Задания для олимпиады по математике

1. Доказать, что сумма квадратов первых n натуральных чисел

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

есть чётное число, если $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ есть натуральное число.

2. Упростить выражение $A = \sqrt{a+2-2\sqrt{a+1}} + \sqrt{a+5+4\sqrt{a+1}}$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет только одно решение.

4. Решить уравнение $|x-3| = |x+1|$.

5. Решить уравнение $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

6. Решить уравнение $\log_5 x^3 + 2 = \log_{25} x^2$.

7. Решить неравенство $x^{\frac{x-1}{2-x}} > 1$.

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = 3\cos 2x - 4\sin 2x + 2.$$

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены соответственно точки A_1 и C_1 так, что $\dfrac{BA_1}{BA} = p$ и $\dfrac{BC_1}{BC} = q.$ Найти отношение площади треугольника A_1BC_1 к площади треугольника ABC.

10. При каких значениях параметра a уравнение $4^x + (a^2+5)2^x + 9 - a^2 = 0$ имеет действительные решения?

Примечания. Каждая правильно решённая задача оценивается по 10 бальной системе. Так что участник, правильно решивший все 10 задачи, получает 100 баллов. По результатам проверки:

- правильно решивший не менее 8 задач объявляется победителем;
- правильно решивший от 6 до 8 задач объявляется призёром;
- правильно решивший до 6 задач объявляется участником.