

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный  
гуманитарно-экономический университет (МГГЭУ)

---

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ  
И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ  
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ С ПРИМЕРАМИ И ВАРИАНТАМИ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ**

Часть 2

*Учебно-методическое пособие*

Составитель: Кадымов В.А.

Печатается в авторской редакции.

Москва  
2015

УДК 517.2  
ББК 22.16  
К 13

Рецензент:

Кулемин А.В., профессор кафедры математики, д-р физ.-мат. наук

К 13 **Дифференциальное** и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий. Часть 2. Учебно-методическое пособие / состав.: В.А. Кадымов. – М.: МГГЭУ, 2015. – 60 с.

Методические указания соответствуют утвержденной программе курса высшей математики и рекомендованы кафедрой в качестве дополнительной литературы для изучения материала студентами первого курса. В ней в краткой форме представлен необходимый теоретический материал по основным разделам интегрального исчисления функций многих переменных, раскрываются понятия двойного, тройного и криволинейного интегралов. Указаны методы их вычисления. Приводятся различные приложения интегрального исчисления к геометрии, механике.

В пп.1, 2 вкратце изложен необходимый материал из предыдущих разделов математического анализа, которым необходимо владеть для изучения основных положений интегрального исчисления функции многих переменных.

Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Представлено решение типового варианта расчетно-графической работы. Приводятся варианты заданий (расчетно-графических работ) для самостоятельных занятий. Все это поможет студентам лучше понять материал и успешно подготовиться к экзамену.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов МГГЭУ, обучающихся по специальностям:

- прикладная математика и информатика: 01.03.02 (010400.62);
- экономика: 38.03.01 (080.100.62);
- менеджмент: 38.03.02 (080.200.62).

© Кадымов В.А., 2015  
© МГГЭУ, 2015

## 1. Необходимые сведения из интегрального исчисления функции одной переменной

**Определение 1.** Функция  $F(x)$  называется *первообразной* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если во всех точках этого отрезка имеет место равенство:

$$F'(x) = f(x), \text{ или } dF(x) = f(x)dx. \quad (1.1)$$

**Пример 1.** Для функции  $f(x) = 4x^3$  первообразной будет не только  $F(x) = x^4$ , но и  $x^4 + 5$ , и вообще  $x^4 + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

**Теорема 1.** Если  $F(x)$  и  $F_1(x)$  — две различные первообразные от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , то они отличаются между собой на постоянное число:

$$F_1(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b]. \quad (1.2)$$

**Определение 2.** Множество всех первообразных  $F(x) + C$  от функции  $f(x)$  называется *неопределенным интегралом* от данной функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (1.3)$$

при этом  $f(x)$  называется *подынтегральной функцией*,  $f(x)dx$  — *подынтегральным выражением*,  $x$  — *переменной интегрирования*. Операция отыскания первообразной для  $f(x)$  называется *интегрированием* (она обратна операции дифференцирования), причем можно записать:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C, \\ \left[ \int f(x)dx \right]' &= f(x); \quad d \int f(x)dx = f(x)dx = dF. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Формулы (1.4) следуют из (1.1) и (1.3)

*Свойства неопределенного интеграла.*

1. Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

2. Постоянный множитель  $k$  можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Приведем таблицу интегралов от простейших функций (здесь  $\alpha$ ,  $a$  — некоторые числа):

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4.  $\int \cos x dx = \sin x + C$

5.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

6.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

7.  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

8.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

9.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ; в частности  $\int e^x dx = e^x + C$

10.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$

11.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$

12.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| < a)$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Любую из вышеприведенных формул нетрудно проверить, взяв производную функции, стоящей в правой части равенства и убедившись в её совпадении с соответствующей подинтегральной функцией. Рассмотрим, например, пункт 2 таблицы:

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \quad (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

т.е.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  и равенство п.2 справедливо.

### 1.1. Метод тождественных преобразований

Его идея заключается в разложении подинтегральной функции на сумму функций, каждую из которых можно проинтегрировать при помощи какого-либо другого метода, в том числе при помощи непосредственного использования таблицы интегралов.

**Пример 2.**  $J = \int \frac{(x^4 + x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx = ?$

$$\begin{aligned} J &= \int (x^8 + 2x^5 + x^2) x^{\frac{1}{3}} dx = \int \left( x^{\frac{23}{3}} + 2x^{\frac{14}{3}} + x^{\frac{5}{3}} \right) dx = \\ &= \frac{x^{\frac{23}{3}+1}}{\frac{23}{3}+1} + 2 \frac{x^{\frac{14}{3}+1}}{\frac{14}{3}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{3}{26} x^{\frac{26}{3}} + \frac{6}{17} x^{\frac{17}{3}} + \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C; \end{aligned}$$

**Пример 3.**  $J = \int 5^x (2^{3x} + 4) dx = ?$

$$J = \int \left( 5^x (2^3)^x + 4 \cdot 5^x \right) dx = \int 40^x dx + 4 \int 5^x dx = \frac{40^x}{\ln 40} + \frac{4 \cdot 5^x}{\ln 5} + C.$$

Выполните самостоятельно. Найдите неопределенный интеграл, используя тождественные преобразования подинтегральной функции:

$$1) \int \frac{(x+2)(3-x)}{x} dx; \quad 2) \int (2^x - 3^x)^2 dx.$$

## 1.2. Метод замены переменной

Если найти интеграл  $\int f(x) dx$  непосредственно не удается, то к успеху может привести введение новой переменной  $t$  с помощью соотношения  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — некоторая функция с непрерывной производной  $\varphi'(t)$ , имеющая обратную функцию  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Поскольку  $dx = \varphi'(t) dt$ , то справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int \psi(t) dt, \quad (1.5)$$

где обозначено  $\psi(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ . Если интеграл в правой части (1.5) удастся найти:

$$\int \psi(t) dt = \Psi(t) + C,$$

то исходный интеграл определяется как функция  $x$  соотношением:

$$\int f(x) dx = \Psi(t) + C = \Psi[\varphi^{-1}(x)] + C. \quad (1.6)$$

**Пример 4.**  $\int \sin 5x dx = ?$ . С помощью замены  $x = \frac{t}{5}$ ,  $dx = \frac{1}{5} dt$  (при этом  $t = 5x$ ) и формул (1.5), (1.6) получим:

$$\int \sin 5x dx = \int \sin\left(5 \frac{t}{5}\right) \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$$

Весьма часто бывает удобно воспользоваться следующей разновидностью метода замены переменной (**способом подстановки**). Пусть требуется найти интеграл вида  $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ . Его можно привести к более простому интегралу заменой переменной (подстановкой):

$t = \varphi(x)$ ,  $dt = \varphi'(x) dx$ , в результате чего получается равенство:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad (1.7)$$

Если интеграл, стоящий справа, удастся найти:

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

то исходный интеграл определяется как функция  $x$  формулой:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F(t) + C = F[\varphi(x)] + C. \quad (1.8)$$

Подчеркнем, что в отличие от формул (1.5), (1.6), в данном случае не требуется отыскание обратной функции, поскольку здесь замене переменной соответствует соотношение  $t = \varphi(x)$ , уже разрешенное относительно  $t$ .

**Пример 5.** Найдите  $\int \sqrt{3x^2 + 8} x dx$ . С помощью подстановки  $t = 3x^2 + 8$ ;  $dt = 6x dx$  и формул (1.7), (1.8) получим

$$\int \sqrt{3x^2 + 8} x dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{9} \sqrt{t^3} + C = \frac{1}{9} \sqrt{(3x^2 + 8)^3} + C.$$

В процессе замены переменной (подстановки) иногда подробные выкладки можно опустить, не вводя явно переменную  $t$ , но подразумевая её присутствие. В этих случаях говорят, что применяется способ подведения под знак дифференциала.

**Пример 6.**  $\int \cos(x^2 + 1) x dx = ?$  Заметим, что  $d(x^2 + 1) = 2x dx$ , т.е.  $x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + 1)$ , в результате чего:

$$\int \cos(x^2 + 1) x dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2 + 1) d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) + C.$$

Метод замены переменной в любой его разновидности часто применяется в сочетании с другими методами, например, с методом разложения.

**Пример 7.**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sin^2 3x} &= \int \frac{\cos^2 3x + \sin^2 3x}{\cos^2 3x \cdot \sin^2 3x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 3x} + \frac{1}{\cos^2 3x} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\sin^2 3x} + \int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} + \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C.\end{aligned}$$

**Выполните самостоятельно.** Найдите неопределенный интеграл, пользуясь каким-либо вариантом метода замены переменной:

$$1) \int x\sqrt{5-x^2} dx; \quad 2) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}.$$

### 1.3. Метод интегрирования по частям

Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  — функции, имеющие непрерывные производные  $u'(x)$  и  $v'(x)$ , и при этом требуется найти интеграл вида:

$$\int u(x)v'(x) dx.$$

Тогда справедлива формула

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx \quad (1.9)$$

или, то же самое:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Формула (1.9) приводит к успеху, когда интеграл, стоящий в её правой части, более простой, чем искомый.

**Пример 8.**  $\int x \cos 3x dx = ?$  Примем  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = \cos 3x$ , т.е.  $dv = \cos 3x dx$ .

Тогда  $u'(x) = 1$ , а  $v(x)$  найдем как первообразную  $v'(x)$ :  $v(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$  и согласно (1.9) получим



$$\int x \cos 3x dx = \frac{x}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x dx = \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

Заметим, что удача зависит от правильного выбора функции  $u(x)$ . В самом деле, если бы в данном примере было принято  $u(x) = \cos 3x$ ,  $v'(x) = x$ , т.е.  $du = -3 \sin 3x$ ,  $v = \frac{x^2}{2}$ , то формула (1.9), оставаясь справедливой, не привела бы к успеху:

$$\int x \cos 3x dx = \frac{x^2}{2} \cos 3x + \frac{3}{2} \int x^2 \sin 3x dx,$$

поскольку при этом интеграл в правой части оказался сложнее исходного.

**Пример 9.**  $J = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = ?$

Возьмем  $u(x) = x$ ,  $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ , откуда  $v = \operatorname{tg} x$ ,  $du = dx$ .

В результате  $J = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$ .

**Пример 10.**  $J = \int \frac{\arccos \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx = ?$

Сделаем сначала замену переменной  $t = \sqrt{x-1}$ ,  $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ , после чего получим:  $J = 2 \int \arccos t dt$ .

Далее применим метод интегрирования по частям: возьмем  $u(t) = \arccos t$ ,  $dv = dt$ , откуда  $v = t$ ,  $du = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} J &= 2 \left[ t \arccos t - \int \frac{t(-dt)}{\sqrt{1-t^2}} \right] = 2 \left[ t \arccos t - \int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}} \right] = \\ &= 2 \left( t \arccos t - \sqrt{1-t^2} \right) + C = 2 \left( \sqrt{x-1} \arccos \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} \right) + C. \end{aligned}$$

Выполните самостоятельно. Найдите неопределенный интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$$1) \int \frac{x dx}{\sin^2 x}; \quad 2) \int (x^2 + 1) \ln x dx.$$

### 1.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

**Определение 3.** Дробной рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция, являющаяся отношением двух многочленов (полиномов):

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}, \quad a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, \quad (1.10)$$

где  $b_0, b_1, \dots, b_m, a_0, a_1, \dots, a_n$  — действительные числа;  $m, n$  — целые неотрицательные степени многочленов.

Если  $m < n$ , то рациональная дробь называется правильной, если же  $m \geq n$ , то — неправильной.

Интегрирование дробно-рациональных функций основано на трех теоремах, представленных ниже.

**Теорема 2.** Любая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Подобное представление нетрудно получить с помощью известного правила деления многочленов. Так, например,

$$\frac{x^3 + 5x}{x + 2} = x^2 - 2x + 9 - \frac{18}{x + 2}.$$

**Определение 4.** Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующих четырех типов:

I.  $\frac{A}{x - a};$

II.  $\frac{A}{(x - a)^k}, k = 2, 3, 4, \dots;$

III.  $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}; \frac{p^2}{4} - 4 < 0;$

IV.  $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}, k = 2, 3, 4, \dots; \frac{p^2}{4} - 4 < 0,$

где  $A, B, a, p, q$  — действительные числа, причем квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

**Теорема 3.** Любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде:

$$P_n(x) = a_n (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{t_2} \dots (x^2 + p_ex + q_e)^{t_e}, \quad (1.11)$$

где  $a_n, p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_e, q_e$  — действительные числа;  $k_1, k_2, \dots, k_s, t_1, t_2, \dots, t_e$  — целые положительные числа, причем  $k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2t_1 + 2t_2 + \dots + 2t_e = n$ ; числа  $a_1, a_2, \dots, a_s$  — действительные корни многочлена  $P_n(x)$  кратности  $k_1, k_2, \dots, k_s$  соответственно, а все трехчлены  $x^2 + p_ix + q_i (i = 1, 2, \dots, e)$  не имеют действительных корней.

**Теорема 4.** Всякую правильную рациональную дробь  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ , ( $m < n$ ) можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей указанных выше четырех типов.

Пусть (для простоты)  $P_n(x)$  раскладывается так:

$$P_n(x) = (x - \alpha)^k (x - \beta)^r (x^2 + px + q)^t.$$

Тогда:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{B_1}{x - \beta} + \frac{B_2}{(x - \beta)^2} + \dots + \frac{B_r}{(x - \beta)^r} + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{C_t x + D_t}{(x^2 + px + q)^t},$$

где  $k + r + 2t = n$ , а все  $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_r, C_1, D_1, \dots, C_t, D_t$  — неизвестные действительные числа, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов. Поясним сказанное на следующем примере.

**Пример 11.** Представьте правильную дробь  $f(x) = \frac{2x+1}{x^4-16}$  в виде суммы простейших правильных дробей и вычислите интеграл  $\int f(x)dx$ .

Сперва разлагаем исходную правильную дробь на сумму простейших правильных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^4-16} &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+4} = \\ &= \frac{A_1(x-2)(x^2+4) + A_2(x+2)(x^2+4) + (x^2-4)(A_3x+A_4)}{(x^2+4)(x^2-4)}, \end{aligned}$$

и приравняем числители обеих частей последнего равенства:

$$2x+1 = A_1(x-2)(x^2+4) + A_2(x+2)(x^2+4) + (x^2-4)(A_3x+A_4).$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $A_1, A_2, A_3, A_4$  можем применить один из известных методов (например, метод неопределенных коэффициентов, или метод приравнивания значений многочленов при определенных (четыре) значениях неизвестной  $x$ ; эти методы подробно описаны в литературе). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + \dots = 0 \\ -2A_1 + 2A_2 + \dots + A_4 = 0 \\ 4A_1 + 4A_2 - 4A_3 + \dots = 2 \\ -8A_1 + 8A_2 + \dots - 4A_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{3}{32}; A_2 = \frac{5}{32}; A_3 = -\frac{1}{4}; A_4 = -\frac{1}{8}.$$

Используя полученное разложение дробно-рациональной функции, находим интеграл:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left( \frac{2x+1}{x^4-16} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+4} \right) dx = \\ &= \frac{3}{32} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{32} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{xdx}{x^2+4} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= \frac{3}{32} \ln|x+2| + \frac{5}{32} \ln|x-2| - \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{3}{32} \ln|x+2| + \frac{5}{32} \ln|x-2| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) - \frac{1}{16} \arctg \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

**Выполните самостоятельно.** Проинтегрируйте дробно-рациональную функцию:

$$1) \int \frac{2x^2 + 3}{x+1} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{x(x^2 + 3)}.$$

### 1.5. Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование тригонометрических функций основано на формулах преобразования тригонометрических выражений.

**Пример 12.**  $J = \int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^3 x} = ?$

$$J = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cos^3 x \sin^3 x} = 2^3 \int \frac{dx}{\cos^2 x (\sin 2x)^3}$$

Выбрав  $t = \operatorname{tg} x$ , получим  $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ ,  $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ , откуда

$$\begin{aligned} J &= 2^3 \int \frac{dt(1+t^2)^3}{(2t)^3} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3} dt = \int \left( \frac{1}{t^3} + 3\frac{1}{t} + 3t + t^3 \right) dt = \\ &= \frac{t^{-2}}{-2} + 3 \ln|t| + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + 3 \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C. \end{aligned}$$

**Выполните самостоятельно.** Проинтегрируйте тригонометрическое выражение:

$$1) \int \sin^3(2x) dx; \quad 2) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

### 1.6. Определенный интеграл и его свойства.

#### Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана некоторая функция  $y = f(x)$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $n$  частей (необязательно равных) так, чтобы  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  (см. рис. 1.1). Обозначим длину отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$  через  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). На каждом отрезке

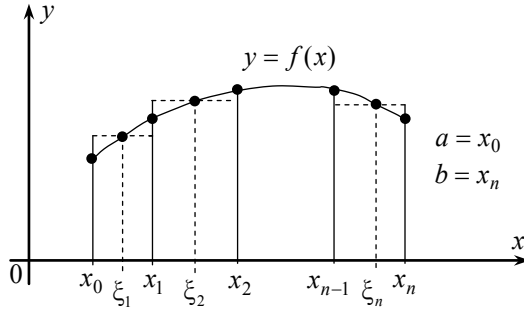


Рис. 1.1

$[x_{i-1}, x_i]$  выберем по произвольной точке  $\xi_i$ . Назовем *шагом разбиения*  $\lambda$  наибольшую из длин  $\Delta x_i$ :  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ .

**Определение 5.** *Интегральной суммой*  $\sigma_n$  функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  называется следующая величина:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Устремляя шаг разбиения  $\lambda$  к нулю дроблением  $[a, b]$  на все большее количество отрезков, получим последовательность соответствующих интегральных сумм  $\sigma_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Определение 6.** Если существует предел интегральных сумм  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n$ , который не зависит ни от способа разбиения  $[a, b]$ , ни от выбора точек  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , то этот предел называется *определенным интегралом* от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1.12)$$

Величины  $a$  и  $b$  называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Если для функции  $f(x)$  существует определенный интеграл (1.12), то  $f(x)$  называется *интегрируемой* на  $[a, b]$ .

**Теорема 5 (достаточное условие интегрируемости).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она на этом отрезке интегрируема. Это условие не является необходимым.

*Замечания.*

1. В соотношении (1.12) предполагалось.  $a < b$ . Если же  $a > b$  или  $a = b$ , то принимается по определению соответственно

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. Если  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то интеграл (2.2) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $ox$  и вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

3. Вычисление определенного интеграла по формуле (1.12) связано, как правило, с большими трудностями, поэтому для его вычисления используется приводимая ниже формула Ньютона-Лейбница, выражающая связь между определенными и неопределенными интегралами.

Рассмотрим функцию  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$ .

**Теорема 6.** Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\Phi(x)$  есть ее первообразная, т.е.

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \quad (1.13)$$

**Теорема 7.** Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $F(x)$  — какая-либо ее первообразная, то справедливо соотношение:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (1.14)$$

которое называется формулой Ньютона-Лейбница.

Обычно в обозначении правой части этой формулы используют знак двойной подстановки:  $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

**Пример 13.**

$$J = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \arcsin(\sqrt{3}/2) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$

**Выполните самостоятельно.** Вычислите определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$1) \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt; \quad 2) \int_0^1 \frac{tdt}{3+t^2}.$$

**Пример 14.** Установить, сходится или расходится интеграл  $J = \int_0^{\infty} \cos 3x dx$ .

Решение:  $J = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos 3x dx$ , но поскольку  $\int_0^b \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^b = \frac{1}{3} \sin 3b$  и  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \sin 3b$  не существует, то  $J = \int_0^{\infty} \cos 3x dx$  расходится.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; +\infty)$ . Если существует конечный предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , то он называется *несобственным интегралом с бесконечной верхней границей от функции  $f(x)$*  и обозначается:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл *сходится*. Если такого предела не существует (в частности, он бесконечен), то соответствующий несобственный интеграл не существует и называется *расходящимся*.

Если  $f(x)$  непрерывна на  $(-\infty, b]$ , то несобственный интеграл с бесконечной нижней границей определяется аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$



если же  $f(x)$  непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ , то несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется соотношением:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где  $c$  — любая фиксированная точка оси  $x$ .

Выполните самостоятельно. Вычислите несобственный интеграл с бесконечными пределами (если он сходится) или установите его расходимость:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \quad 2) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty$ . Если суще-

ствует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ , то он называется сходящимся несобствен-

ным интегралом от  $f(x)$  на  $[a; b]$  и обозначается  $\int_a^b f(x)dx =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если указанного предела не существует, то несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  называется расходящимся.

Для случая, когда  $f(x)$  непрерывна на  $(a; b]$  и  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$ , несоб-

ственный интеграл определяется аналогично:  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ .

Пусть  $f(x)$  непрерывна при  $x \in [a; c) \cup (c; b]$ ,  $a < c < b$ , и имеет в точке  $x = c$  разрыв второго рода. Тогда *несобственным интегралом* от  $f(x)$  на  $[a; b]$  называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$

при этом  $\int_a^b f(x)dx$  называется *сходящимся*, если существует каждый из пределов, стоящих справа и *расходящимся*, если хотя бы один из них не существует.

**Пример 15.**  $J = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = ?$

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty,$$

несобственный интеграл расходится.

**Пример 16.**  $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2,$$

несобственный интеграл сходится и его значение равно двум.

**Выполните самостоятельно.** Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции на конечном отрезке (если он сходится) или докажите его расходимость:

$$1) \int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}; \quad 2) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

## 2. Вспомогательный материал из дифференциального исчисления функций многих переменных

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$ . Выберем точку  $M(x; y)$  внутри области определения  $f(x, y)$  и рассмотрим малое приращение  $\Delta x$  аргумента  $x = x + \Delta x$ , оставив другой аргумент фиксированным и равным  $y$ . Тогда разность  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$  называется частным приращением функции  $f(x, y)$  в точке  $M$ .

**Определение 7.** Частной производной функции  $z = f(x, y)$  по переменной  $x$ , обозначаемой  $f'_x(x, y)$  или  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ , в точке  $M(x; y)$  называется предел

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (2.1)$$

если он существует.

Аналогично вводятся частное приращение  $\Delta_y z$  и частная производная функции  $z$  по  $y$  в точке  $M_0$ , обозначаемая  $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$  или  $f'_y(x_0, y_0)$ .

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (2.2)$$

**Определение 8.** Полным приращением  $f(x, y)$  в точке  $M$  называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2.3)$$

**Определение 9.** Функция  $z = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $M(x, y)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \quad (2.4)$$

при этом величины  $A$  и  $B$  зависят только от  $M$  и не зависят от  $\Delta x, \Delta y$ , а  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  при  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$  есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  (ее вид определяется видом функции  $f(x, y)$  и координатами  $M_0$ ).

Полным дифференциалом  $df$  (или  $dz$ ) указанной функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M$  называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$ :

$$dz(x, y) = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y, \quad (2.5)$$

при этом  $dy = \Delta y, dx = \Delta x$ .

С точностью до бесконечно малой высшего порядка  $\Delta z \approx dz$  при  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ .

**Теорема 8.** Если  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $M$ , то в этой точке существуют  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , причем  $\frac{\partial f}{\partial x} = A$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = B$ .

Если  $z = f(x, y)$  — дифференцируемая функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , которые в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных

$$x = \varphi(u, v); y = \psi(u, v),$$

то частные производные  $z$  по  $u$  и  $v$  преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2.6)$$

**Пример 17.** Найдите частные производные и полный дифференциал функции  $z = \sqrt{x}y^3$  в точке  $M_0(4, 2)$ .

Решение. В произвольной точке  $M_0(x, y)$  будем иметь  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^3$ ;

$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot 3y^2$ ;  $dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} y^3 dx + 3\sqrt{x} y^2 dy$ . В заданной точке  $M_0(4, 2)$  полу-

чим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 2^3 = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\sqrt{4} \cdot 2^2 = 24; \quad dz = 2dx + 24dy.$$

**Выполните самостоятельно.** Найдите частные производные и полный дифференциал функции двух переменных  $z = f(x, y)$  в заданной точке  $M_0(x_0, y_0)$ :

$$1) z = \sin^2(xy); M_0\left(1; \frac{\pi}{4}\right); \quad 2) z = \frac{x^2 - y}{x + y}; M_0(1; 0).$$

**Пример 18.** Вычислить приближенно  $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$ .

Решение. Переведем градусы в радианы:

$$28^\circ = 30^\circ - 2^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90}; \quad 61^\circ = 60^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}.$$

Рассмотрим функцию  $z = \sin x \cos y$ , дифференцируемую в любой точке  $(x, y)$  и вычислим приближенно значение этой функции в точке:

$$M\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right).$$

Рассмотрим точку  $M_0\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$  и примем  $dx = -\frac{\pi}{90}$ ,  $dy = \frac{\pi}{180}$ .

Поскольку  $z(M) = z(M_0) + \Delta z \approx z(M_0) + dz$ , то

$$z(M) \approx z(M_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy.$$

Вычислим:  $z(M_0) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ;

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \cos x \cos y|_{M_0} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\sin x \sin y|_{M_0} = -\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} z(M) &\approx \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\pi}{90}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{90} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{60}\right). \end{aligned}$$

Если принять  $\sqrt{3} \approx 1,73$  и  $\pi \approx 3,14$ , то  $z(M) \approx 0,227$ .

**Выполните самостоятельно.** Используя дифференциал функции, вычислите приближенно заданное выражение:

$$1) \cos 44^\circ \sin 92^\circ; \quad 2) \sqrt{(4,05)^2 + (2,98)^2}.$$

**3. Двойной интеграл. Повторный интеграл.  
Вычисление двойного интеграла. Замена переменных  
в двойном интеграле. Вычисление площадей фигур  
и объемов тел. Приложения к задачам механики**

**3.1. Двойной интеграл. Повторный интеграл.  
Понятие правильной (стандартной) области.  
Вычисление двойного интеграла**

Пусть в замкнутой ограниченной области  $S$  плоскости  $oxy$  задана функция  $z = f(x, y) = f(P)$ . Разобьем область  $S$  произвольными линиями

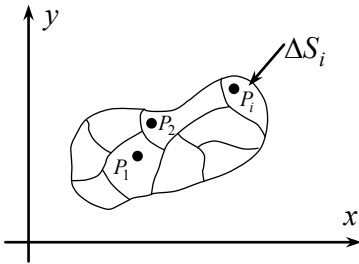


Рис. 3.1

на  $n$  составных частей (площадок)  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  (см. рис. 3.1). Здесь и далее буквами  $S, \Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  будем обозначать как сами области, так и их площади. Выберем на каждой из указанных площадок  $\Delta S_i$  по произвольной точке  $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . Наибольший размер площадки  $\Delta S_i$  будем называть ее диаметром  $diam \Delta S_i$ .

**Определение 10.** *Интегральной суммой* функции  $f(x, y)$  в области  $S$  называется величина:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i.$$

Стягивая каждую из площадок  $\Delta S_i$  в точку ( $diam \Delta S_i \rightarrow 0$ ) дроблением области  $S$  на все большее количество этих площадок, получим последовательность интегральных сумм  $\sigma_n$ .

**Определение 11.** Если существует предел интегральных сумм  $\lim_{diam \Delta S_i \rightarrow 0} \sigma_n$ , который не зависит ни от способа разбиения  $S$ , ни от выбора точек  $P_i \in \Delta S_i$ , то этот предел называется *двойным интегралом* от функции  $f(x, y)$  по области  $S$  и обозначается:

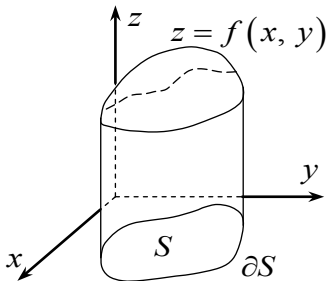
$$\iint_S f(x, y) dS = \iint_S f(x, y) dx dy = \iint_S f(P) dS = \lim_{diam \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i, \quad (3.1)$$

при этом  $S$  называется *областью интегрирования*,  $dS$  — *элементом площади*.

**Теорема 9 (о существовании двойного интеграла).** Если функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $S$ , то существует  $\iint_S f(x, y) dS$ .

*Замечание.* Если  $f(x, y) \geq 0$  в области  $S$ , то двойной интеграл (3.1) равен объему тела, ограниченного поверхностью  $z = f(x, y)$ , плоскостью  $z = 0$  и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси  $oz$ , а направляющая является границей  $\partial S$  области  $S$  (см. *рис. 3.1*). Если же  $f(x, y) = 1$ , то двойной интеграл (3.1) равен площади  $S = \iint_S dS$ .

Приведем основные свойства двойного интеграла, понимая под  $S$  замкнутую ограниченную область и предполагая, что указанные ниже двойные интегралы существуют.



*Рис. 3.2*

1.  $\iint_S kf(x, y) dS = k \iint_S f(x, y) dS$ .
2.  $\iint_S [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] dS = \iint_S f_1(x, y) dS \pm \iint_S f_2(x, y) dS$
3. Пусть  $S$  разбита на несколько частей  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , которые не имеют общих внутренних точек, тогда:

$$\iint_S f(x, y) dS = \iint_{S_1} f(x, y) dS + \iint_{S_2} f(x, y) dS + \dots + \iint_{S_k} f(x, y) dS.$$

4. Если  $f(x, y) \leq \phi(x, y)$  при  $(x, y) \in S$ , то

$$\iint_S f(x, y) dS \leq \iint_S \phi(x, y) dS.$$

5. Если  $m$  и  $M$  наименьшее и наибольшее значения  $f(x, y)$  при  $(x, y) \in S$ , то

$$m \cdot S \leq \iint_S f(x, y) dS \leq M \cdot S$$

(напомним, что под  $S$  также понимается и площадь области  $S$ ).

6. Теорема о среднем. Если  $f(x, y)$  непрерывна в  $S$ , то найдется такая точка  $P_0(x_0, y_0) \in S$ , что

$$\iint_S f(x, y) dS = f(x_0, y_0) \cdot S,$$

при этом величина  $f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) dS$  называется *средним значением функции  $f(x, y)$*  в области  $S$ .

Вычисление двойного интеграла по формуле (3.1) достаточно сложно, поэтому его сводят к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

**Определение 12.** Область  $S$  называется *правильной (стандартной) в направлении  $ou$* , если она образована линиями  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , ( $a < b$ ), причем

на отрезке  $[a, b]$  обе функции  $\varphi_1, \varphi_2$  непрерывны и  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  (см. рис. 3.3). В частности, любая из прямолинейных границ  $x = a$  или  $x = b$  может вырождаться в точку. Заметим, что любая прямая, параллельная оси  $ou$  и проходящая через какую-либо внутреннюю точку области  $S$  пересекает границу  $\partial S$  только в двух точках  $M_1, M_2$ .

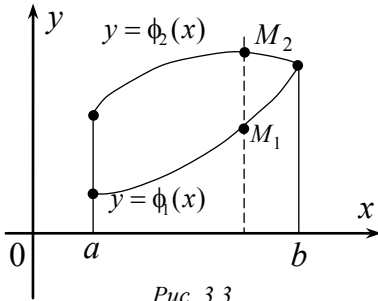


Рис. 3.3

**Теорема 10 (о вычислении двойного интеграла).** Если  $f(x, y)$  непрерывна в области  $S$ , которая является правильной в направлении  $ou$ , то:

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3.2)$$



Средний и правый интегралы в формуле (3.2) называются *повторными* или *двукратными* интегралами. Формула (3.2) означает, что для вычисления указанного двойного интеграла нужно сначала найти внутренний

определенный интеграл  $\Phi(x) = \int_{\phi(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ , считая  $x$  фиксированным (а

значит нижний и верхний пределы интегрирования  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  также будут фиксированными). Полученную функцию  $\Phi(x)$  надо затем проинте-

грировать по  $x$  от  $a$  до  $b$ , т.е. вычислить  $\int_a^b \Phi(x) dx$ .

**Определение 13.** Область  $S$  называется *правильной (стандартной) в направлении  $ox$* , если она образована линиями  $x = \psi_1(y)$ ,  $x = \psi_2(y)$  и прямыми  $y = c$ ,  $y = d$  ( $c < d$ ), причем на  $[c, d]$  обе функции  $\psi_1(y)$  и  $\psi_2(y)$  непрерывны и  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ . Если область правильная как в направлении  $ox$ , так и в направлении  $oy$  то она называется *правильной (стандартной)*.

Для  $f(x, y)$  непрерывной в области  $S$ , правильной в направлении  $ox$ , справедлива формула, аналогичная (3.2):

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (3.3)$$

*Замечания.*

1. Если область  $S$  правильная, то для вычисления двойного интеграла можно пользоваться любой из формул (3.2), (3.3).

2. Если область  $S$  не является правильной ни в каком из направлений  $ox$  или  $oy$ , то ее следует разбить на правильные в каких-либо направлениях области и затем использовать свойство двойного интеграла и формулы (3.2), (3.3).

**Пример 19.** Вычислить  $J = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,

где  $S$  — четверть круга радиуса  $a$  с центром в точке  $O(0, 0)$ , для которой  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

Область  $S$  правильная в обоих направлениях (см. рис. 3.4). В направлении  $oy$  будем иметь  $\varphi_1(x) = 0$ ,  $\varphi_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ , т.к. уравнение окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ .

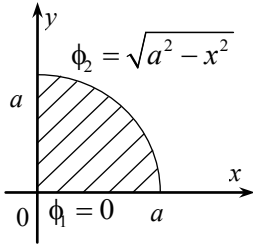


Рис. 3.4

Применяя формулу (3.2), получим:

$$J = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \int_0^a dx \left( \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \int_0^a dx (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \int_0^a \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi a}{2}.$$

**Пример 20.** Вычислить  $J = \iint_S (x^2 \sin^2 y) dS$ , где  $S$  образована осью  $oy$  и кривой  $x = 3 \cos y$ .

Решение. Область  $S$  правильная. В направлении  $ox$  будем иметь:  $\psi_1(y) = 0$ ;  $\psi_2(y) = 3 \cos y$ ;  $c = -\frac{\pi}{2}$ ;  $d = \frac{\pi}{2}$ .

Согласно формуле (3.3) получим

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3 \cos y} (x^2 \sin^2 y) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \sin^2 y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{3 \cos y} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \left[ \frac{1}{3} \sin^2 y (3 \cos y)^3 \right] =$$

$$= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y (1 - \sin^2 y) d(\sin y) = 9 \left[ \frac{\sin^3 y}{3} - \frac{\sin^5 y}{5} \right] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}.$$

### 3.2. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Как мы уже знаем, при вычислении определенного интеграла для упрощения расчетов часто используется замена переменной. Аналогичным образом, вычисление двойного интеграла иногда можно упростить заменой переменных  $x, y$  новыми переменными  $u, v$ . Здесь рассмотрим лишь случай замены декартовых координат  $x, y$  полярными  $r, \varphi$ , который очень важен для приложений. Выбрав в качестве полюса начало декартовой системы координат, а в качестве полярной оси  $-ox$ , получим  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

**Определение 14.** Область  $S$  называется *правильной (стандартной) в полярных координатах*, если она образована лучами  $\varphi = \alpha$  и  $\varphi = \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) и линиями  $r = r_1(\varphi)$ ,  $r = r_2(\varphi)$ , причем на отрезке  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  обе функции  $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$  непрерывны и  $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$  (см. рис. 3.5).

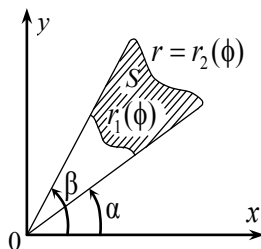


Рис. 3.5

Можно показать, что если  $f(x, y)$  непрерывна в области  $S$ , которая является *правильной (стандартной) в полярных координатах*, то:

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (3.4)$$

Заметим, что если полюс лежит внутри  $S$ , то  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , т.е.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2\pi$ . Если область  $S$  не является *правильной в полярных координатах*, то ее следует разбить на *правильные* части.

С помощью двойного интеграла можно решать ряд прикладных задач. Среди них нахождение:

1. Площади области  $S$ ;
2. Объема цилиндрического тела;
3. Массы  $M$  пластинки, занимающей область  $S$ ;
4. Статических моментов  $M_x$  и  $M_y$  пластинки относительно координатных осей  $ox$  и  $oy$  соответственно;
5. Координат центра тяжести пластины  $x_c$  и  $y_c$ ;
6. Моментов инерции пластинки относительно координатных осей  $J_x$  и  $J_y$ ;
7. Моментов инерции относительно начала координат  $J_o$ .

**Пример 21.** Найти площадь фигуры, ограниченной прямой  $r \cos \varphi = 1$  (т.е.  $x = 1$ ) и окружностью  $r = 2$  и не содержащей начала координат (см. рис. 3.6).

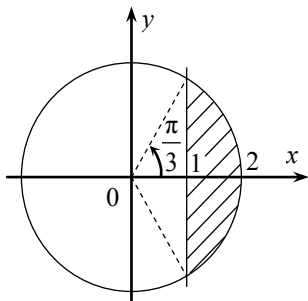


Рис. 3.6

Как было указано выше, площадь  $S = \iint_S dS$ . Здесь область  $S$  образована линиями  $r_1 = \frac{1}{\cos \varphi}$ ,  $r_2 = 2$  и лучами  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$  (т.к.  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \frac{1}{2}$ ). Таким образом область  $S$  правильная в полярных координатах и ее площадь равна:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^2 r dr = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \left( \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{\cos \varphi}}^2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left( 2 - \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \left( 2\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \text{ (кв. ед.)}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что эту же площадь можно найти и с помощью определенного интеграла.

**Пример 22.** Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью  $xoy$ , цилиндром  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a = \text{const}$ ) и конусом  $x^2 + y^2 = z^2$  при  $z \geq 0$ .

Линией пересечения цилиндра с плоскостью  $xoy$  является окружность радиуса  $a$  с центром на оси  $ox$  в точке  $a$  ( $a > 0$ ), т.е. рассматриваемое тело ограничено кругом  $S = \{ (x, y) | (x-a)^2 + y^2 \leq a^2 \}$ , конической поверхностью  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными  $OZ$  (см. рис. 3.7).

Как было отмечено ранее,

$$V = \iint_S f(x, y) dS = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

Этот интеграл удобнее вычислить в полярной системе координат по формуле (3.4), при этом  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Уравнение окружности  $\partial S$  (границы круга  $S$ ) получим в виде:

$$(r \cos \varphi - a)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = a^2,$$

$$\text{т.е. } r(r - 2a \cos \varphi) = 0,$$

откуда  $r = 2a \cos \varphi$ , при этом  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  (верх-

няя полуокружность) и  $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$  (нижняя полуокружность см. рис. 3.8).

В силу симметрии тела относительно плоскости  $xOz$ , ограничимся рассмотрением его половины, соответствующей  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . В данном случае

кривая  $r_1(\varphi)$  формулы (3.4) вырождается в точку

$r = 0$ ;  $r_2(\varphi) = 2a \cos \varphi$ ;  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Та-

ким образом,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r \cdot r dr = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \varphi} = 2 \int_0^{\pi/2} 8 \frac{a^3}{3} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{16a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{16a^3}{3} \left( \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{16a^3}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{32a^3}{9} (\text{куб. ед.}). \end{aligned}$$

Пусть в плоскости  $xOy$  область  $S$  занята плоской фигурой (пластинкой), поверхностная плотность которой задана как функция координат  $\rho(x, y)$ . Тогда масса всей пластинки равна

$$M = \iint_S \rho(x, y) dS. \quad (3.5)$$

Координаты центра тяжести  $C(x_c, y_c)$  пластинки вычисляются по формулам

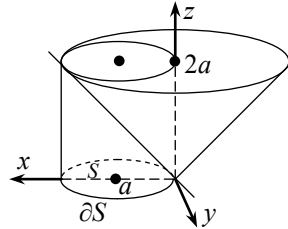


Рис. 3.7

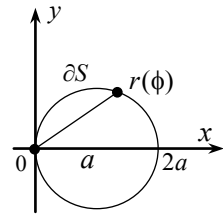


Рис. 3.8

$$x_c = \frac{M_y}{M}, y_c = \frac{M_x}{M}, \quad (3.6)$$

где  $M_x = \iint_S y\rho(x,y)dS, M_y = \iint_S x\rho(x,y)dS$ , — статические моменты пластинки относительно осей  $ox, oy$ .

Если пластинка однородна, то  $\rho(x,y) = \rho_0 = const$ .

Моменты инерции  $J_x, J_y$  пластинки относительно осей  $ox$  и  $oy$ , а также момент инерции  $J_0$  относительно начала координат определяются соотношениями:

$$J_x = \iint_S y^2\rho(x,y)dS, J_y = \iint_S x^2\rho(x,y)dS, J_0 = J_x + J_y. \quad (3.7)$$

**Пример 23.** Найти координаты центра тяжести однородной пластинки ( $\rho(x,y) = \rho_0 = const$ ), имеющей форму кругового сектора радиуса  $a$  с углом при вершине  $2\alpha$  (см. рис. 3.9).

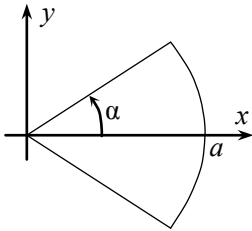


Рис. 3.9

Проведем расчеты по формулам (3.5), (3.6) в полярных координатах  $r, \varphi$  пользуясь соотношением (3.4). В силу симметрии относительно оси  $ox$  получим

$$M = \rho_0 \iint_S dS = 2\rho_0 \int_0^\alpha d\varphi \int_0^a r dr = 2\rho_0 \int_0^\alpha \frac{a^2}{2} d\varphi = \rho_0 a^2 \alpha.$$

В силу той же симметрии ясно, что  $y_c = 0$ , а  $M_y$  можно найти таким образом ( $x = r \cos \varphi$ ):

$$\begin{aligned} M_y &= \rho_0 \iint_S x dS = 2\rho_0 \int_0^\alpha d\varphi \int_0^a r^2 \cos \varphi dr = 2\rho_0 \int_0^\alpha d\varphi \cos \varphi \frac{a^3}{3} = \\ &= \frac{2}{3} \rho_0 a^3 \sin \varphi \Big|_0^\alpha = \frac{2}{3} \rho_0 a^3 \sin \alpha, \end{aligned}$$

в результате чего:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{2\rho_0 a^3 \sin \alpha}{3\rho_0 a^2 \alpha} = \frac{2}{3} a \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

## 4. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл и его вычисление

### 4.1. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл и его вычисление

Пусть в замкнутой ограниченной области  $V$  пространства  $oxyz$  задана функция  $u = f(x, y, z) = f(P)$ ,  $P \in V$ . Аналогично тому, как это делалось для случая двух переменных, разобьем  $V$  на  $n$  малых частей  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$  (буквами  $V, \Delta V_1, \dots, \Delta V_n$  будем обозначать как сами области, так и их объемы). В каждой области  $\Delta V_i$  выберем по произвольной точке  $P_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и составим сумму, называемую интегральной:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i.$$

Дробя  $V$  на все большее количество частей, будем стягивать каждую из них в точку (при этом максимальное расстояние между точками границы области  $\Delta V_i$ , т.е. диаметр  $diam \Delta V_i$  стремится к нулю). В результате получим последовательность интегральных сумм  $\sigma_n, n \rightarrow \infty$ .

**Определение 15.** Если существует предел интегральных сумм  $\lim_{diam \Delta V_i \rightarrow 0} \sigma_n$ , который не зависит ни от способа разбиения  $V$ , ни от выбора точек  $P_i \in \Delta V_i$ , то этот предел называется *тройным интегралом* от функции  $f(x, y, z)$  по области  $V$  и обозначается

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_V f(P) dV = \lim_{diam \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i, \end{aligned} \quad (4.1)$$

при этом  $V$  называется *областью интегрирования*,  $dV$  — *элементом объема*.

**Теорема 11 (о существовании тройного интеграла).** Если функция  $u = f(x, y, z)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $V$ , то тройной интеграл (4.2) существует.

*Замечания.*

1. Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам  $1^0-6^0$  двойного интеграла.
2. Если объемная плотность  $\rho$  тела, занимающего область  $V$ , задана как функция координат  $\rho = f(x, y, z)$ , то тройной интеграл (4.2) равен массе  $M$  этого тела.
3. Если в формуле (4.2) принять  $f(x, y, z) \equiv 1$ , то тройной интеграл равен объему тела  $V = \iiint_V dV$ .

Вычисление тройного интеграла сводят к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть замкнутая ограниченная область интегрирования  $V$  обладает следующими свойствами:

- 1) она вся проецируется на плоскость  $oxy$  в двумерную область  $S$ , правильную в направлении  $oy$ , т.е. ограниченную прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиками непрерывных функций  $y = \phi_1(x)$  и  $y = \phi_2(x)$  ( $\phi_2(x) \geq \phi_1(x)$ ) при  $x \in [a, b]$ );

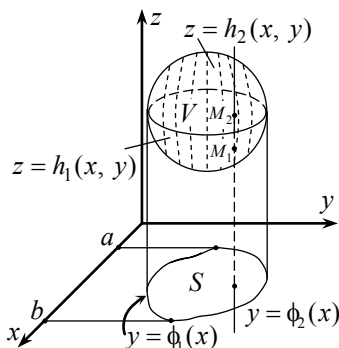


Рис. 4.1

- 2) снизу область  $V$  ограничена поверхностью, определяемую функцией  $z = h_1(x, y)$ , а сверху — поверхностью, определяемую функцией  $z = h_2(x, y)$ , причем обе функции непрерывны в  $S$  и  $h_2(x, y) \geq h_1(x, y)$  (см. рис. 4.1).

Заметим, что любая прямая, параллельная оси  $z$  и проходящую через какую-либо внутреннюю точку области  $V$ , пересечет ее границу (т.е. ограничивающую ее поверхность) только в двух точках  $M_1$  и  $M_2$ .

**Теорема 12 (о вычислении тройного интеграла).** Если  $u = f(x, y, z)$  непрерывна в области  $V$  рассмотренного вида, то:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_S \left\{ \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dS = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (4.2)$$



Самый правый интеграл в формуле (4.2) называется *трехкратным интегралом* по области  $V$ .

Если проекция  $V$  на  $oxy$  является правильной в направлении  $ox$ , то левое равенство в формуле (4.3) остается в силе и мы получим трехкратный интеграл, соответствующий соотношению (4.2).

**Пример 24.** Вычислить  $J = \iiint_V x^2 dV$ , где  $V$  — шар  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

Поскольку проекция шара на  $oxy$  — круг  $x^2 + y^2 = R^2$ , то получим:

$$J = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 dz.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая  $x, y$  постоянными:

$$J_1(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 dz = x^2 z \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 2x^2 \sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Затем, считая  $x$  постоянным, вычислим:

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2x^2 \sqrt{R^2-x^2-y^2} dy = \\ &= 2x^2 \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dy = 2x^2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2-y^2} dy, \end{aligned}$$

где  $a = \sqrt{R^2-x^2}$ . Поскольку:

$$\int \sqrt{a^2-y^2} dy = \frac{1}{2} \left[ a^2 \arcsin \frac{y}{a} + y \sqrt{a^2-y^2} \right] + C,$$

то

$$\begin{aligned} J_2(x) &= 2x^2 \cdot \frac{1}{2} \left[ a^2 \arcsin \frac{a}{a} + a \sqrt{a^2-a^2} - a^2 \arcsin \left( -\frac{a}{a} \right) + a \sqrt{a^2-a^2} \right] = \\ &= 2a^2 x^2 \arcsin 1 = \pi a^2 x^2 = \pi x^2 (R^2 - x^2). \end{aligned}$$

Теперь найдем  $J$ :

$$J = \int_{-R}^R \pi x^2 (R^2 - x^2) dx = \pi \left[ R^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-R}^R = 2\pi \left[ \frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right] = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

## 4.2. Геометрические и механические приложения тройного интеграла

**Пример 25.** Найдите с помощью тройного интеграла объем шара  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

Поскольку  $V = \iiint_V dV$ , то, проделав все выкладки предыдущего примера, с той лишь разницей, что здесь  $f(x, y, z) \equiv 1$ , а не  $x^2$ , получим известную формулу  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

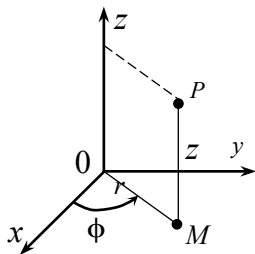


Рис. 4.2

Введем понятие цилиндрической системы координат. Для этого рассмотрим в декартовой системе координат точку  $P(x, y, z)$  и ее проекцию  $M$  на плоскость  $oxy$  (см. рис. 4.2). Положение  $P$  вполне определяется полярными координатами  $r, \varphi$  точки  $M$  в плоскости  $oxy$  и аппликатой  $Z$ . Указанные величины  $r, \varphi, z$  называются *цилиндрическими координатами* точки  $M$ , причем ее декартовы координаты  $x, y, z$  связаны с цилиндрическими  $r, \varphi, z$  соотношениями:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z \quad (4.3)$$

Если проекцией тела  $V$  на плоскость  $oxy$  является область  $S$ , правильная в полярных координатах, то можно получить выражение для тройного интеграла в цилиндрической системе координат:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{h_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{h_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz. \quad (4.4)$$

**Пример 26.** Найти массу  $M$  прямого кругового цилиндра высотой  $h$  и радиуса  $R$ , если его плотность  $\rho(P)$  равна квадрату расстояния  $r$  от точки  $P$  до его оси.

Рассмотрим цилиндрическую систему координат, выбрав начало оси  $Z$  в центре основания цилиндра, а саму ось направив вдоль оси цилиндра (см. рис. 4.3). Тогда  $\rho(P) = r^2$  и для массы  $M$ , согласно (4.4) получим:

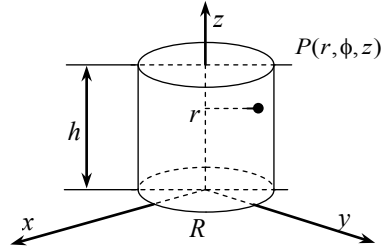


Рис. 4.3

$$M = \iiint_V r^2 dV = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr \int_0^h r^2 dz = h \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi h R^4}{2}.$$

Если тело с плотностью  $\rho(x, y, z)$  занимает область  $V$ , то для координат его центра тяжести  $C(x_c, y_c, z_c)$ , а также моментов инерции  $J_x, J_y, J_z$  относительно декартовых осей  $ox, oy, oz$  справедливы формулы:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}, y_c = \frac{M_{zx}}{M}, z_c = \frac{M_{xy}}{M}, \quad (4.5)$$

где  $M_{xy} = \iiint_V \rho(x, y, z) z dV;$   $M_{yz} = \iiint_V \rho(x, y, z) x dV;$

$M_{zx} = \iiint_V \rho(x, y, z) y dV$  — статические моменты относительно координатных плоскостей;

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ J_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \\ J_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (4.6)$$

## 5. Криволинейный интеграл, физический смысл, его вычисление. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

### Связь криволинейного и двойного интегралов.

#### Формула Грина

##### 5.1. Криволинейный интеграл и его вычисление

**Определение 16.** Если каждой точке  $M(x, y)$  области  $S$  плоскости  $oxy$  поставлен в соответствие вектор  $\vec{F}(M)$ , то говорят, что в области  $S$  задано *векторное поле*  $\vec{F}(M)$  или  $\vec{F}(x, y)$ .

Проекциями вектора (вектор-функции)  $\vec{F}(x, y)$  на оси координат являются функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , т.е.:

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \{P(x, y), Q(x, y)\}.$$

Пусть в области  $S$  плоскости  $oxy$  задана непрерывная кривая  $L$  с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$ . Пусть в области  $S$  также задано векторное поле  $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ .

Разобьем кривую  $L$  на  $n$  не обязательно равных частей точками:

$$A_0(x_0, y_0) = A, A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), A_n(x_n, y_n) = B.$$

На каждом участке  $A_{i-1}A_i$  выберем по произвольной точке  $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots, n$  (см. рис. 5.1) и составим сумму скалярных произведений, называемую *интегральной*:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i],$$

при этом  $\overline{A_{i-1}A_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Дробя кривую  $L$  на все большее количество участков и стягивая длину  $\Delta l_i$  каждого из них к нулю, получим последовательность интегральных сумм  $\sigma_n (n \rightarrow \infty)$ .

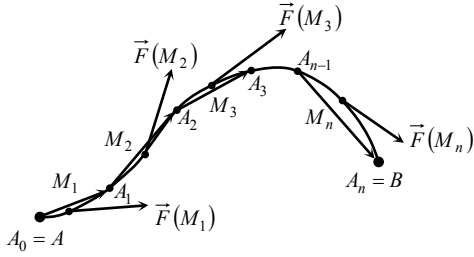


Рис. 5.1

**Определение 17.** Если существует предел интегральных сумм  $\lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sigma_n$ , который не зависит ни от способа разбиения  $L$ , ни от выбора точек  $M_i$ , то этот предел называется *криволинейным интегралом* от вектор-функции  $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  вдоль кривой  $L$  (дуги  $AB$ ) в направлении от  $A$  к  $B$  и обозначается:

$$\begin{aligned}
 \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\
 &= \int_{(A)}^{(B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L \vec{F}(x, y)d\vec{r} = \\
 &= \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i], \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

где  $d\vec{r} = \{dx, dy\}$ . Согласно данному определению, криволинейный интеграл (4.9) равен работе силы  $\vec{F}$  при перемещении вдоль кривой  $L$  от точки  $A$  к точке  $B$ . Отметим некоторые свойства криволинейного интеграла.

1. При изменении направления интегрирования вдоль кривой  $L$  знак интеграла (5.1) меняется на противоположный

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy.$$

2. *Свойство аддитивности* (предполагается, что все интегралы существуют):

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy.$$

**Определение 18.** Если кривая  $L$  замкнута (т.е. ее начальная и конечная точки совпадают), то интеграл (4.9) называется *циркуляцией* векторного поля  $\vec{F}$  по замкнутому контуру  $L$  и обозначается:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_L \vec{F}d\vec{r}, \quad (5.2)$$

при этом обязательно следует указать направление обхода контура  $L$ .

Рассмотрим кривую  $L$  (дугу  $AB$ ), заданную параметрически с помощью функций  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), которые имеют на  $[\alpha, \beta]$  непрерывные производные  $\varphi'(t), \psi'(t)$ , причем значение  $t = \alpha$  соответствует точке  $A$ , а  $t = \beta$  — точке  $B$ . Такую кривую будем называть гладкой.

**Теорема 13 (о существовании криволинейного интеграла).** Для любой вектор-функции  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ , непрерывной вдоль гладкой кривой  $AB$  (т.е. при  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывных вдоль  $AB$ ) существует криволинейный интеграл (5.1). При этом:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt. \quad (5.3)$$

**Пример 27.** Вычислить  $J = \int_L y^2 dx + x^2 dy$ ,

где  $L$  — верхняя половина эллипса, заданного параметрически:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ( $t$  — полярный угол), пробегаемая по ходу часовой стрелки.

Согласно (5.3) и свойству интеграла будем иметь:

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^{\pi} [y^2(t)x'(t) + x^2(t)y'(t)] dt = -\int_0^{\pi} [b^2 \sin^2 t(-a \sin t) + a^2 \cos^2 t(b \cos t)] dt = \\ &= -\int_0^{\pi} [ab^2(1 - \cos^2 t)d \cos t + a^2b(1 - \sin^2 t)d \sin t] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -ab^2 \left[ \cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right] \Big|_0^\pi - a^2b \left[ \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right] \Big|_0^\pi = \\
 &= -ab^2 \left( -2 + \frac{2}{3} \right) - a^2b(0 - 0) = \frac{4}{3}ab^2.
 \end{aligned}$$

## 5.2. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь криволинейного и двойного интегралов. Формула Грина

Пусть границей  $\partial S$  области  $S$  является гладкий замкнутый контур  $L$ . Если функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$  непрерывны в  $\bar{S} = S \cup \partial S$ , то справедлива формула Грина:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.4)$$

при этом контур  $L$  обходится в положительном направлении, т.е. так, чтобы область  $S$  оставалась все время слева (см. рис. 5.2).

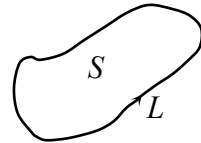


Рис. 5.2

**Пример 28.** Вычислить:  $J = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$ ,

где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ , пробегаемая против хода часовой стрелки.

Поскольку  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(-x^2 y)}{\partial y} = -x^2$ , то согласно (5.4) получим:

$$J = \iint_S (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Если в (5.3) принять  $P(x) \equiv 0$ ,  $Q(x) = x$ , или же  $P(x) = -y$ ,  $Q(x) \equiv 0$ , то получим формулы вычисления площади  $S$  фигуры, ограниченной замкнутым контуром  $L$ :

$$S = \oint_L x dy = -\oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx, \quad (5.5)$$

при этом обход контура  $L$  совершается в положительном направлении.

**Пример 29.** Вычислить площадь, ограниченную эллипсом  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .

Применяя формулы (5.5) и (5.3) будем иметь:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t (b \cos t) - b \sin t (-a \sin t)] dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

**Определение 19.** Если для любых двух точек  $A$  и  $B$  из области  $S$  интеграл  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  по любому контуру, целиком лежащему в  $S$  и соединяющему  $A$  и  $B$ , принимает одно и то же значение, зависящее только от положения точек  $A$  и  $B$ , то говорят, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования в области  $S$ .

**Теорема 14.** Для того, чтобы интеграл:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

в области  $S$  не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где  $\Gamma$  — любой замкнутый контур, лежащий в  $S$ .

**Определение 20.** Область  $S$  называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в  $S$ , ограниченная им часть плоскости целиком содержится в  $S$ .

**Теорема 15.** Пусть  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ , непрерывны в односвязной области  $S$ .

Тогда для того, чтобы  $\int_L Pdx + Qdy$  в  $S$  не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы в  $S$  выполнялось соотношение:



$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \quad (5.6)$$

Будем называть выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  *дифференциальным*.

**Теорема 16.** Пусть  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$  непрерывны в односвязной области  $S$ . Тогда для того чтобы дифференциальное выражение  $Pdx + Qdy$  в области  $S$  было полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ , т.е.  $dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $S$  выполнялось соотношение (5.6).

Пусть в  $S$  задано векторное поле  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ .

**Определение 21.** Если функция  $U(x, y)$  такова, что  $dU = Pdx + Qdy$  в  $S$ , то она называется *первообразной* данного дифференциального выражения;  $U(x, y)$  также называется *потенциалом* векторного поля  $\vec{F}$ , а само поле  $\vec{F}$  — *потенциальным*.

Важно подчеркнуть следующее:

(1) Для первообразной  $U(x, y)$  выполняются соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \quad (5.6)$$

(2) Можно показать, что первообразная  $U(x, y)$  находится по ее дифференциалу с помощью формулы

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dU = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta, \quad (5.8)$$

при этом начальная точка  $M_0(x_0, y_0)$  фиксирована, конечная —  $M(x, y)$  является переменной точкой области  $S$ , а сам интеграл не зависит от пути интегрирования от  $M_0$  к  $M$ . Переменные интегрирования здесь обозначены через  $\xi, \eta$ , чтобы не спутать их с координатами точки  $M(x, y)$ .

(3) Если  $dU = Pdx + Qdy$ , то для любых двух точек  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_1(x_1, y_1)$  справедлива формула

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0). \quad (5.9)$$

Поскольку при заданных начальной  $M_0(x_0, y_0)$  и конечной  $M(x, y)$  точках для вычисления интеграла (5.8) можно взять любой контур, то выберем в качестве него ломаную  $M_0M_1M$ ; где  $M_1(x, y_0)$ . Тогда вдоль  $M_0M_1$  выполняется  $\eta = y_0, d\eta = 0, x_0 \leq \xi \leq x$ , а вдоль  $M_1M$   $\xi = x, d\xi = 0, y_0 \leq \eta \leq y$ , откуда, согласно (5.8) будем иметь:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta. \quad (5.10)$$

### Пример 30.

а) Найдите первообразную  $U(x, y)$  дифференциального выражения  $xdx + ydy$ .

б) Вычислите интеграл  $J = \int_{(0,1)}^{(3,4)} xdx + ydy$ .

Данное выражение есть полный дифференциал, поскольку  $P(x, y) = x, Q(x, y) = y$  и  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ . Зафиксируем некоторую точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Тогда, согласно (5.10),

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x \xi d\xi + \int_{y_0}^y \eta d\eta = \frac{\xi^2}{2} \Big|_{x_0}^x + \frac{\eta^2}{2} \Big|_{y_0}^y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2).$$

Если теперь константу  $-\frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2)$  обозначить через  $c$ , то мы получим множество всех первообразных:  $U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c$ .

Для того, чтобы посчитать  $J$ , воспользуемся формулой (5.9):

$$J = U(3; 4) - U(0; 1) = \frac{1}{2}(9 + 16) + c - \frac{1}{2}(0 + 1) - c = 12.$$

## 6. Формула Гаусса-Остроградского. Поверхностный интеграл, его вычисление. Формула Стокса

Напомним некоторые понятия, введенные в курсе дифференциального исчисления функций многих переменных. Пусть в объеме  $V \subset R^3$  введены непрерывные скалярное и векторное поля  $U = U(x, y, z)$  и  $\vec{a}(x, y, z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  соответственно.

**Определение 22.** Вектор

$$\text{grad}U(M) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (6.1)$$

называется *градиентом* поля  $U(M)$  в точке  $M \in V$ .

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня в точке  $M$  в сторону возрастания функции  $U(M)$  и по длине равен:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Величина

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad}U \cdot \vec{l}^0 = \frac{1}{|\vec{l}|} \left( \frac{\partial U}{\partial x} l_x + \frac{\partial U}{\partial y} l_y + \frac{\partial U}{\partial z} l_z \right)$$

называется производной функции  $U(M)$  по направлению

$$\vec{l}^0 = \frac{1}{|\vec{l}|} (l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}).$$

**Определение 23.** *Дивергенцией* векторного поля  $\vec{a}(M)$  называется *скаляр*

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad (6.2)$$

*Вихрем* векторного поля  $\vec{a}(M)$  называется *вектор*

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{a}. \quad (6.3)$$

Формально последний вектор можно записать в удобном виде:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим поверхность  $S(M) \in V$  с единичным вектором внешней нормали

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}.$$

**Определение 24.** *Потоком векторного поля  $\vec{a}(M)$  через поверхность  $S$  в сторону, определенную единичным вектором нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  называется интеграл:*

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \vec{a} \cdot \vec{n} dS &\equiv \iint_{(S)} a_n dS \equiv \iint_{(S)} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [a_x(M_i) \cos \alpha + a_y(M_i) \cos \beta + a_z(M_i) \cos \gamma] \Delta S_i. \end{aligned} \quad (6.4)$$

**Теорема 17 (связь поверхностного и тройного интегралов).** Если  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , то справедлива следующая *формула Гаусса-Остроградского*

$$\oiint_{(S)} a_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (6.5)$$

**Определение 25.** Криволинейный интеграл векторного поля  $\vec{a}$  по кривой  $L$ :

$$\int_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \int_{(A)}^{(B)} a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (6.6)$$

представляет собой *работу поля*  $\vec{a}$  вдоль кривой  $L$  ( $A$  и  $B$  — начальная и конечная точки на кривой  $L$ ). Если кривая  $L$  — замкнутая, то криволинейный интеграл (6.6) называется *циркуляцией векторного поля*  $\vec{a}$  вдоль контура  $L$ .

**Теорема 18 (связь криволинейного и поверхностного интегралов).** Если замкнутая кривая  $L$  ограничивает двустороннюю поверхность  $S$ , то имеет формула Стокса:

$$\oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{(S)} (\text{rot} \vec{a})_n dS, \quad (6.7)$$

где  $\vec{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S$ , направление которого выбирается таким образом, чтобы для наблюдателя, смотрящего на направление  $\vec{n}$ , обход контура  $L$  совершается против хода часовой стрелки.

**Определение 26.** Векторное поле  $\vec{a}$  называется *потенциальным*, если существует функция  $U = U(M)$ , такая что  $\vec{a} = \text{grad} U$ .

Для потенциальности поля  $\vec{a}$ , определенного в односвязанной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е. чтобы  $\text{rot} \vec{a} = 0$ . В этом случае существует потенциал  $U$ , который определяется из уравнения  $dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ . Если потенциал  $U$  — однозначная функция, то

$$\int_{(A)}^{(B)} \vec{a} d\vec{r} = U(B) - U(A),$$

т.е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от точек начала и конца пути. В частности, для замкнутого контура  $L$  циркуляция вектора  $\vec{a}$  равна нулю  $\oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = 0$ .

## 7. Рекомендуемые задачи. Разбор варианта расчетно-графической работы

Раздел содержит некоторые типичные задачи, относящиеся к материалу, изложенному в предыдущих разделах. Сначала представлены общие

формулировки этих задач и даны образцы их решений в конкретных примерах. Если задача уже разбиралась ранее, то указывается соответствующая ссылка. Далее следуют варианты заданий для самостоятельного решения, относящиеся ко всем разобранным задачам.

### Разбор примера задания 1.

**Пример 31.** Вычислить двукратный интеграл  $J = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xydy$  и представить графически область интегрирования.

Решение. Область интегрирования  $S$  представлена на рис. 7.1.

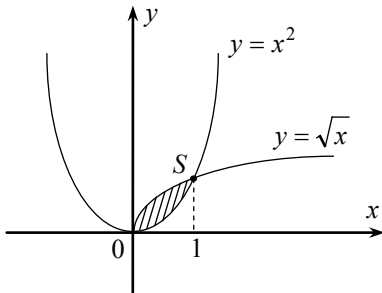


Рис. 7.1

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 dx x \left( \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(x - x^4) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

### Разбор примера задания 2.

**Пример 32.** Найдите двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$ ,

где

$$D = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}, \quad f(x, y) = 5.$$

Решение.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D 5 dx dy = 5 \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=x} dy = 5 \int_0^2 x dx = 10, ,$$

что в действительности совпадает с объемом прямой призмы с основанием в форме треугольника площади 2 (кв. ед.) и высотой 5 (ед. дл.).

### Разбор примера задания 3.

**Пример 33.** Переходя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл:

$$J = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{-d(a^2 - r^2)}{2\sqrt{a^2 - r^2}} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left( -\sqrt{a^2 - r^2} \right) \Big|_0^a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ad\varphi = \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

где  $S$  — четверть круга радиуса  $a$  с центром в точке  $O(0,0)$ , для которой  $x \geq 0, y \geq 0$ .

### Разбор примера задания 4.

**Пример 34.** Вычислите координаты центра тяжести однородной пластины, занимающей четверть эллипса:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, (x \geq 0, y \geq 0).$$

Приводим решение. Координаты центра тяжести для однородной пластины, занимающей область  $S$ , имеют вид:

$$x_c = \frac{M_y}{M}; y_c = \frac{M_x}{M}, \text{ где } M = \iint_S dx dy, M_y = \iint_S x dx dy, M_x = \iint_S y dx dy.$$

Вычислим двойные интегралы, переходя к обобщенным полярным координатам  $(r; \varphi)$ :  $\frac{x}{a} = r \cos \varphi; \frac{y}{b} = r \sin \varphi, a = 1; b = 2; 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$ , причем якобиан преобразования  $J(r; \varphi) = rab$ :

$$M = \iint_S dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (rab) dr = \frac{pab}{4} = \frac{\pi}{2};$$

$$M_y = \iint_S x dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (ar \cos \varphi)(rab) dr = a^2 b \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{a^2 b}{3} = \frac{2}{3};$$

$$M_x = \iint_S y dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (br \sin \varphi)(rab) dr = ab^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{ab^2}{3} = \frac{4}{3}.$$

В результате,  $x_c = \frac{4}{3\pi}; y_c = \frac{8}{3\pi}$ .

### Разбор примера задания 5.

**Пример 35.** Вычислите момент инерции относительно оси  $x$  для однородной пластины (плотность пластины положить равной 1) в форме треугольника, образованного прямыми  $x + y = 2, x = 2, y = 2$ .

Решение.

$$J_{xx} = \iint_S y^2 \rho_0 dx dy = |\rho_0 = 1| = \int_0^2 dx \int_{y=2-x}^{y=2} y^2 dy = \int_0^2 dx \left. \frac{y^3}{3} \right|_{2-x}^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 [2^3 - (2-x)^3] dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 12x) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 4.$$

**Пример 36.** Вычислить моменты инерции  $J_x, J_y, J_0$  однородной пластины в форме четверти круга  $x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0$  относительно осей  $ox, oy$  и начала координат.

Решение.

$$J_x = \rho_0 \iint_S y^2 dS, \quad J_y = \rho_0 \iint_S x^2 dS \quad (\rho \text{ — постоянная плотность пластины}).$$

Удобно перейти к полярным координатам  $y = r \sin \varphi, x = r \cos \varphi$ , тогда:

$$J_x = \rho_0 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin^2 \varphi r dr = \rho_0 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \rho_0 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{\rho_0}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\rho_0}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\rho_0}{8} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16} \rho_0.$$



Аналогично  $J_y = \frac{\pi}{16} \rho_0$ , причем очевидно  $J_x = J_y$  в силу симметрии пластины относительно прямой  $y = x$ . В результате получим  $J_0 = J_x + J_y = \frac{\pi}{8} \rho_0$ .

### Разбор примера задания 6.

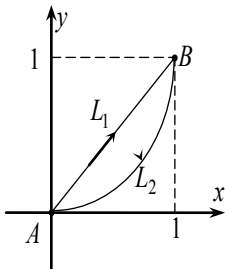


Рис. 7.2

**Пример 37.** Вычислить  $J = \int_{(A)}^{(B)} (x + y)dx + 2xydy$ ,

где  $A(0; 0)$ ;  $B(1; 1)$  — вдоль различных путей  $L_1$  и  $L_2$ :

$L_1$  — отрезок прямой  $AB$ ;

$L_2$  — участок  $AB$  параболы  $y = x^2$ .

#### Решение.

1) На пути  $L_1$   $y = x$ ,  $dy = dx$ , поэтому:

$$J = \int_0^1 [(x + x)dx + 2x^2 dx] = \int_0^1 (2x + 2x^2) dx = 2 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}.$$

2) На пути  $L_2$   $y = x^2$ ,  $dy = 2x dx$ , поэтому:

$$J = \int_0^1 [(x + x^2)dx + 2xx^2 \cdot 2x dx] = \int_0^1 (x + x^2 + 4x^4) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{4x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \right) = \frac{49}{30}.$$

### Разбор примера задания 7.

**Пример 38.** Вычислить  $J = \int_{A(1;1)}^{B(2;3)} y^2 dx + 2xydy$ .

Решение. Подынтегральное выражение действительно представляет собой полный дифференциал, поскольку  $P(x, y) = y^2$ ;  $Q(x, y) = 2xy$  и  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ , а это значит, что  $J$  не зависит от пути  $L$  интегрирования, соединяющего точки  $A$  и  $B$ .

Выбрав в качестве  $L$  ломаную  $AMB$ , где  $M(2; 1)$  получим:

$$J = \int_1^2 1^2 dx + \int_1^3 2 \cdot 2y dy = x \Big|_1^2 + \frac{4y^2}{2} \Big|_1^3 = 2 - 1 + 2(9 - 1) = 17.$$

## 8. Варианты расчетно-графических работ для самостоятельного решения

**Задание 1. Вычислите двукратный интеграл и представьте графически область интегрирования.**

$$1.1. \int_0^{\pi/2} dx \int_{\cos x}^1 y^2 dy \quad 1.2. \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2 dy}{y^2} \quad 1.3. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} x \sin y dx$$

$$1.4. \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} x^2 y dy \quad 1.5. \int_0^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 y \cos x dy \quad 1.6. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} x^3 (1+y) dx$$

$$1.7. \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{x^4}{y} dy \quad 1.8. \int_1^2 dx \int_0^{1/x} e^{xy} dy \quad 1.9. \int_0^{\pi} dy \int_0^{2 \sin y} e^{\cos y} dx$$

$$1.10. \int_1^e dx \int_0^{\ln x} x^2 e^y dy \quad 1.11. \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{x+1}}^1 xy^3 dy \quad 1.12. \int_0^1 dy \int_{y^3}^{\sqrt{y}} (x^2 + 1) y dx$$

$$1.13. \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{x+1} xy dy \quad 1.14. \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} y dy \quad 1.15. \int_0^1 dy \int_{y-1}^0 e^y dx$$

$$1.16. \int_{\pi/4}^{\pi/3} dx \int_{ctg x}^{tg x} dy$$

**Задание 2.** Найдите двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$ . Сравните результат с объемом соответствующего тела.

- 2.1.  $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$ ;  $f(x, y) = 3$ .  
 2.2.  $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}$ ;  $f(x, y) = 3$ .  
 2.3.  $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}$ ;  $f(x, y) = 3y$ .  
 2.4.  $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}$ ;  $f(x, y) = 3x$ .  
 2.5.  $D = \{0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x\}$ ;  $f(x, y) = 3y$ .  
 2.6.  $D = \{0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x\}$ ;  $f(x, y) = 3x$ .  
 2.7.  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x\}$ ;  $f(x, y) = 6x$ .  
 2.8.  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x\}$ ;  $f(x, y) = 6y$ .  
 2.9.  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x\}$ ;  $f(x, y) = 2x$ .  
 2.10.  $D = \{0 \leq x \leq 1; x-1 \leq y \leq 1-x\}$ ;  $f(x, y) = 6x$ .  
 2.11.  $D = \{0 \leq x \leq 1; x-1 \leq y \leq 1-x\}$ ;  $f(x, y) = 6y$ .  
 2.12.  $D = \{0 \leq x \leq 1; x-1 \leq y \leq 1-x\}$ ;  $f(x, y) = 6$ .  
 2.13.  $D = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ ;  $f(x, y) = x$ .  
 2.14.  $D = \{(x; y) | 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3\}$ ;  $f(x, y) = 10$ .  
 2.15.  $D = \{(x; y) | 2 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 3\}$ ;  $f(x, y) = 5$ .  
 2.16.  $D = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$ ;  $f(x, y) = 4$ .

**Задание 3.** Переходя к полярным координатам, вычислите заданные двойные интегралы.

- 3.1  $\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ , где  $S$  — полукруг радиуса  $r=2$  с центром в начале координат ( $y \geq 0$ ).
- 3.2  $\iint_S \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ , где  $S$  — круг  $x^2+y^2 \leq 2x$ .
- 3.3  $\iint_S \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ , где  $S$  — круг  $x^2+y^2 \leq 2y$ .

- 3.4  $\iint_S x\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $S$  — четверть круга радиуса  $r = 2$  с центром в начале координат ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).
- 3.5  $\iint_S y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $S$  — четверть круга радиуса  $r = 2$  с центром в начале координат ( $x \leq 0, y \geq 0$ ).
- 3.6  $\iint_S y dx dy$ , где  $S$  — круг  $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$ .
- 3.7  $\iint_S x dx dy$ , где  $S$  — круг  $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ .
- 3.8  $\iint_S \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ , где  $S$  — четверть круга радиуса  $r = 3$  с центром в начале координат ( $x \geq 0, y \leq 0$ ).
- 3.9  $\iint_S \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy$ , где  $S$  — четверть круга радиуса  $r = 4$  с центром в начале координат ( $x \leq 0, y \leq 0$ ).
- 3.10  $\iint_S x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $S$  — полукруг радиуса  $r = 2$  с центром в начале координат ( $x \geq 0$ ).
- 3.11  $\iint_S y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $S$  — четверть круга радиуса  $r = 2$  с центром в начале координат ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).
- 3.12  $\iint_S (x^2 - y^2) dx dy$ , где  $S$  — полукруг радиуса  $r = 3$  с центром в начале координат ( $y \leq 0$ ).
- 3.13  $\iint_S x dx dy$ , где  $S$  — полукруг  $x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x \geq 0$ .
- 3.14  $\iint_S y dx dy$ , где  $S$  — полукруг  $x^2 + y^2 + 2x \leq 0, y \geq 0$ .
- 3.15  $\iint_S xy^2 dx dy$ , где  $S$  — полукруг радиуса  $r = 1$  с центром в начале координат ( $x \geq 0$ ).

- 3.16  $\iint_S ux^2 dx dy$ , где  $S$  — четверть круга радиуса  $r=1$  с центром в начале координат ( $x \leq 0, y \geq 0$ ).

**Задание 4. Дайте чертеж и вычислите координаты центра тяжести однородной пластины, имеющей форму:**

- 4.1 треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(0;4), C(-2;4)$ .
- 4.2 фигуры, ограниченной кривыми  $y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4$ .
- 4.3 четверти эллипса  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .
- 4.4 фигуры, ограниченной кривой  $y = 1 - x^2$ , осью  $ox$  и осью  $oy$ .
- 4.5 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами:  
 $r \leq 2; \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$ .
- 4.6 треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(2;3), C(0;3)$ .
- 4.7 фигуры, ограниченной кривыми  $x = 1 - y^2; x - y + 1 = 0$ .
- 4.8 четверти эллипса  $x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .
- 4.9 фигуры, ограниченной кривой  $y = \cos x$ , осью  $ox$  и осью  $oy$ .
- 4.10 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами:  
 $r \leq 3; \frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ .
- 4.11 треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(-2;0), C(0;-3)$ .
- 4.12 фигуры, ограниченной кривыми  $x = y^2; x = 9$ .
- 4.13 четверти круга  $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ .
- 4.14 фигуры, ограниченной кривыми  $y = x^2; y = \sqrt{x}$ .
- 4.15 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами:  
 $r \leq 1; \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .
- 4.16 треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(1;0), C(1;-2)$ .

**Задание 5. Вычислите моменты инерции относительно указанных осей для однородной пластины, имеющей форму:**

- 5.1 Треугольника, ограниченного прямыми  $x + y = 2$ ;  $x = 2$ ;  $y = 2$  относительно оси  $ox$ .
- 5.2 Прямоугольника со сторонами 1 и 2 относительно оси, проходящей через меньшую сторону.
- 5.3 Треугольника, ограниченного прямыми  $y = x$ ;  $y = -x$ ;  $y = 1$  относительно оси  $oy$ .
- 5.4 Треугольника с вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(0; 1)$  относительно оси  $ox$ .
- 5.5 Квадрата, ограниченного линиями  $x = 0$ ;  $x = 2$ ;  $y = 0$ ;  $y = 2$  относительно начала координат.
- 5.6 Плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 + 2x^2$ ,  $y = 3x$ , относительно оси  $ox$ .
- 5.7 Кольцевой пластины  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  относительно оси  $ox$ .
- 5.8 Четверти кольца  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  относительно начала координат.
- 5.9 Треугольника, ограниченного прямыми  $x + y = 3$ ;  $x = 3$ ;  $y = 3$  относительно оси  $oy$ .
- 5.10 Прямоугольника со сторонами 2 и 3 относительно оси, проходящей через большую сторону.
- 5.11 Треугольника, ограниченного прямыми  $y = x$ ;  $y = -x$ ;  $y = 1$  относительно оси  $ox$ .
- 5.12 Треугольника с вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(0; 2)$  относительно оси  $oy$ .
- 5.13 Плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x^2$ ;  $y = 0$  относительно оси  $oy$ .
- 5.14 Плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 + 2x^2$ ,  $y = 3x$ , относительно оси  $oy$ .
- 5.15 Кольцевой пластины  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  относительно начала координат.
- 5.16 Полукольца  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ ,  $x \geq 0$ , относительно оси  $oy$ .

**Задание 6. Вычислите криволинейный интеграл.**

**Варианты 1–5:** вычислите интеграл вдоль указанной кривой от точки  $A$  до точки  $B$ .

**Варианты 6–10:** вычислите интеграл вдоль кривой  $L$ , заданной параметрически.

**Варианты 11–16:** вычислите интеграл по замкнутому контуру  $L$ , проходящего в положительном направлении; используйте формулу Грина. В вариантах 14–16 формулу Грина проверьте непосредственными вычислениями интегралов.

$$6.1 \quad \int_{(A)}^{(B)} \frac{x^2}{y+1} dx + xdy; \quad y = x^3; \quad A(0;0), \quad B(1;1)$$

$$6.2 \quad \int_{(A)}^{(B)} (x^2 - xy)dx + (xy + y^2)dy; \quad y = x^2; \quad A(1;1), \quad B(2;4)$$

$$6.3 \quad \int_{(A)}^{(B)} \frac{y^4}{x} dx - (y^3 + x^2y)dy; \quad y = \sqrt{x}; \quad A(1;1), \quad B(4;2)$$

$$6.4 \quad \int_{(A)}^{(B)} y^3 dx + xdy; \quad y = e^x; \quad A(0;1), \quad B(1;e)$$

$$6.5 \quad \int_{(A)}^{(B)} ydx + x^2ydy; \quad y = \ln x; \quad A(1;0), \quad B(e;1)$$

$$6.6 \quad \int_L y^2 dx + xdy; \quad x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$6.7 \quad \int_L xydx - (x+y)dy; \quad x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$6.8 \quad \int_L ydx - xdy; \quad x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$6.9 \quad \int_L x^2 ydx + (y-x)dy; \quad x = t^3, \quad y = t^4 - 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$6.10 \quad \int_L (x-y)dx + 2ydy; \quad x = t^2, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6.11 \quad \oint_L -y^3 dx + x^3 dy; \quad L \text{ — окружность } x^2 + y^2 = 4.$$

- 6.12  $\oint_L \left( 2x - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( 5y + \frac{x^3}{3} \right) dy$ ;  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 6.13  $\oint_L (-2yx^2 + x + 1) dx + (2x - 1)y^2 dy$ ;  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = 9$ .
- 6.14  $\oint_L (x + y) dx + x^2 y dy$ ;  $L$  — треугольник с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(1;0)$ ,  $C(1;2)$ .
- 6.15  $\oint_L (2xy + 1) dx + xy^2 dy$ ;  $L$  — треугольник с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(1;-3)$ ,  $C(1;0)$ .
- 6.16  $\oint_L (x^2 - y^2) dx + 2(x - y)^2 dy$ ;  $L$  — треугольник с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(-1;3)$ ,  $C(-1;0)$ .

**Задание 7. Вычислите криволинейный интеграл от выражения, являющегося полным дифференциалом.**

- 7.1.  $\int_{A(-1;2)}^{B(2;3)} y dx + x dy$     7.2.  $\int_{A(0;0)}^{B(1;1)} (x + y)(dx + dy)$
- 7.3.  $\int_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} \cos x dx + \sin y dy$     7.4.  $\int_{A(1;2)}^{B(2;5)} x^2 dx + y^2 dy$
- 7.5.  $\int_{A(0;0)}^{B(1;2)} x dx + y dy$     7.6.  $\int_{A(-1;1)}^{B(2;2)} x^2 dx - y dy$
- 7.7.  $\int_{A(0;0)}^{B(1;2)} 2xy dx + x^2 dy$     7.8.  $\int_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)} \sin x dx - \cos y dy$
- 7.9.  $\int_{A(-2;1)}^{B(0;2)} (x + y) dx + x dy$     7.10.  $\int_{A(0;0)}^{B(1;1)} x dx + 2y^2 dy$
- 7.11.  $\int_{A(0;0)}^{B(2;1)} (x - y) dx - x dy$     7.12.  $\int_{A(1;1)}^{B(2;3)} 2x dx - y dy$



$$7.13. \int_{A(-1;0)}^{B(0;2)} xdx - y^2 dy \quad 7.14. \int_{A(-1;0)}^{B(2;2)} x^2 dx - y^2 dy$$

$$7.15. \int_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \sin x dx - \sin y dy \quad 7.16. \int_{A(0;0)}^{B(1;1)} x dx + y^3 dy$$

## Литература

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под редакцией Демидовича Б.П. – М., АСТ, 2001.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М., Наука, 1985.
3. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. 3-е изд. – М., ЮНИТИ, 2010.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., Наука, 1988.
5. Данко И.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2. – М., Высшая школа, 1996.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1, 2. – М., Физматлит, 2005.

## Содержание

1. Необходимые сведения из интегрального исчисления функции одной переменной .....	3
1.1. Метод тождественных преобразований .....	5
1.2. Метод замены переменной .....	6
1.3. Метод интегрирования по частям .....	8
1.4. Интегрирование дробно-рациональных функций .....	10
1.5. Интегрирование тригонометрических функций .....	13
1.6. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы .....	13
2. Вспомогательный материал из дифференциального исчисления функций многих переменных .....	18
3. Двойной интеграл. Повторный интеграл. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление площадей фигур и объемов тел. Приложения к задачам механики .....	22
3.1. Двойной интеграл. Повторный интеграл. Понятие правильной (стандартной) области. Вычисление двойного интеграла .....	22
3.2. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах .....	27
4. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл и его вычисление .....	31
4.1. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл и его вычисление .....	31
4.2. Геометрические и механические приложения тройного интеграла .....	34
5. Криволинейный интеграл, физический смысл, его вычисление. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь криволинейного и двойного интегралов. Формула Грина .....	36
5.1. Криволинейный интеграл и его вычисление .....	36
5.2. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь криволинейного и двойного интегралов. Формула Грина .....	39
6. Формула Гаусса-Остроградского. Поверхностный интеграл, его вычисление. Формула Стокса .....	43

7. Рекомендуемые задачи. Разбор варианта расчетно-графической работы .....	45
8. Варианты расчетно-графических работ для самостоятельного решения .....	50
Литература.....	57

Учебное издание

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ  
И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ  
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ С ПРИМЕРАМИ И ВАРИАНТАМИ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ**

Часть 2

*Учебно-методическое пособие*

Составитель: **Кадымов** Вагид Ахмедович

Печатается в авторской редакции.

Технический редактор  
- К.А. Антонов  
Компьютерная верстка  
- К.А. Антонов

---

Подписано в печать 16.05.2015. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .

Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 3,75.

Тираж 20 экз. Заказ № 31.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет

107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.

Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.

Для заметок

---

Для заметок

---

Для заметок

---