

## ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

### Численное моделирование нестационарных двумерных течений несжимаемой жидкости методом расщепления по физическим процессам

Фарид Надирович Халилуллин

Студент

Московский Государственный Технический Университет им Н.Э. Баумана

Москва, Россия

fkhaliullin@gmail.com

ORCID 0000-0002-3754-8163

Поступила в редакцию 16.08.2023

Принята 15.09.2023

#### Аннотация

В исследовании представлена информация о численном моделировании нестационарных двумерных течений несжимаемой жидкости методом расщепления по физическим процессам. Данный метод предполагает, что в процессе решения системы уравнений Навье-Стокса численное решение будет состоять из трех этапов: решение уравнений движения без учета поля давления методом RKDG, решение уравнения Пуассона методом конечных элементов, поправка поля скоростей с учетом давления. В настоящее время все большее распространение в сфере численного моделирования задач гидродинамики со свободными границами приобретают бессеточные методы. Среди них выделяют подкласс методов частиц. Эти методы не требуют использования сетки ни на стадии построения функций форм, ни на стадии интегрирования уравнений движения. Их основная идея состоит в дискретизации области расчета набором лагранжевых частиц, которые могут свободно передвигаться в рамках наложенных на них, посредством основных уравнений динамики сплошной среды, связей. Функции формы при таком подходе строятся на каждом шаге по времени с использованием различного набора узлов (частиц). Бессеточная природа данных методов, а также простота реализации и использования обусловили их огромную популярность в сфере решения задач со свободными границами.

#### Ключевые слова

механика сплошных сред, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса, метод RKDG, метод расщепления по физическим процессам.

#### Введение

На протяжении многих лет усилия ученых были направлены на исследование задачи динамики вязкой несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями Навье-Стокса. Сегодня известно огромное количество численных методов решения уравнения Навье-Стокса, описывающего течение несжимаемой вязкой жидкости. Большинство из этих подходов было разработано специально для системы уравнений относительно функции токи и вихря. Основным недостатком данных методов является использование граничных условий для вихря на твердой поверхности тела, которые отсутствуют в физической подстановке задачи. Присутствие дополнительных граничных условий для функции вихря снижает скорость сходимости алгоритмов (Белоцерковский, 1994).

Данная работа посвящена решению задачи обтекания двумерного тела вязкой несжимаемой жидкостью, которая будет реализована с помощью метода расщепления по физическим процессам. Это метод предполагает, что в процессе решения системы уравнений Навье-Стокса, численное решение будет состоять из 3-х этапов.

#### Материалы и методы исследования

Имеется труба (с жесткими стенками) прямоугольной формы, в центре которой находится препятствие выпуклой формы. Через некоторое время  $t$  в трубу начинает поступать несжимаемая жидкость со скоростью  $v$ . В некоторый момент времени она достигает препятствия и обтекает его. Необходимо вычислить векторный поток скоростей и давления жидкости, используя метод расщепления величин по физическим процессам. В данной задаче главный интерес вызывает поле течения жидкости около выпуклого препятствия. Чтобы понять, какие значения скорости и давления будут в некоторый момент времени  $t$ , вокруг препятствия необходимо увеличить аппроксимирование сетки.

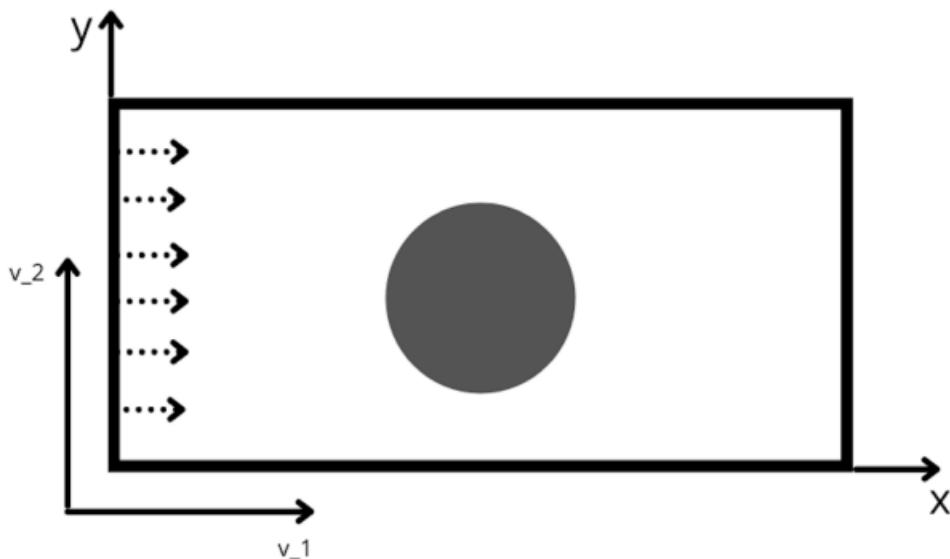


Рисунок 1. Графическая постановка задачи

#### Метод расщепления по физическим величинам

Данный метод используется для численного решения уравнения Навье-Стокса, записанных через естественные координаты:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

А сам метод расщепления по физическим величинам состоит из трех этапов:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

I этап:

$$\frac{\tilde{\vec{v}} - \vec{v}^n}{\Delta t} = -(\vec{v}^n \cdot \nabla) \vec{v}^n + \nu \Delta \vec{v}^n \quad . \quad (3)$$

II этап:

$$\Delta p = \frac{D}{\Delta t}, \quad (4)$$

Очевидно, что сумма уравнений I и II этапов дает нам исходное решение движения, а уравнение II этапа получается из уравнения неразрывности с учетом условия соленоидальности поля скорости. Здесь предполагается следующая физиологическая трактовка данной схемы расщепления (Zienkiewicz, Taylor, 1991).

Согласно условию I этапа расщепления, предполагается, что перенос импульса единицы массы осуществляется только с помощью конвенции и диффузии. Таким образом, векторное поле скоростей никак не может удовлетворять условию несжимаемости. При этом следует отметить, что данное поле скорости имеет вполне определенный физический смысл. В самом деле, если использовать оператор ротора к обеим частям уравнения в соответствии с тождеством  $\text{rot}(\Delta p) \equiv 0$ , то уже на первом этапе мы можем получить промежуточное поле скорости во внутренних точках изучаемой области течения, которые имеют корректные вихревые характеристики для уравнения Навье-Стокса (Самоловов, Губкин, 2014).

С учетом условия соеноидальности вектора скорости из решения уравнения Пуассона, на втором этапе по найденному промежуточному полю скорости находится поле давления.

На третьем этапе предполагается, что перенос происходит исключительно благодаря градиенту давления

(конвекция и диффузия отсутствуют).

#### Численный метод RKDG для решения первого этапа

Для начала запишем уравнение Навье-Стокса, отбросив слагаемые, в которых участвует параметр «давление»:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1^2}{\partial x} + \frac{\partial v_1 v_2}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2^2}{\partial y} + \frac{\partial v_1 v_2}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (5)$$

Эта система уравнений в тензорном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \frac{1}{Re} \nabla(\nabla \otimes \vec{v}) \quad (6)$$

Теперь перенесем все слагаемые в левую сторону равенства и вынесем Набла-оператор.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v}) = 0 \quad (7)$$

В данном случае, решение внутри каждой треугольной вычислительной ячейки является квадратичной функцией, которую можно записать как разложение по конечно-элементному базису второго порядка в рассматриваемом треугольнике (Токарева, 2001).

Применим к данной области треугольную сетку. Теперь к каждому треугольнику добавим узлы в середине стороны, поэтому элемент будет 6 узлов. Тогда интерполяционный полином выглядит следующим образом:

$$\phi_i = a_i^1 + a_i^2 x + a_i^3 y + a_i^4 x^2 + a_i^5 xy + a_i^6 y^2 \quad (8)$$

У всех шести узловых точек в треугольнике будет 6 функций форм, таким образом, мы получим выражение для компонента скорости:

$$v_{1,2} = \sum_{i=1}^6 \phi_i(x, y) \cdot v_{1,2}^i(t) \quad (9)$$

Уравнение (7) умножим на функцию формы и возьмем интеграл по данной области D:

$$\int_D \phi_i \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v}) \right) dS \quad (9)$$

Рассмотрим следующие слагаемые уравнения (9) по-отдельности:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \int_D \phi_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dS; \\ \text{б)} & \int_D \phi_i \nabla(\vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v}) dS. \end{aligned}$$

Домножим первое слагаемое на компоненты скорости:

$$\int_D \phi_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dS = \int_D \phi_i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^6 \phi_j v^j dS = M \frac{\partial v^i}{\partial t}, \quad (10)$$

$$M = \int_D \phi_i \phi_j dS.$$

где

$$\int_D \phi_i \nabla(\vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v}) dS.$$

Далее, преобразуем второй интеграл

Воспользуемся формулой Грина для вычисления и получим:

$$\int_{\partial D} \phi_i (\vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v}) \cdot \vec{n} dS - \int_S (\nabla \phi_i) (\vec{v} \otimes \vec{v} - \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v}) dS . \quad (11)$$

Теперь разберем каждое из этих выражений отдельно и составим подынтегральные функции для каждого интеграла.

Одна из самых больших трудностей при получении численного решения уравнения гидродинамики – это наличие разрывов (скаков) сеточных функций (Браиловская, Кускова, Чудов, 1967).

На первом этапе расщепления для первого интеграла используется величина, которая в общем случае при переходе через сторону треугольника является разрывной и не может быть использована как функция численного потока. Она зависит от значений приближенного решения по обе стороны треугольников (Сегерлинд, 1979):

$$F_{conv} = \vec{v} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} [\vec{F}_L + \vec{F}_R - |\alpha| (\vec{v}_R - \vec{v}_L)], \quad (12)$$

где  $F_L$  и  $F_R$  – функции потока;

$\alpha$  – скорость распространения возмущения.

$$F_{vis} = \vec{n} \frac{1}{Re} \nabla \otimes \vec{v} = \frac{1}{2 \cdot Re} [F_{Lvis} + F_{Rvis}], \quad (13)$$

где  $F_{L,Rvis}^i = n_i \nabla_i \vec{v}_i, i = 1, 2$ .

Слагаемое (12) называется конвективным численным потоком, а (13) – вязким численным потоком.

Одно ребро может являться одной стороной для двух разных треугольных элемента. Общие функции аппроксимирования значений для каждого элемента разные, поэтому используются индексы L и R. Они означают принадлежность данного ребра к конкретному элементному ряду (Кускова, Чудов, 1970).

Слагаемые  $F_L$ ,  $F_R$  и  $\alpha$  для (12) вычисляются по следующим формулам:

$$F_L = \vec{v}_L \cdot v_{nL} = \sum_{i=1}^6 \phi_{iL}(x, y) \cdot v_L^i \cdot v_{nL}, \quad (14)$$

$$F_R = \vec{v}_R \cdot v_{nR} = \sum_{i=1}^6 \phi_{iR}(x, y) \cdot v_R^i \cdot v_{nR}, \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (v_{nL} + v_{nR}), \quad (16)$$

где  $v_L^i, v_R^i$  – значение скоростей в узлах треугольного элемента на предыдущем знаке;

$v_{nL}, v_{nR}$  – компоненты вектора нормальной скорости к текущему ребру.

Слагаемые  $F_{Lvis}$  и  $F_{Rvis}$  найдем следующим образом:

$$F_{Lvis} = n_1 \cdot \frac{\partial v_L}{\partial x} + n_2 \cdot \frac{\partial v_L}{\partial y} = n_1 w_{xL} + n_1 w_{yL}, \quad (17)$$

$$F_{Rvis} = n_1 \cdot \frac{\partial v_R}{\partial x} + n_2 \cdot \frac{\partial v_R}{\partial y} = n_1 w_{xR} + n_1 w_{yR}, \quad (18)$$

где  $w_{xL,R}, w_{yL,R}$  – численное представление производной от компонента скорости по координатам.

Эти значения также определяются в узловых точках треугольного элемента, поэтому для примера найдем приближенную формулу для вычисления дивергенции произвольного вектора.

Для вектора  $\vec{a}$  дивергенция представляется следующим образом:

$$\nabla \vec{a} = w^i \cdot \phi_i, i = 1..6, \quad (19)$$

где  $w^i$  – значения компонента вектора, содержащего значения дивергенции произвольного вектора в

узлах текущего треугольного элемента;

$\phi_i$  – функция формы для текущего элемента.

Домножим уравнение (19) на функцию формы и проинтегрируем по площади треугольного элемента.

$$\int_S \phi_j w^i \phi_i dS = \int_S \phi_j \nabla \vec{a} dS \quad (20)$$

Левую часть равенства преобразуем следующим образом:

$$\int_S \phi_j w^i \phi_i dS = Mw, \quad (20)$$

где  $M$  – матрица Грама.

Для правой части равенства, применяя формулу интегрирования по частям, получим следующее:

$$\int_S \phi_j \nabla \vec{a} dS = \int_L \phi_j \vec{a}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} dL - \int_S \nabla \phi_j \vec{a} dS, \quad (21)$$

где  $k$  – номер текущего треугольного элемента.

$$\vec{a}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n}$$

Рассмотрим первый интеграл правой части уравнения (21). Вектор  $\vec{a}_{k+\frac{1}{2}}$  можно представить следующим образом:

$$\vec{a}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} (\vec{a}_L + \vec{a}_R) \cdot \vec{n} \quad (22)$$

Для данной задачи, найденный вектор является вектором скорости. Поскольку данный вектор содержит две компонентные компоненты в декартовой системе координат, получаем четыре различных представления вектора (Люлька, Щенников, 1974):

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x}; \vec{a} = [v_1; 0], \\ w_2 &= \frac{\partial v_1}{\partial y}; \vec{a} = [0; v_1], \\ w_3 &= \frac{\partial v_2}{\partial x}; \vec{a} = [v_2; 0], \\ w_4 &= \frac{\partial v_2}{\partial y}; \vec{a} = [0; v_2]. \end{aligned}$$

Поставив вместо компонентов скорости и соответствующих аппроксимирующих формул (9) и вычислив подынтегральные выражения, мы получим многочлен 4 степени и 3 степени для первого интеграла соответственно (Беляков, Карасев, Трушко, 2019).

После всех преобразований и обозначений в итоге получим:

$$M_{6 \times 6} \cdot w_{6 \times 1} = F_{6 \times 1}, \quad (23)$$

где  $M_{6 \times 6}$  – матрица Грама;

$w_{6 \times 1}$  – вектор, содержащий значения дивергенции скоростей;

$F_{6 \times 1}$  – вектор правых частей уравнения.

Далее мы должны рассмотреть второй интеграл (11), а также сделать следующие преобразования:

$$\vec{v} \otimes \vec{v} = v^i R_i \otimes v^j R_j = v^i v^j R_i \otimes R_j, \quad (24)$$

$$\nabla \phi = R^k \frac{\partial \phi}{\partial X^k} = R^k \nabla_k \phi, \quad (25)$$

$$\nabla \phi \cdot \vec{v} \otimes \vec{v} = \nabla_k \phi v^i v^j R^k \cdot R_i \otimes R_j. \quad (26)$$

Упростив последнее выражение, получим следующее:

$$\phi \cdot \vec{v} \otimes \vec{v} = \nabla_i \phi \cdot v^i v^j R_j^i. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое второго интеграла (11)

$$\nabla \otimes \vec{v} = R^k \nabla_k \otimes v^i R_i = \nabla_k v^i R^k \otimes R_i. \quad (28)$$

После всех упрощений получим:

$$\nabla \phi \cdot \nabla_k v^i R^k \otimes R_i = \nabla^k \phi \nabla_k v^i R_i. \quad (29)$$

Все найденные величины нужно подставить в формулы (27) и (29). После этого снова применить квадратурные формулы Гаусса к вычислению интегралов. В итоге получим два СЛАУ, которые будут иметь следующий вид:

$$M_{6 \times 6} \cdot v^x_{6 \times 1} = f^x_{6 \times 1}, \quad (30)$$

$$M_{6 \times 6} \cdot v^y_{6 \times 1} = f^y_{6 \times 1}. \quad (31)$$

### Результаты и обсуждение

#### Метод конечных элементов для решения II этапа

Следующим шагом в решении уравнений Навье-Стокса является нахождение давления. Чтобы это сделать, необходимо решить уравнение Пуассона. Численное решение данного дифференциального уравнения будем находить с помощью метода конечных элементов.

$$\begin{cases} \nabla^2 p = \frac{D}{\Delta t}; \\ \frac{dp}{dn} = 0, \end{cases} \quad (32)$$

В первую очередь, необходимо написать слабую форму дифференциального уравнения. Для этого нужно умножить уравнение (32) в области D на вариацию давления  $\delta p$  и проинтегрировать на данной области (Сагдеева, Копысов, Новиков, 2011).

$$\int_D \delta p \cdot \nabla^2 p dS = \int_D \delta p \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (33)$$

Проинтегрируем левую часть уравнения (33) по формуле Грина:

$$\int_D (\nabla \delta p \cdot \nabla p) dS - \int_{\partial D} \delta p \cdot (n \cdot \nabla p) dS = \int_S \delta p \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (34)$$

Из-за того, что в пределах границы давление p равно нулю, мы можем упростить уравнение (34):

$$\int_D (\nabla \delta p \cdot \nabla p) dS = \int_D \delta p \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (35)$$

Это решение является слабой формой дифференциального уравнения (32).

Дальше будем делить пространство D на треугольные элементы: мы выберем набор функций форм  $N_1(x, y) \dots N_i(x, y)$ , которые являются линейными функциями для каждого треугольного элемента.

$$\phi = a + bx + cy. \quad (36)$$

Поэтому приближенное решение будем искать в виде:

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \phi_i(x, y). \quad (37)$$

Далее запишем формулы (37) через функции формы:

$$p(x, y) = N_i p_i + N_j p_j + N_k p_k \quad (38)$$

Благодаря тому, что функции мы аппроксимируем линейно, L-координаты совпадают с функциями формы и поэтому уравнение (37) можно представить следующим образом (Смогунов, Филиппов, 2011):

$$\delta p = \{L\}^T \{\delta p_i\}, \quad (39)$$

где  $\{L\}^T = [L_1; L_2; L_3]$  – L-координаты;

$\{p_i\} = [p_1; p_2; p_3]^T$  – значение функции давления в узлах треугольного элемента.

Подставляя (39) в формулу (36), получим следующее выражение:

$$\int_D \nabla[\{L\}^T \cdot \{\delta p_i\}] \cdot \nabla[\{L\}^T \cdot \{p\}] dS = \int_D \{L\} \cdot \{\delta p_i^T\} \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (40)$$

Далее воспользуемся свойством набла оператора:

$$\nabla[\{L\}^T \cdot \{\delta p_i\}] = \{\delta p_i\} \cdot \nabla\{L\}. \quad (41)$$

И подставим данное выражение в (40):

$$\int_D \{\delta p_i\}^T \cdot \nabla\{L\} \cdot \nabla\{L\}^T \cdot \{p\} dS = \int_S \{L\} \cdot \{\delta p_i\}^T \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (42)$$

Градиенты преобразуем следующим образом:

$$\nabla\{L\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot [L_1, L_2, L_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} = B^T, \quad (43)$$

$$\nabla\{L\}^T = B$$

Дивергенцию скорости запишем в следующем виде:

$$D = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}. \quad (44)$$

Подставляя это выражение (44) в выражении для компонентов скорости (9), получим следующее (Мазо, Поташев, 2013):

$$D = \sum_{i=1}^6 \phi_i(x, y) \cdot w_{1x}^i + \phi_i(x, y) \cdot w_{2y}^i. \quad (45)$$

После подстановки (45) и (43) в формулу (42) в итоге получим:

$$\int_D \{\delta p_i\}^T \cdot B^T \cdot B \cdot \{p\} dS = \int_D L \cdot \{\delta p_i\}^T \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (46)$$

Сократив интегралы на вариацию давления и вынося матрицу узловых значений давления из-под знака интеграла, получим следующее выражение:

$$\int_D (B^T \cdot B) dS \cdot \{p\} = \int_D L \cdot \frac{D}{\Delta t} dS. \quad (47)$$

Посчитаем интеграл правой части в формуле (47). Из-за того, что оно постоянно, его также можно вынести за знак интеграла (Гущин, Матюшин, 2009):

$$\int_D (B^T \cdot B) dS = B^T \cdot B \cdot \int_A dA = A \cdot B^T \cdot B, \quad (48)$$

где  $A$  – площадь треугольного элемента.

При вычислении произведения матриц  $B$  мы получаем локальное значение жесткости для каждого треугольного элемента (Галанин, Грищенко, Савенков, Токарева, 2006):

$$k = \frac{1}{4A} \cdot \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{1}{4A} \cdot \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (49)$$

Интеграл правой части уравнения (47) вычисляем с помощью квадратурных формул Гаусса. Три узловых элемента L-координаты совпадают с функциями формы, поэтому их можно представить следующими выражениями через декартовые координаты (Димитриенко, Коряков, Захаров, 2015):

После построения локальных матриц жесткости для каждого треугольника нам необходимо построить глобальную матрицу жесткости. В результате построения глобальной матрицы жесткости мы получим следующую СЛАУ:

$$K \cdot P = f \quad (48)$$

### Заключение

#### Решение III этапа

Скорость, вычисленная на первом этапе алгоритма, не соответствует уравнению непрерывности. Поэтому необходимо внести поправки для поля скоростей с учетом давления. Здесь используется следующее уравнение:

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \tilde{\vec{v}}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (49)$$

Градиент давления найдем следующим образом:

$$\nabla p^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot p_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot p_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot p_k \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot p_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot p_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot p_k \end{bmatrix} \quad (50)$$

С помощью уравнения (49), мы находим компоненты скорости, которые удовлетворяют уравнению неразрывности системы Навье-Стокса: В этот момент, мы переходим на следующий шаг по времени (Димитриенко, 2001).

#### Список литературы

1. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М., 1994. 448 с.
2. Беляков Н.А., Карапев М.А., Трушко В.Л. Механика сплошной среды. М., 2019. 115 с.
3. Браиловская И.Ю., Кускова Т.В., Чудов Л.А. Разностные методы решения уравнений Навье-Стокса. М., 1967. 17 с.
4. Гущин В.А., Матюшин П.В. Математическое моделирование течений несжимаемой жидкости. М., 2009. 16 с.
5. Галанин М.П., Грищенко Е.В., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики. М., 2006. 31 с.
6. Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А. Применение метода RKDG для численного решения трехмерных уравнений газовой динамики на неструктурированных. М., 2015. 91 с.
7. Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А. Конечно-элементное моделирование термонапряжений в композитных термодеструктирующих конструкциях при аэродинамическом нагреве. М., 2016. 34 с.
8. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М., 2001. 575 с.
9. Кускова Т.В., Чудов Л.А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 9 с.
10. Люлька В.А., Щенников В.В. Численное решение уравнений Навье-Стокса. М., 1974. 242 с.
11. Мазо А.Б., Поташев К.А. Гидродинамика. М., 2013. 126 с.
12. Мазо А.Б. Вычислительная гидродинамика часть 1. Казань. 2018. 166 с.
13. Самоловов Д.А., Губкин А.С. Вычислительные возможности метода решеточного кинетического

- уравнения Больцмана // Вестник Тюменского государственного университета. М., 2014. №7. С. 90.
14. Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. М., 2011. 44 с.
  15. Смогунов В.В., Филиппов Б.А. Основы механики сплошных сред. М., 2011. 77 с.
  16. Сегерлинд Л. Применение конечных элементов. М., 1979. 393 с.
  17. Токарева С.А. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе разрывного метода галеркина. М., 2010. 141 с.
  18. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. V., 1991. 447 p.

### Numerical modeling of unsteady two-dimensional flows of incompressible fluid using the method of splitting into physical processes

**Farid N. Khaliullin**

Student

Moscow State Technical University named after N.E. Bauman  
Moscow, Russia  
fkhalilin@gmail.com  
ORCID 0000-0002-3754-8163

Received 16.08.2023

Accepted 15.09.2023

#### Annotation

The study presents information on the numerical modeling of unsteady two-dimensional flows of incompressible fluid using the method of splitting into physical processes. This method assumes that in the process of solving the system of Navier-Stokes equations, the numerical solution will consist of three stages: solving the equations of motion without taking into account the pressure field using the RKDG method, solving the Poisson equation using the finite element method, and correcting the velocity field taking into account pressure. Currently, meshless methods are becoming increasingly widespread in the field of numerical modeling of hydrodynamics problems with free boundaries. Among them there is a subclass of particle methods. These methods do not require the use of a mesh either at the stage of constructing shape functions or at the stage of integrating equations of motion. Their main idea is to discretize the calculation domain with a set of Lagrangian particles that can move freely within the framework of the constraints imposed on them through the basic equations of continuum dynamics. In this approach, shape functions are constructed at each time step using a different set of nodes (particles). The meshless nature of these methods, as well as the ease of implementation and use, have made them extremely popular in the field of solving problems with free boundaries.

#### Keywords

continuum mechanics; numerical modeling; Navier-Stokes equations; RKDG method; Method of splitting by physical processes.

#### References

1. Belocerkovskij O.M. CHislennoe modelirovanie v mehanike sploshnyh sred. M., 1994. 448 s.
2. Belyakov N.A., Karasev M.A., Trushko V.L. Mekhanika sploshnoj sredy. M., 2019. 115 s.
3. Brailovskaya I.YU., Kuskova T.V., Chudov L.A. Raznostnye metody resheniya uravnenij Nav'e-Stoksa. M., 1967. 17 s.
4. Gushchin V.A., Matyushin P.V. Matematicheskoe modelirovanie techenij neszhimaemoj zhidkosti. M., 2009. 16 s.
5. Galanin M.P., Grishchenko E.V., Savenkov E.B., Tokareva S.A. Primenenie RKDG metoda dlya chislennogo resheniya zadach gazovoj dinamiki. M., 2006. 31 s.
6. Dimitrienko YU.I., Koryakov M.N., Zaharov A.A. Primenenie metoda RKDG dlya chislennogo resheniya trekhmernyh uravnenij gazovoj dinamiki na nestrukturirovannyh. M., 2015. 91 s.
7. Dimitrienko YU.I., Koryakov M.N., YURin YU.V., Zaharov A.A. Konechno-elementnoe modelirovanie termonapryazhenij v kompozitnyh termodestruktiruyushchih konstrukciyah pri aerodinamicheskem nagreve. M., 2016. 34 s.
8. Dimitrienko YU.I. Tenzornoe ischislenie. M., 2001. 575 s.
9. Kuskova T.V., Chudov L.A. O priblizhennyh granichnyh uslovijah dlya vihrya pri raschete techenij vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M., 1970. 9 s.
10. Lyul'ka V.A., SHChennikov V.V. CHislennoe reshenie uravnenij Nav'e-Stoksa. M., 1974. 242 s.
11. Mazo A.B., Potashev K.A. Gidrodinamika. M., 2013. 126 s.
12. Mazo A.B. Vychislitel'naya gidrodinamika chast' 1. Kazan'. 2018. 166 s.
13. Samolovov D.A., Gubkin A.S. Vychislitel'nye vozmozhnosti metoda reshetochnogo kineticheskogo

- uravneniya Bol'cmana // Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. M., 2014. №7. S. 90.
- 14. Sagdeeva YU.A., Kopysov S.P., Novikov A.K. Vvedenie v metod konechnykh elementov. M., 2011. 44 s.
  - 15. Smogunov V.V., Filippov B.A. Osnovy mekhaniki sploshnyh sred. M., 2011. 77 s.
  - 16. Segerlind L. Primenerie konechnykh elementov. M., 1979. 393 s.
  - 17. Tokareva S.A. Matematicheskoe modelirovaniye techenij zhidkosti i gaza na osnove razryvnogo metoda galerkina. M., 2010. 141 s.
  - 18. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. V., 1991. 447 p.