\ 4x_1-x_2-3x_3=3 \end{cases}$	18) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2 \\ -4x_1+3x_2-x_3=1 \\ -3x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$

2. Решите систему линейных уравнений с помощью правила Крамера. Предварительно убедитесь, что выполняются все условия применимости правила Крамера.

01) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=4 \\ x_1-3x_2+2x_3=5 \\ 5x_1+x_2-x_3=9 \end{cases}$	02) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=8 \\ 2x_1-2x_2+x_3=-3 \\ 4x_1+x_3=3 \end{cases}$	03) $\begin{cases} 2x_1+x_2=5 \\ x_1+3x_3=16 \\ 5x_2-x_3=10 \end{cases}$
04) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-1 \\ -3x_2+2x_3=5 \\ x_1-x_2+3x_3=6 \end{cases}$	05) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=4 \\ 2x_1+2x_2+x_3=7 \\ x_1-2x_2+3x_3=3 \end{cases}$	06) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-2x_3=-1 \\ 2x_1+2x_2-x_3=-4 \end{cases}$
07) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1-x_2-x_3=-1 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$	08) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2-2x_3=5 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$	09) $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=10 \\ x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=7 \end{cases}$

10)	11)	12)
$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-1 \\ 2x_1-2x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2-3x_3=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3=3 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=0 \\ x_1-3x_2-x_3=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-3 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=4 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=13 \end{cases}$
13)	14)	15)
$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+5x_3=5 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=4 \\ 5x_1-3x_2+x_3=2 \\ 4x_1+2x_2-2x_3=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=-2 \\ x_1+2x_2+x_3=-3 \\ 5x_1-x_2-2x_3=10 \end{cases}$
16)	17)	18)
$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=10 \\ x_1-5x_2-3x_3=8 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-4 \\ 2x_1+x_2-x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=5 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-4x_2-x_3=5 \\ 3x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+2x_3=7 \end{cases}$

3. Запишите систему линейных уравнений из предыдущего задания в виде матричного уравнения. Решите методом обратной матрицы и ответ сравните с решением, полученным ранее методом Крамера.

4. Показать, что тройка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, заданных своими координатами в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, сама является базисом. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

1	$\vec{e}_1=(1;\,2;\,-1)$	$\vec{e}_2=(-1;\,1;\,0)$	$\vec{e}_3=(1;\,1;\,1)$	$\vec{a}=5\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$
2	$\vec{e}_1=(0;\,1;\,2)$	$\vec{e}_2=(1;\,1;\,3)$	$\vec{e}_3=(-1;\,2;\,1)$	$\vec{a}=-3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$
3	$\vec{e}_1=(-2;\,3;\,0)$	$\vec{e}_2=(1;\,2;\,1)$	$\vec{e}_3=(2;\,-1;\,-2)$	$\vec{a}=-7\vec{i}+12\vec{j}+3\vec{k}$
4	$\vec{e}_1=(-1;\,2;\,-1)$	$\vec{e}_2=(0;\,3;\,1)$	$\vec{e}_3=(-2;\,1;\,-1)$	$\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$
5	$\vec{e}_1=(2;\,1;\,0)$	$\vec{e}_2=(0;\,2;\,3)$	$\vec{e}_3=(-1;0;3)$	$\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$
6	$\vec{e}_1=(3;-1;0)$	$\vec{e}_2=(0;\,2;\,1)$	$\vec{e}_3=(1;-1;1)$	$\vec{a}=6\vec{i}+\vec{k}$
7	$\vec{e}_1=(-4;\,0;\,1)$	$\vec{e}_2=(1;\,2;\,4)$	$\vec{e}_3=(-2;\,1;\,0)$	$\vec{a}=-5\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

8	$\vec{e}_1 = (0;\ 2;\ -3)$	$\vec{e}_2 = (3;\ 3;\ 2)$	$\vec{e}_3 = (1;\ 1;\ -3)$	$\vec{a} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 11\vec{k}$
9	$\vec{e}_1 = (1;\ 3;\ -2)$	$\vec{e}_2 = (2;\ 0;\ 1)$	$\vec{e}_3 = (3;\ 2;\ -6)$	$\vec{a} = 6\vec{i} + 12\vec{j} - 7\vec{k}$
10	$\vec{e}_1 = (1;\ 1;\ 1)$	$\vec{e}_2 = (-2;\ -1;\ 3)$	$\vec{e}_3 = (3;\ 1;\ -4)$	$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
11	$\vec{e}_1 = (-1;\ 1;\ 2)$	$\vec{e}_2 = (4;\ 2;\ 1)$	$\vec{e}_3 = (3;\ -1;\ -1)$	$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$
12	$\vec{e}_1 = (-3;\ 0;\ 5)$	$\vec{e}_2 = (5;\ 2;\ 3)$	$\vec{e}_3 = (0;\ -3;\ 2)$	$\vec{a} = -11\vec{i} - 11\vec{j} + 13\vec{k}$
13	$\vec{e}_1 = (-1;\ 1;\ -1)$	$\vec{e}_2 = (2;\ 1;-1)$	$\vec{e}_3 = (0;\ 3;\ 3)$	$\vec{a} = \vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$
14	$\vec{e}_1 = (0;-2;\ 3)$	$\vec{e}_2 = (4;\ 3;\ 2)$	$\vec{e}_3 = (1;\ 0;\ -2)$	$\vec{a} = -4\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k}$
15	$\vec{e}_1 = (1;\ 3;\ -1)$	$\vec{e}_2 = (-3;\ 1;\ 0)$	$\vec{e}_3 = (2;\ -1;\ -1)$	$\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$
16	$\vec{e}_1 = (2;\ 3;\ 1)$	$\vec{e}_2 = (1;\ -1;\ 1)$	$\vec{e}_3 = (-3;\ 2;\ 5)$	$\vec{a} = 8\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$
17	$\vec{e}_1 = (1;\ -1;\ 2)$	$\vec{e}_2 = (-1;\ 0;\ 1)$	$\vec{e}_3 = (2;\ 1;\ 3)$	$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$
18	$\vec{e}_1 = (1;\ -1;\ 3)$	$\vec{e}_2 = (1;\ 2;\ 3)$	$\vec{e}_3 = (2;\ 1;\ -1)$	$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

5. В пространстве R^3 даны векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ своими координатами. Убедитесь, что векторы ортогональны. Найдите третий вектор $\vec{a}_3$ такой, чтобы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образовали ортогональный базис. Нормируйте векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и представьте соответствующий ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

01. $\begin{cases} a_1 = (1;\ 2;\ 3) \\ a_2 = (-3;\ 0;\ 1) \end{cases}$	02. $\begin{cases} a_1 = (2;\ -1;\ 1) \\ a_2 = (1;\ 3;\ 1) \end{cases}$	03. $\begin{cases} a_1 = (-1;\ -2;\ 3) \\ a_2 = (2;\ 2;\ 2) \end{cases}$
04. $\begin{cases} a_1 = (-2;\ 1;\ 1) \\ a_2 = (1;\ 1;\ 1) \end{cases}$	05. $\begin{cases} a_1 = (1;\ 3;\ -1) \\ a_2 = (1;\ 1;\ 4) \end{cases}$	06. $\begin{cases} a_1 = (2;\ -1;\ -1) \\ a_2 = (1;\ 1;\ 1) \end{cases}$
07. $\begin{cases} a_1 = (1;\ -1;\ 1) \\ a_2 = (2;\ 3;\ 1) \end{cases}$	08. $\begin{cases} a_1 = (2;\ 0;\ 1) \\ a_2 = (-1;\ 0;\ 2) \end{cases}$	09. $\begin{cases} a_1 = (0;\ -2;\ 3) \\ a_2 = (1;\ 3;\ 2) \end{cases}$
10. $\begin{cases} a_1 = (2;\ 0;\ 1) \\ a_2 = (-1;\ 2;\ 2) \end{cases}$	11. $\begin{cases} a_1 = (1;\ 0;\ -2) \\ a_2 = (2;\ 2;\ 1) \end{cases}$	12. $\begin{cases} a_1 = (0;\ 2;\ 3) \\ a_2 = (2;\ 3;\ -2) \end{cases}$

13. $\begin{cases} a_1 = (-2;\ 1;\ 0) \\ a_2 = (1;\ 2;\ 2) \end{cases}$	14. $\begin{cases} a_1 = (-1;\ 0;\ 3) \\ a_2 = (3;\ 1;\ 1) \end{cases}$	15. $\begin{cases} a_1 = (-4;\ 0;\ 1) \\ a_2 = (1;\ 1;\ 4) \end{cases}$
16. $\begin{cases} a_1 = (0;\ 1;\ 2) \\ a_2 = (1;\ -2;\ 1) \end{cases}$	17. $\begin{cases} a_1 = (0;\ -1;\ 1) \\ a_2 = (1;\ 1;\ 1) \end{cases}$	18. $\begin{cases} a_1 = (1;\ 1;\ 1) \\ a_2 = (-2;\ 0;\ 2) \end{cases}$

6. В базисе e_1, e_2, e_3 задан линейный оператор $\hat{A}$ матрицей A.

Найдите матрицу этого оператора в новом базисе e_1', e_2', связанном со «старым» базисом условиями

$$\begin{cases} e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 \\ e_2' = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases}.$$

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -4e_1 - 5e_2 \\ e_2' = e_1 + 2e_2 \end{cases}$	2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -4e_1 + e_2 \\ e_2' = -e_1 + 3e_2 \end{cases}$
3	$A = \begin{pmatrix} =3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = 3e_1 - 2e_2 \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases}$	4	$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = 5e_1 + 4e_2 \\ e_2' = 3e_1 + 2e_2 \end{cases}$
5	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -2e_1 - 5e_2 \\ e_2' = e_1 + 3e_2 \end{cases}$	6	$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -e_1 - 5e_2 \\ e_2' = 2e_1 - 3e_2 \end{cases}$
7	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -3e_1 + 4e_2 \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases}$	8	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = e_1 - 4e_2 \\ e_2' = 5e_1 - e_2 \end{cases}$
9	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -4e_1 - 3e_2 \\ e_2' = e_1 + 2e_2 \end{cases}$	10	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = 2e_1 + 3e_2 \\ e_2' = 4e_1 - e_2 \end{cases}$
11	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = e_1 + 3e_2 \\ e_2' = 4e_1 + 5e_2 \end{cases}$	12	$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = -3e_1 + 5e_2 \\ e_2' = e_1 - 2e_2 \end{cases}$
13	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = 4e_1 + 3e_2 \\ e_2' = e_1 + 2e_2 \end{cases}$	14	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = e_1 - 5e_2 \\ e_2' = 2e_1 - 3e_2 \end{cases}$
15	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = 4e_1 - 3e_2 \\ e_2' = -e_1 + 4e_2 \end{cases}$	16	$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 \\ e_2' = 2e_1 + 5e_2 \end{cases}$

17	$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ \begin{cases}e_1'=e_1+e_2\\ e_2'=5e_1+e_2\end{cases}$	18	$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & -1\end{pmatrix},\ \begin{cases}e_1'=4e_1+e_2\\ e_2'=5e_1+3e_2\end{cases}$

7. В некотором базисе задана матрица A линейного оператора $\hat{A}$.

Укажите базис пространства, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид, и запишите матрицу A' в новом базисе.

01. $A=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 7\\ -3 & -1 & 3\\ 3 & -9 & 11\end{pmatrix}$	02. $A=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 3\\ -3 & -1 & 2\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}$
03. $A=\begin{pmatrix}-2 & 7 & -5\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 12 & -9\end{pmatrix}$	04. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -7\\ 3 & 2 & -3\\ 3 & 9 & -10\end{pmatrix}$
05. $A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ -3 & 5 & -3\end{pmatrix}$	06. $A=\begin{pmatrix}-10 & 5 & 1\\ -9 & 1 & 4\\ -9 & 8 & -3\end{pmatrix}$
07. $A=\begin{pmatrix}10 & 3 & -9\\ 9 & 1 & -6\\ 9 & 6 & -11\end{pmatrix}$	08. $A=\begin{pmatrix}-6 & 5 & 1\\ -9 & 5 & 4\\ -9 & 8 & 1\end{pmatrix}$
09. $A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & -2\\ -6 & 6 & 2\\ -6 & 10 & -2\end{pmatrix}$	10. $A=\begin{pmatrix}9 & 2 & -6\\ 6 & 3 & -4\\ 6 & 4 & -5\end{pmatrix}$
11. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$	12. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$
13. $A=\begin{pmatrix}2 & -10 & 6\\ 6 & -7 & -1\\ 6 & -17 & 9\end{pmatrix}$	14. $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\\ -3 & 5 & -5\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}14 & 0 & -8\\ 12 & 1 & -7\\ 12 & 1 & -7\end{pmatrix}$	16. $A=\begin{pmatrix}16 & -3 & -7\\ 15 & -1 & -8\\ 15 & -4 & -5\end{pmatrix}$
17. $A=\begin{pmatrix}12 & -7 & -3\\ 15 & -6 & -7\\ 15 & -11 & -2\end{pmatrix}$	18. $A=\begin{pmatrix}-9 & -1 & 11\\ -15 & 7 & 9\\ -15 & -3 & 19\end{pmatrix}$

8. Составьте матрицу квадратичной формы

$$A(x;x)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3$$

и запишите квадратичную форму в матричном виде.

	$A(x;x)$
1	$x_1^2-7x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+14x_2x_3$
2	$2x_1^2+14x_2^2+45x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-48x_2x_3$
3	$-3x_1^2+x_2^2-16x_3^2-6x_1x_2+18x_1x_3+30x_2x_3$
4	$2x_1^2+16x_2^2+11x_3^2-8x_1x_2-8x_1x_3+24x_2x_3$
5	$-x_1^2-19x_2^2-20x_3^2+2x_1x_2-6x_1x_3+30x_2x_3$
6	$x_1^2-3x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3-6x_2x_3$
7	$25x_1^2-3x_2^2-x_3^2+10x_1x_2+50x_1x_3+14x_2x_3$
8	$16x_1^2+3x_2^2+50x_3^2+16x_1x_2-40x_1x_3-20x_2x_3$
9	$-22x_1^2-11x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3+8x_2x_3$
10	$x_1^2-2x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2-8x_2x_3$
11	$3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$
12	$11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$
13	$-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2+12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3$
14	$x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3+20x_2x_3$
15	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$

16	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-x_2x_3$
17	$x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$
18	$7x_1^2+8x_2^2+x_3^2+6x_1x_2-4x_1x_3$

9. Дана квадратичная форма $A(x;x)$ в некотором базисе.

1) Приведите ее к каноническому виду;

2) Укажите линейное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.

	$A(x;x)$
1	$6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$
2	$11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$
3	$x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$
4	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$
5	$17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$
6	$x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$
7	$x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
8	$x_1^2-2x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$
9	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
10	$x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$
11	$x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
12	$x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$
13	$x_1^2-7x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+14x_2x_3$
14	$2x_1^2+14x_2^2+45x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-48x_2x_3$
15	$-3x_1^2+x_2^2-16x_3^2-6x_1x_2+18x_1x_3+30x_2x_3$
16	$2x_1^2+16x_2^2+11x_3^2-8x_1x_2-8x_1x_3+24x_2x_3$
17	$-x_1^2-19x_2^2-20x_3^2+2x_1x_2-6x_1x_3+30x_2x_3$
18	$x_1^2-3x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3-6x_2x_3$

ТЕСТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Вычислите определитель произведения матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 2. При каких значениях параметра t для заданной матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ t^2 & 1-t^2\end{pmatrix}$ существует обратная матрица A^{-1}?

ЗАДАНИЕ 3. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу.

ЗАДАНИЕ 4. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу.

ЗАДАНИЕ 5. Существуют ли матрицы A и B такие, что $AB=0$, а $BA=E$?

ЗАДАНИЕ 6. При каких значениях параметра t однородная система линейных уравнений, заданных матрицей $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ 1 & 6 & 1\\ -2 & t+6 & 5\end{pmatrix}$, имеет ненулевое решение?

ЗАДАНИЕ 7. Исследуйте на совместность однородную СЛАУ с матрицей при неизвестных $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 8. При каких значениях параметра t векторы $a_1(t;2t+3;-t-4), a_2(0;-t;8-2t), a_3(-2;-4;4)$ линейно зависимы?

ЗАДАНИЕ 9. Найдите все значения параметра t, при которых вектор $b(7;-2;t-2)$ линейно выражается через векторы $a_1(2;3;5)$, $a_2(3;7;8), a_3(1;-6;1)$.

ЗАДАНИЕ 10. Решите матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 11. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 16 \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 12. Найдите ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 13. Найдите ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 15x_2 + 13x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

ЗАДАНИЕ 14. Найдите общее решение неоднородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 15x_2 + 13x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 15. Найдите вектор $x \in R^2$ такой, что $(x,a)=5$, $(x,b)=6$, где $a=(3;-2), b=(3;-3)$.

ЗАДАНИЕ 16. При каких значениях параметра t векторы $a_1(t-4;1;2), a_2(t+2;4;2)$ ортогональны?

ЗАДАНИЕ 17. При каких значениях параметра t векторы $a_1(t;1;-1), a_2(1;-3;-5), a_3(-1;1;1)$ образуют базис пространства R^3?

ЗАДАНИЕ 18. При каких значениях параметра t векторы $a_1(t;-5;-1), a_2(t;t;-6), a_3(-16;-5;-7)$ образуют ортогональный базис пространства R^3?

ЗАДАНИЕ 19. При каких значениях параметра t система

$$\begin{cases} (t-2)x_1+3x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+(t-2)x_2+3x_3=-2t \\ 3x_1+3x_2+(t-2)x_3=4t^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

ЗАДАНИЕ 20. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 21. При каком значении параметра a матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ имеет собственный вектор $\vec{v}=(2;3;a-1)$, соответствующий собственному значению $\lambda=2$?

ЗАДАНИЕ 22. Является ли положительно определенной квадратичная форма $A(x,x)=13x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2-6x_1x_3$?

ЗАДАНИЕ 23. Используя критерий Сильвестра, определите, при каких значениях параметра t квадратичная форма $tx_1^2+6x_2^2+x_3^2+$ $+2tx_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$ положительно определена.

Правильные ответы к тестовым заданиям

ЗАДАНИЕ 1. 16.

ЗАДАНИЕ 2. $t \neq \pm 1/2$.

ЗАДАНИЕ 3. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 5. Нет, не существуют.

ЗАДАНИЕ 6. $t = 2$.

ЗАДАНИЕ 7. СЛАУ имеет б. мн-во решений.

ЗАДАНИЕ 8. $t \in R$ — любое число.

ЗАДАНИЕ 9. $t = 17$.

ЗАДАНИЕ 10. $X = -\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЕ 11. а) $(1; 2; -1)$; б) бесчисленное множество решений вида $(-2-3c; 4+2c; c)$; в) несовместна; г) эквивалентна системе б).

ЗАДАНИЕ 12. а) 2; б) 3; в) 3; г) 2.

ЗАДАНИЕ 13. $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x_2 = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

ЗАДАНИЕ 14. $x = x_* + c_1 x_1 + c_2 x_2 =$

$$= \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 15. $x = (1; -1)$.

ЗАДАНИЕ 16. $t \in \{0; 2\}$.

ЗАДАНИЕ 17. $t \neq 3$.

ЗАДАНИЕ 18. $t = 2$.

ЗАДАНИЕ 19. $t \notin \{-4; 5\}$.

ЗАДАНИЕ 20. а) $\lambda_1 = 2$, $(1; 1; 0)$; $\lambda_1 = 3$, $(2; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$; б) $\lambda_1 = 2$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 1)$; $\lambda_1 = 4$, $(1; 1; -1)$.

ЗАДАНИЕ 21. $a = 4$.

ЗАДАНИЕ 22. Да, является.

ЗАДАНИЕ 23. $0 < t < 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А*. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Физматлит, 2014. - 280 с.
2. *Казакова Т.А*. Линейная алгебра: учебное пособие / Т.А. Казакова. – СПб.: Лань П, 2016. – 384 с.
3. *Бортаковский А.С*. Линейная алгебра в примерах и задачах / А.С. Бортаковский. – М.: Высшая школа, 2010. – 591 с.
4. *Кремер Н.Ш*. и др. Линейная алгебра. 2-ое изд.: учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Юрайт, 2018. – 422 с.
5. *Плотникова Е.Г*. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – М.: Юрайт, 2018. – 340 с.
6. *Кадымов В.А., Литвин О.Н*. Системы линейных алгебраических уравнений. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: электронный учебник. [Электронный ресурс]. Режим доступа: sdo.mggeu.ru/pluginfile.pdp/2838/mod_resource/content.

Содержание

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов**
Елена Александровна **Яновская**

Линейная алгебра. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий

Учебно-методическое пособие

Печатается в авторской редакции.

Ответственный редактор	С.А. Бобко
Технический редактор	К.А. Антонов
Компьютерная верстка	К.А. Антонов

Подписано в печать 23.11.2018. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 7.
Тираж 35 экз. Заказ № 38.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.