**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет

В.А. Кадымов, Р.Э. Ахмедов

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Москва
2017

УДК 517
ББК 22.161
К 13

Рецензенты:

Уварова Л.А., д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ Станкин.

Яновская Е.А., канд. тех. наук, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ Станкин.

Кадымов В.А., Ахмедов Р.Э.

К 13 Функции одной независимой переменной: неопределенный интеграл и методы интегрирования. Определенный интеграл и его приложения: *учебно-методическое пособие*. – М.: МГГЭУ, 2017. – 62 с.

В учебно-методическом пособии в краткой форме представлен необходимый теоретический материал и разобраны методы решения задач интегрального исчисления функции одной переменной, представлены общие методы интегрирования, их механические и геометрические приложения.

Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Приводятся тесты для закрепления теоретического и практического материалов. Приводятся варианты контрольных заданий для самостоятельной работы.

ISBN 978-5-9799-0108-4

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов

В курсе дифференциального исчисления ставилась следующая основная задача: найти для известной функции $y = F(x)$ ее производную $f(x) = F'(x)$. Теперь же рассмотрим обратную задачу: для известной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, чтобы ее производная $F'(x)$ была равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка имеет место равенство:

$$F'(x) = f(x), \text{ или } dF(x) = f(x)dx. \tag{1.1}$$

Например, функция $F(x) = x^2$ является первообразной от функции $f(x) = 2x$ на всей числовой оси, поскольку $F'(x) = (x^2)' = 2x$, а для функции $f(x) = 1/x$ первообразной на полуоси $(0;\infty)$ будет функция $F(x) = \ln x$, так как при $0 < x < \infty$ $(\ln x)' = 1/x$.

Вопрос: для каких функций существует первообразная? Сформулируем достаточное условие существования первообразной.

Теорема 1. Если функция непрерывна на $[a, b]$ то она имеет на этом отрезке первообразную.

Заметим, что задача отыскания производной $f(x) = F'(x)$ для заданной функции $F(x)$ решается однозначно, в то время как обратная задача — отыскание первообразной для заданной функции $f(x)$ решается неоднозначно.

Пример 1. Для функции $f(x) = 2x$ первообразной будет не только $F(x) = x^2$, но и $x^2 + 5$, и вообще, $x^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

Теорема 2. Если $F(x)$ и $F_1(x)$ — две различные первообразные от функции $f(x)$ на $[a,b]$, то они отличаются между собой на постоянное число:

$$F_1(x) = F(x) + C, \quad x \in [a, b]. \tag{1.2}$$

Определение 2. Множество всех первообразных $F(x)+C$ от функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от данной функции и обозначается следующим образом:

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (1.3)$$

При этом $f(x)$ *называется подынтегральной функцией,* $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением,* x — *переменной интегрирования*. Операция отыскания первообразной для $f(x)$ называется *интегрированием* (она обратна операции дифференцирования). Можно записать:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x)+C,$$

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x),\ d\int f(x)dx = f(x)dx = dF. \qquad (1.4)$$

Формулы (1.4) следуют из (1.1) и (1.3).

Свойства неопределенного интеграла

1. Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx. \qquad (1.5)$$

2. Постоянный множитель k можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \qquad (1.6)$$

Приведем таблицу интегралов от простейших функций (здесь a, α — некоторые числа).

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C.$
3. $\int \sin xdx = -\cos x+C.$
4. $\int \cos xdx = \sin x+C.$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2}dx = \mathrm{tg}x+C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ в частности $\int e^x dx = e^x + C.$

8. $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{x} dx, \ \left(a \neq 0\right).$

9. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C, \ \left(a \neq 0\right).$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ \ (|x| < |a| < 0).$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

2. Основные методы интегрирования. Метод замены переменной

Метод разложения. Идея метода заключается в разложении подынтегральной функции на сумму функций, каждую из которых можно проинтегрировать при помощи какого-либо другого метода, в том числе при помощи непосредственного использования таблицы интегралов.

Пример 2. Найдите интеграл:

$$\int 2^x \left(3^x - 7 \cdot 2^{2x}\right) dx = \int \left(6^x - 7 \cdot 2^{3x}\right) dx = \int 6^x dx - 7 \int 8^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} - 7 \frac{8^x}{\ln 8} + c.$$

Метод замены переменной. Если найти интеграл $\int f\left(x\right) dx$ непосредственно не удается, то к успеху может привести введение новой переменной t с помощью соотношения $x = \varphi\left(t\right)$, где $\varphi\left(t\right)$ — некоторая функция с непрерывной производной $\varphi'\left(t\right)$, имеющая обратную функцию $t = \varphi^{-1}\left(x\right)$. Поскольку $dx = \varphi'\left(t\right) dt,$ то справедливо равенство:

$\int f\left(x\right) dx = \int f\left[\varphi\left(t\right)\right] \varphi'\left(t\right) dt = \int \psi\left(t\right) dt$ — табличный интеграл в новых переменных. Здесь введено обозначение:

$$\psi\left(t\right) = f\left(\varphi\left(t\right)\right) \varphi'\left(t\right).$$

Существуют разновидности метода замены переменной: метод подведения под знак дифференциала, метод подстановки.

Пример 3. Найдите интеграл:

$$\int \sin(5x-3)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}(-\cos t) + c = -\frac{1}{5}\cos(5x-3) + c,$$

где $t = 5x-3 \Rightarrow x = \dfrac{t-3}{5};\ dx = \dfrac{1}{5}dt.$

Решим этот же пример методом подведения под знак дифференциала, при котором не вводят явно новую переменную:

$$\int \sin(5x-3)\,dx = \int \sin(5x-3)\frac{1}{5}d(5x-3) = \frac{1}{5}\big(-\cos(5x-3)\big) + c.$$

3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ функции, имеющие непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$, и при этом требуется найти интеграл:

$$\int u(x)v'(x)\,dx.$$

В таком случае имеет место формула:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

или эквивалентная формула, записанная в дифференциалах:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x). \qquad (1.7)$$

Пример 4. Найдите интеграл:

$$\int x\ln 2x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln 2x, & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln 2x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Замечание. В качестве $v(x)$ можно взять любую функцию из множества $F(x)+c.$ В нашем примере $v = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c,$ при этом мы выбрали $c = 0.$

Пример 5. Найдите интеграл:

$$\int x^2 \sin 4x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & dv = \sin 4x dx \\ du = 2x dx, & v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4}x^2 \cos 4x - \left(-\frac{1}{2}\right)\int x \cos 4x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u_1 = x, & dv_1 = \cos 4x dx \\ du_1 = dx, & v_1 = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4}x^2 \cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x \sin 4x - \frac{1}{4}\int \sin 4x dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 \cos 4x + \frac{1}{8}x \sin 4x - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + c.$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 \cos 4x + \frac{1}{8}x \sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + c.$$

Замечание. В данном примере формула интегрирования по частям была применена дважды.

Пример 6. Найдите интеграл:

$$\int e^x \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos 2x, & dv = e^x dx \\ du = -2\sin 2x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u_1 = \sin 2x, & dv_1 = e^x dx \\ du_1 = 2\cos 2x dx, & v_1 = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos 2x + 2\left(e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx\right) =$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx.$$

Обозначим $e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x = \varphi(x)$, и $\int e^x \cos 2x dx = F$, понимая под F одну из первообразных. Тогда из последнего равенства получаем:

$$F = \varphi(x) - 4F \Rightarrow F = \frac{1}{5}\varphi(x) \Rightarrow F = \frac{1}{5}e^x\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right).$$

Поскольку F — одна из первообразных, то окончательно получаем:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}e^x\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right) + c.$$

4. Частные методы интегрирования. Интегрирование рациональных функций

Определение 3. Дробной рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция, являющаяся отношением двух многочленов (полиномов):

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0},\quad a_0\neq 0,\, b_0\neq 0, \tag{1.8}$$

где $b_0, b_1, \ldots b_m, a_0, a_1, \ldots a_n$ — действительные числа; m, n — целые неотрицательные степени многочленов.

Если $m<n$, то рациональная дробь называется правильной, если же $m\geq n$, то неправильной.

Теорема 3. Любая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Подобное представление нетрудно получить с помощью известного правила деления многочленов. Так, например,

$$\frac{x^3+5x}{x+2}=x^2-2x+9-\frac{18}{x+2}.$$

Определение 4. Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующих четырех типов:

I) $\dfrac{A}{x-a}$;

II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k=2, 3, 4, \ldots$;

III) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $\dfrac{p^2}{4}-4<0$;

IV) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k=2, 3, 4, \ldots$; $\dfrac{p^2}{4}-4<0$,

где A, B, a, p, q — действительные числа, причем квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Теорема 4. Любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующем виде:

$$P_n(x) = a_n\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\ \dots\left(x-a_s\right)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}$$

$$\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{t_2}\ \dots\left(x^2+p_ex+q_e\right)^{t_e}, \qquad (1.9)$$

где $a_n,\ p_1, q_1,\ p_2, q_2, \dots\ p_e, q_e$ — действительные числа, $k_1, k_2, \dots k_s, t_1, t_2, \dots, t_e$ — целые положительные числа, причем $k_1+k_2+\dots k_s+2t_1+2t_2+\dots 2t_e=n;$ числа $a_1, a_2, \dots, a_s$ — действительные корни многочлена $P_n\left(x\right)$ кратности $k_1, k_2, \dots k_s$ соответственно, а все трехчлены $x^2+p_ix+q_i\ \left(i=1, 2, \dots, e\right)$ не имеют действительных корней.

Теорема 5. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m\left(x\right)}{P_n\left(x\right)}, \left(m<n\right)$ можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей указанных выше четырех типов.

Пусть (для простоты) $P_n\left(x\right)$ раскладывается так:

$$P_n\left(x\right)=\left(x-\alpha\right)^k\left(x-\beta\right)^r\left(x^2+px+q\right)^t.$$

Тогда

$$\frac{Q_m\left(x\right)}{P_n\left(x\right)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^2}+\dots+\frac{A_k}{\left(x-a\right)^k}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{\left(x-\beta\right)^2}+\dots+\frac{B_r}{\left(x-\beta\right)^r}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\dots+\frac{C_tx+D_t}{\left(x^2+px+q\right)^t},$$

где $k+r+2t=n$, а все $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_r, C_1, D_1, \dots, C_t, D_t$ — неизвестные действительные числа, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов. Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 7. Представьте правильную дробь $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4-16}$ в виде суммы простейших правильных дробей и вычислите интеграл $\int f(x)dx.$

Решение. Сперва разлагаем исходную правильную дробь на сумму простейших правильных дробей:

$$\frac{2x+1}{x^4-16}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4}=$$

$$=\frac{A_1(x-2)(x^2+4)+A_2(x+2)(x^2+4)+(x^2-4)(A_3x+A_4)}{(x^2+4)(x^2-4)},$$

и приравняем числители обеих частей последнего равенства:

$$2x+1=A_1(x-2)(x^2+4)+A_2(x+2)(x^2+4)+(x^2-4)(A_3x+A_4).$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 можно применить один из известных методов (например, метод неопределенных коэффициентов или метод приравнивания значений многочленов при определенных [четырех] значениях неизвестной x; эти методы достаточно подробно описаны в литературе). В результате получаем:

$$A_1=\frac{3}{32};\ A_2=\frac{5}{32};\ A_3=-\frac{1}{4};\ A_4=-\frac{1}{8}.$$

Используя полученное разложение дробно-рациональной функции, находим интеграл:

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{2x+1}{x^4-16}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{32}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+4}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{3}{32}\ln|x+2|+\frac{5}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{32}\ln|x+2|+\frac{5}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c.$$

Сделаем одно замечание относительно интегрирования правильных дробей типа IV, которые с помощью выделения полного квадрата в квадратном трехчлене можно привести к виду:

$$\int\frac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt=A_1\int\frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}+B_1\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}.$$

При этом первый интеграл в правой части последней формулы с помощью простой замены легко раскрывается, а для нахождения второго интеграла используется рекуррентная формула $[3]$:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{t}{2(k-1)m^2\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}. \qquad (1.10)$$

5. Интегрирование тригонометрических функций

Ниже представим некоторые случаи интегрируемости тригонометрических функций.

I) $J_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x dx,$

где m, n — целые числа.

1. Пусть $m = 2k+1$ нечетно. Тогда

$$J_{mn} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x d(\cos x) =$$
$$= -\int \left(1-z^2\right)^k z^n dz,$$

где $z = \cos x,$ т.е. задача свелась к интегрированию полинома (если k и n — положительные) или дробно-рациональной функции (если k или n отрицательно). Аналогично поступают, если нечетно n.

Пример 8. Найдите интеграл:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x d(\sin x) = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) =$$
$$= \int \sin^2 x d \sin x - \int \sin^4 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

Пример 9.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} d\cos x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} d\cos x =$$
$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int d\cos x = \frac{1}{\cos x} + \cos x + c.$$

2. Пусть оба числа m, n — четные и неотрицательные. В этом случае подынтегральную функцию преобразуют с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 10. Найдите интеграл:

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

II) $J_{mn} = \int \sin^m x\cos^n x dx,$

где одно из чисел или нечетно и положительно, а другое из них — любое действительное. Метод интегрирования в этом случае работает так же, как и при целых m, n, если одно из них нечетно.

III) Интеграл $J = \int R(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ всегда приводится к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента t, причем

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Однако указанная подстановка может приводить к интегралу от дробно-рациональной функции сложного вида, поэтому удобнее использовать другие подстановки.

1. Для нахождения интеграла $J = \int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ применяется подстановка $t = \operatorname{tg} x,$ причем

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{t^2+1},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1},\ \cos x = \frac{1}{t^2+1}.$$

Пример 11. Найдите интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)d\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + c.$$

2. Интеграл $J = \int R(\operatorname{tg} x)dx \frac{n!}{r!(n-r)!}$ раскрывается с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x,\ dx = \frac{dt}{t^2+1}.$

3. Интеграл $J=\int R(\sin x)\cos xdx$ берется с помощью подстановки $t=\sin x,\ dt=\cos xdx.$

4. Для вычисления интеграла $J=\int R(\cos x)\sin xdx$ используется подстановка $t=\cos x,\ dt=-\sin xdx.$

IV) В интегралах $\int \sin mx\cos nxdx,\ \int \sin mx\sin nxdx,\ \int \cos mx\cos nxdx\frac{n!}{r!(n-r)!}$ следует использовать формулы обращения произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right],$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x],$$

где m, n — действительные числа.

Пример 12. Найдите интеграл:

$$\int \sin^2 x\cos 3xdx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int \cos 3xdx-$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos 2x\cos 3xdx=\frac{1}{6}\int \cos 3xd(3x)-\frac{1}{4}\int(\cos x+\cos 5x)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{20}\sin 5x+c.$$

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определенный интеграл, свойства. Формула Ньютона — Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана некоторая функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ на n частей (необязательно равных) так, чтобы $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (*рис. 2.1*). Обозначим длину отрезка

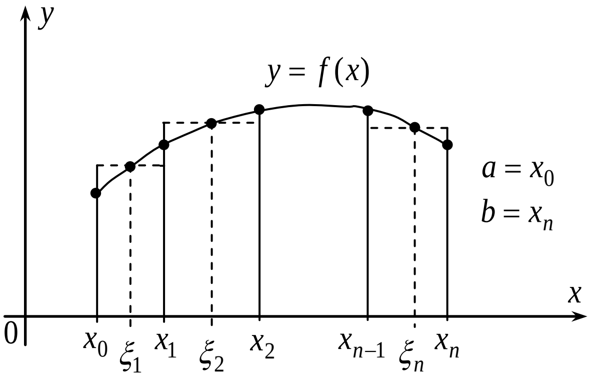

Рис. 2.1

$[x_{i-1}, x_i]$ через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем по произвольной точке ξ_i. Назовем *шагом разбиения* λ наибольшую из длин Δx_i: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

Определение 5. *Интегральной суммой* σ_n функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется следующая величина:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2.1}$$

Устремляя шаг разбиения λ к нулю дроблением $[a, b]$ на все большее количество отрезков, получим последовательность соответствующих интегральных сумм σ_n $(n \to \infty)$.

Определение 6. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения $[a, b]$ ни от выбора точек

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2.2}$$

Величины a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Если для функции $f(x)$ существует определенный интеграл (2.2), то $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Теорема 6 **(достаточное условие интегрируемости).** Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ то она на этом отрезке интегрируема. Это условие не является необходимым.

Замечания

1. В соотношении (2.2) предполагалось $a < b$. Если же $a > b$ или $a = b$, то принимается по определению соответственно

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^a f(x)dx = 0. \tag{2.3}$$

2. Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то интеграл (2.2) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

3. Вычисление определенного интеграла по формуле (2.2) связано, как правило, с большими трудностями, поэтому для его вычисления используется приводимая ниже формула Ньютона — Лейбница, выражающая связь между определенными и неопределенными интегралами.

Перечислим основные свойства определенного интеграла, предполагая, что $f(x), \varphi(x), f_1(x), f_2(x)$ интегрируемы на $[a,b]$.

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где $k = \text{const}$. (2.4)

2. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$ (2.5)

3. Если $f(x) \leq \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$ (2.6)

4. Если m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x)$

при $a \le x \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{2.7}$$

Теорема о среднем. Если $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то найдется такая точка* $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi), \tag{2.8}$$

при этом величина $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

6. Независимо от того, принадлежит точка c отрезку $[a, b]$ или нет, имеет место соотношение:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{2.9}$$

если каждый из этих интегралов существует.

Пример 13. Оцените интеграл $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

Решение. Поскольку наименьшим и наибольшим значениями $f(x) = \dfrac{1}{10+3\cos x}$ на $[0;\ 2\pi]$ являются $m = \dfrac{1}{10+3} = \dfrac{1}{13}$; $M = \dfrac{1}{10-3} = \dfrac{1}{7}$, то согласно (2.7) получим $\dfrac{2\pi}{13} \le J \le \dfrac{2\pi}{7}$.

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt, x \in [a, b]$.

Теорема 7. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ то $\Phi(x)$ есть ее первообразная, т.е.

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2.10}$$

Теорема 8. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная, то справедливо соотношение:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{2.11}$$

которое называется формулой Ньютона — Лейбница.

Пример 14.

$$J = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\left(\sqrt{3}/2\right) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$

2. Методы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема 9 **(правило замены переменной).** Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и выполняются условия:

1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны при $\alpha \le t \le \beta$;

2) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$;

3) $x = \varphi(t) \in [a; b]$ при всех $t \in [\alpha;\ \beta]$.

Тогда справедливо соотношение:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{2.12}$$

Пример 15. Вычислите $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Решение. Положим $x = \sin t,$ тогда $dx = \cos t dt.$ При $x = 0$ $\sin t = 0,$ т.е. $t = \arcsin 0 = 0;$ при $x = 1$ $\sin t = 1,$ т.е. $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$ таким образом здесь $a = 0,\ b = 1,\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}.$ Согласно формуле (2.12) получим:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 10 **(правило интегрирования по частям).** Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на $[a, b]$ вместе со своими производными $u'(x), v'(x)$. Тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (2.13)$$

Пример 16. Вычислите $J = \int_0^1 xe^{2x}dx.$

Решение. Примем $u(x) = x, v'(x) = e^{2x}$, тогда $u'(x) = 1,\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ и, согласно формуле (2.13):

$$J = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - 0 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right).$$

3. Приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры. Если функция $y = f(x) \geq 0$ непрерывна на $[a, b]$ то, как отмечалось выше, площадь фигуры, ограниченной графиком $f(x)$, осью абсцисс и двумя вертикалями $x = a, x = b,$ равна:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.14)$$

Заметим, что если $f(x)$ на $[a, b]$ отрицательна или меняет знак, то площадь соответствующей фигуры определяется формулой:

$$S = \int_a^b \left| f(x)\right| dx. \qquad (2.15)$$

Если же фигура ограничена двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a, b]$, то ее площадь S определяется следующим образом:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx. \qquad (2.16)$$

Пусть кривая задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $[t_1, t_2]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной этой кривой, отрезком $a \le x \le b$ оси абсцисс и вертикалями $x=a=\varphi(t_1)$ и $x=b=\varphi(t_2)$, вычисляется по формуле:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left|\psi(t)\right|\varphi'(t)\,dt. \tag{2.17}$$

Рассмотрим полярную систему координат. Для этого зафиксируем некоторую ось (называемую *полярной осью*) с началом в точке O (*полюсом*). Любой точке M на плоскости соответствует радиус-вектор OM, который определяется своей длиной r (*полярным радиусом*) и единственным полярным углом φ, отсчитываемым от полярной оси против часовой стрелки и изменяющимся в пределах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Величины r и φ называются *полярными координатами* точки $M(r, \varphi)$. Если в качестве полярной оси l с полюсом O выбрать ось абсцисс прямоугольной декартовой системы координат xoy, то справедливы соотношения: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Пусть кривая задана в полярных координатах функцией $r=f(\varphi)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора AOB (рис. 2.2), ограниченного этой кривой и двумя отрезками OA и OB с углами α и β равна:

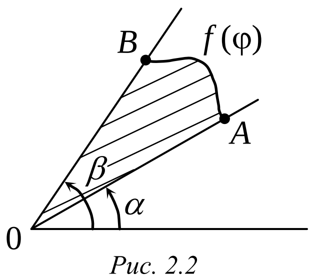

Рис. 2.2

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi. \tag{2.18}$$

Пример 17. Найдите площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

Решение. $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi\right) d\varphi =$

$$= \frac{1}{2}\left(8\pi + 4\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right) = 4\pi + \frac{1}{4}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

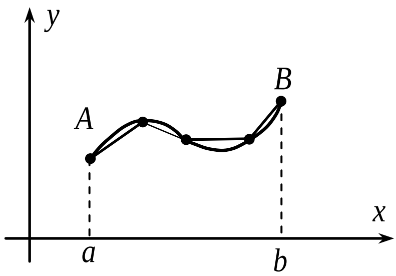

Рис. 2.3

Длина дуги кривой

Определение 7. *Длиной дуги* кривой AB называется предел, к которому стремится периметр (т.е. сумма длин всех звеньев) вписанной в эту дугу ломаной (рис 2.3), когда длина наибольшего ее звена стремится к нулю (при этом количество звеньев неограниченно растет).

Пусть кривая AB определяется функцией $y = f(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$ (такая кривая называется *гладкой*). Тогда длина дуги AB равна:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \qquad (2.19)$$

Пусть кривая AB задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют на $[t_1, t_2]$ непрерывные производные, причем t_1 и t_2 — значения параметра, соответствующего концам дуги A и B. Тогда длина дуги AB равна:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, dt. \tag{2.20}$$

Пример 18. Найдите длину l окружности радиуса R с центром в начале координат, задаваемой соотношениями: $x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,$ $0 \le t \le 2\pi$ (параметр t есть полярный угол).

Решение. Поскольку $x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t,$ получим

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = R\int_0^{2\pi} dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Если гладкая кривая в полярных координатах r, φ определяется функцией $r = f(\varphi)$, имеющей на $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную, при этом α и β — полярные углы крайних точек дуги, тогда ее длина равна:

$$l = \int_a^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \tag{2.21}$$

Поверхность тела вращения. Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси ox гладкой кривой определяемой функцией $y = f(x) \ge 0,\quad x \in [a, b],$ имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Площадь этой поверхности определяется формулой:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{[1 + f'(x)]^2}\, dx. \tag{2.22}$$

Вычисление объемов

Пусть с некоторым конечным телом связана ось ox и для каждого $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси x, при этом точки $x = a$ и $x = b$ соответствуют крайним сечением тела. Тогда объем V тела равен:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{2.23}$$

Пример 19. Найдите объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

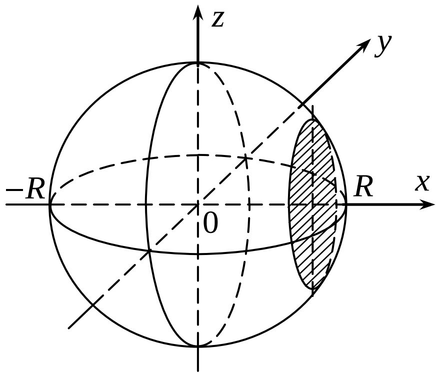

Рис. 2.4

Решение. В сечении шара плоскостью, параллельной плоскости oyz (рис. 2.4) и пересекающей ось ox в точке x получается круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$, площадь которого $S(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$. Тогда объем шара равен:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right) dx = \pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси $ox(oy)$ криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью ox и вертикалями $x = a$ и $x = b$. Объем такого тела выражается соотношением:

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \left(V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx\right). \qquad (2.24)$$

Пример 20. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \le x \le \pi$ оси ox.

Решение. $V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$

Пример 21. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=0$ и отрезком $0\le x\le 1$ оси ox.

Решение. $V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int\limits_0^1 xdx=\left.\frac{\pi x^2}{2}\right|_0^1=\frac{4\pi}{2}=2\pi.$

Пример 22. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=0$ и отрезком $0\le x\le 1$ оси ox.

Решение. $V=2\pi\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx=2\pi\int\limits_0^1 x^{3/2}dx=2\pi\left.\frac{2x^{5/2}}{5}\right|_0^1=\frac{4\pi}{5}.$

Пример 23. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y\equiv f_2(x)=\sqrt{x}$, $y\equiv f_1(x)=x^2$.

Решение. Найдем сначала точки пересечения заданных функций: $x_1\equiv a=0,\quad x_2\equiv b=1.\quad x_1\equiv a=0.$

$$V=\pi\int\limits_a^b\left[f_2^{\,2}(x)-f_1^{\,2}(x)\right]dx=\pi\int\limits_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int\limits_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}.$$

Пример 24. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y\equiv f_2(x)=\sqrt{x}$, $y\equiv f_1(x)=x^2$.

*Решение***.**

$$V=2\pi\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]xdx=2\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)xdx=2\pi\int\limits_0^1\left(x^{3/2}-x^3\right)dx=$$

$$=2\pi\left.\left(\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{1}{4}x^4\right)\right|_0^1=2\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi}{10}.$$

Таким образом, объемы тел, полученных при вращении одной и той же плоской фигуры вокруг осей ox и ox, совпадают. Это и следовало ожидать, так как исходная фигура вращения симметрична относительно обеих осей.

Механические приложения. Пусть материальная точка движется по прямой с переменной скоростью, которая выражается известной функцией времени $v=f(t)$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1,t_2]$ равен:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \tag{2.25}$$

Рассмотрим материальную точку, которая движется прямолинейно вдоль оси ox под воздействием приложенной к ней силы $\vec{F}$, при этом проекция F на ox есть функция $x: np_x F = f(x)$. Тогда для работы силы на отрезке $[x_1, x_2]$ справедлива формула:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx. \tag{2.26}$$

4. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода

Определение 8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом 1-го рода* с бесконечной верхней границей от функции $f(x)$ и обозначается следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2.27}$$

при этом говорят, что несобственный интеграл *сходится.* В случае если такого предела не существует (в частности, он бесконечен), то соответствующий несобственный интеграл не существует и называется *расходящимся.*

Если $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, b]$, то несобственный интеграл 1-го рода с бесконечной нижней границей определяется аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2.28}$$

если же $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, то несобственный интеграл 1-го рода с двумя бесконечными границами определяется соотношением:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2.29}$$

где c – любая фиксированная точка оси x.

Заметим, что такой интеграл существует, только если существует каждый из интегралов, стоящий в правой части и в этом случае он не зависит от c.

Пример 25. Установите, для каких p сходится $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Решение. 1) $p = 1$.

$$J = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln x \Big|_1^b \right] = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln b - 0 \right) = +\infty,$$

интеграл расходится.

2) $p \neq 1$.

$$J = \int\limits_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^b = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p},$$

следовательно,

при $p < 1$ $J = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p} - 1}{1-p} = +\infty$, интеграл расходится;

при $p > 1$ $J = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p} - 1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$, интеграл сходится.

Свойства (2.4) и (2.5) определенных интегралов сохраняются и для сходящихся несобственных интегралов. Кроме того, справедливы утверждения:

(1) Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ на $[a, +\infty)$ (или $f(x) \leq \varphi(x) \leq 0$ на $[a, +\infty)$. Тогда:

если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ тоже сходится;

если $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

(2) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$. Тогда:

если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится.

Аналогичные утверждения справедливы и для несобственных интегралов (2.28), (2.29).

Пример 26. Установите, сходится ли интеграл $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Решение. Поскольку $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 2.7.), то $\int\limits_1^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| dx$ тоже сходится, а значит сходится и интеграл J.

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и принимает неограниченные значения в точке $x = b$: $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$.

Несобственным интегралом 2-го рода на $[a, b]$ от функции $f(x)$, неограниченной в точке $x = b$, называется предел

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2.30}$$

Если при этом существует конечный предел (2.30), то несобственный интеграл называется *сходящимся*. В противном случае (т.е. если предел не существует или равен ∞) несобственный интеграл называют *расходящимся*.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла 2-го рода на $[a, b]$ от функции $f(x)$ неограниченной в точке $x = a$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{2.31}$$

И, наконец, если функция $y = f(x) \in C_{[a,b]\setminus\{c\}}$ и $x = c$ — точка бесконечного разрыва функции, то несобственным интегралом 2-го рода от $f(x)$ по области $[a, b]$ называют

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to +0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{2.32}$$

При этом если оба интеграла в правой части (2.32) существуют и конечны, то несобственный интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ называют сходящимся.

Пример 27. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

1) $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to +0} \int\limits_\varepsilon^2 \dfrac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to +0} \left.\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\right|_\varepsilon^2 = \infty$, т.е. интеграл расходится;

2) $$\int_{-1}^{0}\frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\left(-\arccos x\right)d\left(\arccos x\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{\arccos^2 x}{2}\right)\Bigg|_{-1+\varepsilon}^{0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\pi^2\right)=\frac{3\pi^2}{8},$$

интеграл сходится.

Имеют место *признаки сравнения*. Пусть функции непрерывны на $(a, b]$ и при $x > a$ $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда:

1) из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;

2) если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то и $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Определение 9. Если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся. Если же $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют условно сходящимся. Известно, что из сходимости $\int_a^b |f(x)|dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

Пример 28. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл 2-го рода

$$\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{x}dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Т.к. $|f(x)|=\dfrac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt[3]{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}},$

и

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}x^{-1/3}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3x^{2/3}}{2}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)=\frac{3}{2}<\infty,$$

то исходный интеграл абсолютно сходится.

III. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Этот раздел содержит решение типового варианта
расчетно-графической работы.

Задания 1-6. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{(3-2x)^2}{x} dx$; 2) $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$; 4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$;

5) $\int x \ln 2x dx$; 6) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^3-2x^2-3x} dx$.

Задания 7, 8. Используя формулу Ньютона — Лейбница, вычислите определенные интегралы:

7) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{3^x dx}{1+9^x}$; 8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x-1)\cos x dx$.

Задание 9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Задание 10. а) Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

б) Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Задание 11. Найдите длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки $B(4; 8)$.

Задание 12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\text{а) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{б) } \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Ниже представляем решение типового варианта.

1. Применяя тождественные преобразования подынтегральной функции и используя свойства неопределенного интеграла, получаем:

$$\int \frac{(3-2x)^2}{x} dx = \int \frac{9-12x+4x^2}{x} dx = 9\int \frac{dx}{x} - 12\int dx + 4\int x dx =$$
$$= 9\ln|x| - 12x + 2x^2 + c.$$

2. Применяем тригонометрические преобразования и метод подведения под знак дифференциала (аналог метода замены переменной):

$$\int \operatorname{ctg}^3 x dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right) d \sin x}{\sin^3 x} = \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} - \int \frac{d \sin x}{\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln\left|\sin x\right| + c.$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-\left(x-2\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \\ a = \sqrt{6} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{t}{a} + c = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} + c.$$

4. Применяя метод замены переменной (подведение под знак дифференциала), приводим к табличному интегралу:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \int \frac{de^x}{\sqrt{3^2-\left(e^x\right)^2}} = \arcsin\frac{e^x}{3} + c.$$

5. Используем метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле:

$$\int x \ln 2x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln 2x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

6. Разлагаем знаменатель исходной правильной дроби на простые множители и представляем в виде суммы простейших правильных дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x+1}{x^3-2x^2-3x} = \frac{2x+1}{x\left(x+1\right)\left(x-3\right)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части к общему знаменателю и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. В результате получаем:

$$A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A_1 = \frac{7}{12},$$

$$\int \frac{\left(2x+1\right)dx}{x^3-2x^2-3x} dx = A_1\int\frac{dx}{x} + A_2\int\frac{dx}{x+1} + A_3\int\frac{dx}{x-3} =$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{7}{12}\ln|x-3|+c.$$

7. Находим сначала одну из первообразных:

$$F(x)=\int\frac{3^x\,dx}{1+9^x}=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{d3^x}{1+3^{2x}}=\frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg}\left(3^x\right).$$

Здесь мы положили постоянную интегрирования $c=0$. Подставим в формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{3^x\,dx}{1+9^x}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\ln 3}(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\ln 3}.$$

8. С помощью метода интегрирования по частям находим одну из первообразных:

$$F(x)=\int(x-1)\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x-1, & du=dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=(x-1)\sin x+\cos x.$$

Применяем формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_0^{\pi/2}(x-1)\cos x dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-1=\frac{\pi}{2}-2.$$

9. Определяем сперва точки пересечения кривых $y=f_2(x)=\sqrt{x}$ и $y=f_1(x)=x^2$, ограничивающих плоскую фигуру:

$$x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x^4-x=0\Rightarrow x(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=x_1=0 \\ b=x_2=1\end{array}\right..$$

Применяем формулу (2.16):

$$S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}\ \text{(кв.ед.)}.$$

10, а). Подставляя найденные из предыдущего примера точки пересечения кривых в формулу (2.24), находим:

$$V_x=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{10}\ \text{(куб.ед.)}.$$

10, б). Применяем формулу (2.24):

$$V_y=2\pi\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=2\pi\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=2\pi\int_0^1\left(x^{3/2}-x^3\right)dx=$$

$$=2\pi\left(\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{20}\ \text{(куб.ед.)}.$$

Таким образом, получили, что $V_x=V_y$, что и следовало ожидать в силу симметрии преобразований вращения исходной плоской области вокруг осей *ox* и *oy*.

11. Находим производную $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ и подставим в формулу (2.19):

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=\frac{9}{4}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

12, а). $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$

12, б). $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\ln|x|\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln1-\ln\varepsilon\right)=\infty,$ следовательно, несобственный интеграл расходится.

IV. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В примерах 1–6 требуется найти неопределенный интеграл. В примерах 7 и 8 нужно вычислить определенный интеграл. Задачи 9 и 10 относятся к приложениям и решаются с использованием определенного интеграла.

Вариант 1

1. $\int \frac{(3x-5)^2}{x}dx$ 2. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+8x-16x^2}}$

4. $\int \frac{e^x dx}{2e^x+3}$ 5. $\int \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 6. $\int \frac{x^2-x-1}{x^3-x^2}dx$

7. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x}+1}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/3} x^2 \cos 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$, $x=-7\pi/6$, $x=\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=6$, $x=1$, $x=4$, вокруг оси ox.

11. Вычислите длину дуги кривой $y=\ln(\cos x)$; $0\le x\le \pi/3$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Вариант 2

1. $\int \frac{(2x+5)^2}{x^2}dx$ 2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$ 3. $\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{16x^2-24x+25}}$

4. $\int e^x\sqrt{2e^x-1}dx$ 5. $\int \frac{1+\ln x}{x^2}dx$ 6. $\int \frac{5x^2-5x+2}{x^3-2x^2}dx$

7. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/3} (x^2+1)\sin x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\pi/2$, $x=3\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=6$, $x=1$, $x=4$, вокруг оси oy.

11. Вычислите длину дуги кривой $y=\ln(\sin x)$; $\pi/3\le x\le \pi/2$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx.$

Вариант 3

1. $\int \frac{(3-2x)^2}{x}dx$ 2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$ 3. $\int \frac{(x+1)dx}{2x^2+4x+3}$

4. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$ 5. $\int \ln 2x dx$ 6. $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^3+x^2}dx$

7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ 8. $\int_0^{\pi/3} (2x^2+3)\cos 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=0$, $x=7\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ вокруг оси ox.

11. Вычислите длину дуги кривой $r=\cos^3(\varphi/3)$; $0\le\varphi\le\pi/2$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Вариант 4

1. $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$ 2. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{1-\cos^2 x}\right)dx$ 3. $\int \frac{dx}{(3-2x)^{10}}$

4. $\int \mathrm{ctg}\, 2x dx$ 5. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$ 6. $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^3+x^2}dx$

7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ 8. $\int_0^{\pi/3} (2x^2+3)\cos 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=0$, $x=7\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ вокруг оси oy.

11. Вычислите длину дуги кривой $y=\ln(1-x^2)$; $0\le x\le 1/2$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_0^\infty e^x \cos x dx.$

Вариант 5

1. $\int \frac{(3-2x)^2}{x^2}dx$ 2. $\int \frac{\cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x}dx$ 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-12x+5}}$

4. $\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x dx$ 5. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$ 6. $\int \frac{x^2-5x+2}{x^3+2x^2}dx$

7. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ 8. $\int_0^1 x^2 e^{x-1}dx$

9. Найдите площадь поверхности параболоиды, образованного вращением дуги параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси ox от $x=0$ до $x=2$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$.

11. Вычислите длину дуги кривой $y = 2x^{3/2}$; $0 \le x \le 11$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}.$

Вариант 6

1. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$ 2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$ 3. $\int \frac{(2x+1)dx}{4x^2+4x+5}$

4. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}+1}{\cos^2 x}dx$ 5. $\int \ln(x^2+1)dx$ 6. $\int \frac{3x^2-8x-12}{x^3-3x^2}dx$

7. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ 8. $\int_0^1 (x^2-x)e^x dx$

9. Найдите площадь поверхности параболоиды, образованного вращением дуги параболы $y^2 = 4x$ вокруг оси ox от $x=0$ до $x=3$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox одной полуволны косинусоиды $y = \cos x$.

11. Вычислите длину дуги кривой $y=\sqrt{2x-x^2}-1;\ 0.25\le x\le 1.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\infty}\sin x dx.$

Вариант 7

1. $\int\left(x+\sqrt{x}\right)^2 dx$ 2. $\int\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^2 x}dx$ 3. $\int\frac{(x+1)dx}{2x^2+4x+11}$

4. $\int\frac{1-3\cos x}{\sin^2 x}dx$ 5. $\int\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}dx$ 6. $\int\frac{2x^2+2x+14}{(x+2)\left(x^2-5x+4\right)}dx$

7. $\int\limits_4^0\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$ 8. $\int\limits_0^2 x^2e^{2-x}dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x+1}$, $y=\sqrt{7-x}$, $y=0.$

10. Вычислите площадь шарового пояса, получаемого при вращении вокруг оси ox дуги окружности $x^2+y^2=4, (y>0)$ между точками с абсциссами $x=-1$ и $x=1$.

11. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{x^3}$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(4;8)$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Вариант 8

1. $\int\left(x-\sqrt{x}\right)^2 dx$ 2. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{1+x^2}\right)dx$ 3. $\int\frac{dx}{3-5x}$

4. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x+1}dx$ 5. $\int\sqrt[3]{x^2}\ln x dx$ 6. $\int\frac{9x^2+5x+10}{4x^3+4x^2+5x}dx$

7. $\int\limits_1^3\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ 8. $\int\limits_{1/4}^{1/2}\frac{x}{\sin^2\pi x}dx$

9. Скорость точки задана формулой $v = \sqrt{1+t}$ $м/сек$. Найдите длину пути, пройденного точкой за первые 10 сек. после начала движения.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

11. Вычислите длину дуги кривой $r = 1 - \cos\varphi$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$.

Вариант 9

1. $\int \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx$ 2. $\int \dfrac{\sin^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ 3. $\int \dfrac{(3x+2)dx}{9x^2 + 6x + 2}$

4. $\int \dfrac{3^x}{9^x - 1} dx$ 5. $\int (2x+1)\cos 3x dx$ 6. $\int \dfrac{-x^2 + 7x + 12}{(x+1)(x^2+3x)} dx$

7. $\int\limits_4^9 \dfrac{\sqrt{x}dx}{x-1}$ 8. $\int\limits_{-1}^0 \ln(x+2)dx$

9. Скорость точки задана формулой $v = 10t + 2$ м/сек. Найдите длину пути, пройденного точкой за первые 4 сек. после начала движения.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

11. Вычислите длину дуги кривой $y = x^2/4$; $0 \le x \le 2$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 10

1. $\int \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ 2. $\int \dfrac{\sin^4 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ 3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 + 6x - 9x^2}}$

4. $\int \dfrac{x}{2x^2 - 1} dx$ 5. $\int (2x+3)e^{-x} dx$ 6. $\int \dfrac{4x^2 + x + 9}{(x^2+x)(x-3)} dx$

7. $\int\limits_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ 8. $\int\limits_1^4 (x-2)\ln xdx$

9. Автобус движется с ускорением 1 м/сек. Найдите длину пути, которую пройдет автобус за первые 12 сек. после начала движения.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной кривыми $x^2 - y^2 = 4;\ y = \pm 2.$

11. Вычислите длину дуги кривой $y = 4\sqrt{x-2};\ 2 \le x \le 3.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}.$

Вариант 11

1. $\int \sqrt{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ 2. $\int \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

4. $\int \frac{5x}{\left(x^2-1\right)^3} dx$ 5. $\int xe^{-2x+1} dx$ 6. $\int \frac{9x^2-19x+8}{(x+1)\left(x^2-2x\right)} dx$

7. $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ 8. $\int\limits_1^3 (3-2x)\ln xdx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2 + 1,\ y = 3x + 7.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной кривыми $2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0.$

11. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;\ 0)$ до точки $B(6;\ 8)$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}.$

Вариант 12

1. $\int \sqrt{x}(2-5x)^2\,dx$ 2. $\int \frac{\sin^3 x - \sin x + \sin^2 x - 1}{\cos^2 x}dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

4. $\int x\left(2x^2+1\right)^5 dx$ 5. $\int (3x-5)e^{2x}dx$ 6. $\int \frac{10x^2-2x-12}{(x-5)\left(x^2+2x\right)}dx$

7. $\int_2^{10} \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x-1}}$ 8. $\int_1^2 \left(3x^2-4\right)\ln x\,dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = x^2 - 2x + 1,\ y = x + 1.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$.

11. Найдите длину дуги кривой $r = 2\varphi^2;\ 0 \le \varphi \le 4.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость:
$\int_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}.$

Вариант 13

1. $\int \left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2 dx$ 2. $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}dx$ 3. $\int \frac{x\,dx}{4x^2+12x+25}$

4. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x}dx$ 5. $\int \left(x^2+x+1\right)\ln x\,dx$ 6. $\int \frac{15x^2+2x+45}{\left(x^2-3x\right)(x+5)}dx$

7. $\int_3^8 \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x+1}}$ 8. $\int_0^3 \left(x^2-3x\right)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x,\ y = \ln^2 x.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy кривой $y^2 = \left(1-x^2\right)^3$.

11. Найдите длину дуги кривой $y = 0.8x^{5/4};\ 0 \le x \le 9.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$

Вариант 14

1. $\int \left(\sqrt[3]{x}-x\right)^2 dx$ 2. $\int \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$

4. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 5. $\int (5x-1)\cos 3x dx$ 6. $\int \frac{8x^2+20x+14}{\left(x^2+x\right)(x+2)} dx$

7. $\int\limits_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$ 8. $\int\limits_1^3 (4x-9)\ln x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x^2+2,$ $y=3x+8.$

10. Вычислите площадь шарового пояса, полученного при вращении вокруг оси ox дуги окружности $x^2+y^2=25$ между точками с абсциссами $x=-1$ и $x=1.$

11. Найдите длину дуги параболы $y=x^2/4;\ 0\le x\le 2.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^x-1}.$

Вариант 15

1. $\int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$ 2. $\int \frac{(\sin x-\cos x)^2-1}{\cos x} dx$ 3. $\int \frac{(x-1)dx}{9x^2-6x+5}$

4. $\int \frac{1+2\sin 2x}{\cos^2 x} dx$ 5. $\int (3x-2)e^{-2x} dx$ 6. $\int \frac{10x^2-2x+5}{(x-5)\left(x^2+x\right)} dx$

7. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$ 8. $\int\limits_2^3 (4x-2)\ln(x-1) dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2x+3,$ $y=-x+3.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$.

11. Найдите длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Вариант 16

1. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x - \sqrt{x}}{x}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$ 3. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x^2 - 4x - 7}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2\ln x + 3)}$ 5. $\displaystyle\int (2-x)\sin 3x dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{7x^2 + 11x - 72}{(x-4)(x^2+3x)}dx$

7. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ 8. $\displaystyle\int_0^4 (4x - x^2)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 5 - y^2$, $x = -4y$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной кривыми $y = x$; $y = x + \sin^2 x$; $0 \le x \le \pi$.

11. Найдите длину дуги кривой $y = 4 - 0.5x^2$; $y \ge 0$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$.

Вариант 17

1. $\displaystyle\int \frac{0.5\sqrt{x} + x - 1}{x}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}dx}{e^x + e^{-x}}$ 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - 7x}$

4. $\displaystyle\int \frac{(\ln^2 x + 1)dx}{x}$ 5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}$ 6. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x - 3}{2x^3 + 4x^2 + 3x}dx$

7. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ 8. $\displaystyle\int_0^{1/3} \arcsin 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной линиями $y = 0.5x^2 - 2x + 2;\ y = 2.$

11. Найдите длину дуги кривой $y = \ln \sin x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

Вариант 18

1. $\int \frac{1-2x^2}{\sqrt{x}}dx$ 2. $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$ 3. $\int \frac{dx}{\left(2-3x\right)^5}$

4. $\int \frac{\left(1-2\sin 2x\right)dx}{\cos^2 x}$ 5. $\int \sqrt{x}\ln xdx$ 6. $\int \frac{x^2+9x+22}{2x^3+4x^2+11x}dx$

7. $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{x+\sqrt{x}}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 xdx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x$ и $y = 2x - x^2.$

10. Найдите площадь шарового пояса, получаемого при вращении вокруг оси ox дуги окружности $x^2 + y^2 = 25, (y > 0)$ между точками с абсциссами $x = 1,\ x = -1.$

11. Найдите длину дуги кривой $r = \varphi^2;\ 0 \le \varphi \le 4.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}.$

Вариант 19

1. $\int \frac{5x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx$ 2. $\int \left(2^x + 3^x\right)^2 dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}$

4. $\int \frac{\left(\arcsin x+1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5. $\int \ln(\left(x^2-1\right)dx$ 6. $\int \frac{2x^2-3x-20}{x^3+2x^2+10x}dx$

7. $\int_{4}^{9} \frac{xdx}{x-\sqrt{x}}$ 8. $\int_{0}^{\pi/2} x^2 \cos^2 xdx$

9. Автобус движется с ускорением 3м/сек. Найдите путь, пройденный автобусом за 10 сек. от начала движения.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной кривыми $y=\cos x;\ y=9x^2\Big/\left(2\pi^2\right).$

11. Найдите длину дуги кривой $y=1-\ln\cos x,\ \ 0\le x\le \pi/4.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_{0}^{2} \frac{dx}{4-x^2}.$

Вариант 20

1. $\int \frac{4x^4+x-\sqrt{x}}{x}dx$ 2. $\int \frac{4^x+6^x dx}{2^x}$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$

4. $\int \frac{(\ln x+3)^5 dx}{x}$ 5. $\int \operatorname{arcctg} xdx$ 6. $\int \frac{3x^2+20x+40}{4x^3+8x^2+20x}dx$

7. $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}$ 8. $\int_{1}^{2} \left(x^2-1\right)\cos\frac{\pi x}{2}dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-3x+4,\ y=-x+1.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x,\ y=\sin x,\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right).$

11. Найдите длину дуги кривой $y=4\sqrt{x-2};\ 2\le x\le 3.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

Вариант 21

1. $\int \frac{x\sqrt[3]{x}+2x-1}{x}dx$ 2. $\int \frac{8^x-6^x dx}{2^x}$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x}}$

4. $\int \frac{(1+\sin\ln x)\,dx}{x}$ 5. $\int \arcsin 2x dx$ 6. $\int \frac{5x^2-2x+19}{2x^3-12x^2+19x}dx$

7. $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}dx}{x}$ 8. $\int\limits_1^2 (x^2-x)\sin\frac{\pi x}{4}dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=0,\ x=-7\pi/6,\ x=\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y=\cos^2 x,\ y=0,\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

11. Найдите длину дуги кривой $x=e^t\sin 2t,\ y=e^t\cos 2t;\ 0\le t\le 1$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$.

Вариант 22

1. $\int \frac{4x^2-1}{2x+1}dx$ 2. $\int (e^x-2)^3\,dx$ 3. $\int \sqrt[5]{1-3x}dx$

4. $\int \frac{(2\ln x+1)^3\,dx}{x}$ 5. $\int \arccos x dx$ 6. $\int \frac{2x^2+5x-16}{3x^3-12x^2+16x}dx$

7. $\int\limits_4^7 \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$ 8. $\int\limits_0^{1/4} \frac{xdx}{\cos^2\pi x}$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x+3$ и $y=-x^2+2x+3$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1,\ x=-1,\ x=1,\ y=0$.

11. Найдите длину дуги кривой $y=0.5x^2-0.25\ln x; 1\le x\le 3$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1 \ln 2x dx$.

Вариант 23

1. $\int \frac{9x^2-1}{3x+1}dx$ 2. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$ 3. $\int \frac{3x-1}{9x^2-12x+5}dx$

4. $\int \frac{\left(\sqrt{2+3x}+1\right)dx}{x}$ 5. $\int (3x-1)2^{-x}dx$ 6. $\int \frac{8x^2-48x+70}{\left(x^2-2x\right)\left(x-5\right)}dx$

7. $\int_0^4 \frac{3\sqrt{x}dx}{x\sqrt{x}+1}$ 8. $\int_0^{1/3} \operatorname{arctg} 3x dx$

9. Скорость точки дается формулой $v=\sqrt{9+t}$ м/сек. Найдите путь, пройденный точкой за первые 5 сек. после начала движения.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox одной полуволны синусоиды $y=3\sin 2x$.

11. Найдите длину дуги кривой CD $x=\sqrt{9-y^2}$, где $C\left(3;0\right), D\left(0;3\right)$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_0^{\infty} x\cos x dx$.

Вариант 24

1. $\int \frac{4x^2-9}{2x+3}dx$ 2. $\int \frac{\sin x dx}{\sin 2x \cos x}$ 3. $\int \sqrt{5-2x}dx$

4. $\int \frac{xdx}{4-3x^4}$ 5. $\int xe^{2x+3}dx$ 6. $\int \frac{x-16}{x^3+4x^2+28x}dx$

7. $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ 8. $\int_0^{1/2} \operatorname{arcctg} 2x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\operatorname{tg} x$; $y=0$; $x=\pi/3$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=1$; $y^2=1.5x$; $\left(x\ge 0\right)$.

11. Найдите длину дуги кривой $r=\varphi^3$; $0\le\varphi\le 1$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{3+x}$.

Вариант 25

1. $\int\frac{4-9x^2}{3x+2}dx$ 2. $\int\frac{\sin^3 xdx}{\sin 2x\cos x}$ 3. $\int\sqrt[3]{1+3x}dx$

4. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^4-3}}$ 5. $\int(1-4x)3^x dx$ 6. $\int\frac{x^2+8x+30}{2x^3+4x^2+10x}dx$

7. $\int_{8}^{10}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-4}}$ 8. $\int_{0}^{1/2}\arccos 2xdx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^3-12x$ осью ox

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной линиями $y=\operatorname{tg}x^2$; $y=0$; $x=\sqrt{\pi/3}$.

11. Найдите длину дуги кривой $x=2e^{3t}\cos t,\ y=2e^{3t}\sin t;\ 0\le t\le\pi/2$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Вариант 26

1. $\int\left(x\sqrt{x}-10x+1\right)dx$ 2. $\int\frac{\sin xdx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ 3. $\int(2-5x)^{10}dx$

4. $\int\frac{(x-\operatorname{arctg}x)dx}{1+x^2}$ 5. $\int(7x+3)\sin 5xdx$ 6. $\int\frac{3x^2-5x+26}{x^3-6x^2+13x}dx$

7. $\int_{1}^{4}\frac{\sqrt{x}dx}{x+\sqrt{x}}$ 8. $\int_{-1}^{1}(x-1)^2e^{x+1}dx$

9. Найдите всю площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{10}\left(x^4-13x^2+36\right)$ и осью ox.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x + \sin^2 x;\ 2y = x;\ y = x + \sin^2 x;\ 0 \le x \le \pi.$

11. Найдите длину дуги кривой $y = e^x;\ 0 \le x \ln \le 7.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}.$

Вариант 27

1. $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$ 2. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ 3. $\int \sqrt{4-3x}dx$

4. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 5. $\int (2-x)\cos 3xdx$ 6. $\int \frac{3x^2-5x+33}{2x^3-4x^2+11x}dx$

7. $\int\limits_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+3}}$ 8. $\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ox, прямой $x=1$ и линией $y = x\sqrt{1-x^2}$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x;\ y = x.$

11. Найдите длину дуги кривой $y = \ln\left(x^2-1\right);\ 2 \le x \le 5.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln xdx}{x}.$

Вариант 28

1. $\int \sqrt{x}\left(3x+\frac{1}{x}\right)dx$ 2. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$ 3. $\int (3x+5)^9 dx$

4. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 5. $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$ 6. $\int \frac{3x^2+12x+20}{4x^3+12x^2+10x}dx$

7. $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}$ 8. $\int\limits_0^2 \left(x-x^2\right)e^{x-2}dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x + 2, y = x + 4.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$; $2x + 2y - 3 = 0.$

11. Найдите длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-3)^3}$ от точки $A(3; 0)$ до точки $B(4; 1)$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Вариант 29

1. $\int \frac{2x-3}{x^2+5x} dx$ 2. $\int \cos^3 5x dx$ 3. $\int (5x+2)^{10} dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+2}$ 5. $\int x \sin 2x dx$ 6. $\int \frac{2x^3+3x}{x-1} dx$

7. $\int\limits_1^4 \frac{(1+\sqrt{x}) dx}{x^2}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/2} (x+2) \cos x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x + 3$ и $y = -x + 3.$

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$ и $y = 0, (0 \le x \le \pi)$.

11. Найдите длину дуги кривой $y = \sqrt{x-1}$; $2 \le x \le 3.$

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$.

Вариант 30

1. $\int \frac{3x+4}{x^2-x} dx$ 2. $\int \sin^4 x dx$ 3. $\int (7x-3)^5 dx$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$ 5. $\int (2x+3) \cos x dx$ 6. $\int \frac{4+3x}{5-2x} dx$

7. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ 8. $\int\limits_{0}^{1} (x-1)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{9-y^2}$, $y=\sqrt{x+1}$, $y=\sqrt{7-x}$, $y=0$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

11. Найдите длину дуги кривой $r=e^{2\varphi}$; $0 \le \varphi \le 1$.

12. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(3+x)^2}$.

ТЕСТЫ

Секция 1. Неопределенный интеграл, методы интегрирования

Задание 1. Определите функцию $f(x)$, для которой $F(x)=f(x)$, где $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$:

1) $c \cdot e^x$;
2) $\ln x$;
3) $c \cdot \sin x$;
4) $\cos x$.

Задание 2. Найдите интеграл $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$.

1) $\cos 2x + c$;
2) $\sin 2x + c$;
3) $x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$;
4) $\sin 2x + \cos 2x + c$.

Задание 3. Найдите интеграл $\int \cos(2-x)dx$.

1) $2x - \sin x + c$;
2) $\cos(x-2) + c$;
3) $2\sin x + c$;
4) $\sin(x-2) + c$.

Задание 4. Найдите интеграл $\int \cos 2x dx$.

1) $-\sin 2x + c$;
2) $2\sin x + c$;
3) $-2\cos x + c$;
4) $\frac{1}{2}\sin 2x + c$.

Задание 5. Найдите интеграл $\int 2^{x+1} dx$.

1) $2^{x+2} + c$;
2) $\frac{2^{x+1}}{\ln 2} + c$;
3) $2^x \ln 2 + c$;
4) $\frac{2^x}{\ln 2} + c$.

Задание 6. Найдите интеграл $\int \left(\frac{x-1}{x^2}\right) dx$.

1) $\ln|x| - \frac{1}{x^2} + c$;
2) $\ln|x-1| + c$;
3) $(x-1)\ln|x| + c$;
4) $\frac{1}{x}\ln|x| + c$.

Задание 7. Найдите интеграл $\int x(x+1)^5 dx$.

1) $\frac{x^7}{7}-\frac{x^6}{6}+c;$

2) $\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+c;$

3) $\frac{(x+1)^7}{7}+c;$

4) $\frac{x(x+1)^6}{6}+c.$

Задание 8. Найдите интеграл $\int x(x-1)^4\,dx.$

1) $\frac{(x-1)^6}{6}+c;$

2) $\frac{x(x-1)^5}{5}+c;$

3) $\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^5}{5}+c;$

4) $\frac{x^2(x-1)^5}{5}+c.$

Задание 9. Найдите интеграл $\int x(x-1)^{10}\,dx.$

1) $\frac{(x-1)^{12}}{12}+\frac{(x-1)^{11}}{11}+c;$

2) $\frac{x(x-1)^{12}}{12}+c;$

3) $\frac{x^2(x-1)^{11}}{11}+c;$

4) $\frac{x^2(x-1)^{10}}{2}+c.$

Задание10. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1) $\int \sin x^2 \cdot 2xdx = \int \sin x^2 d\left(x^2\right)$;

2) если $F\left(x\right) = f\left(x\right)$, где $F\left(x\right)$ — первообразная от функции $f\left(x\right)$, то $f\left(x\right) = ce^x$;

3) $\int \ln x^2 dx = 2\int \ln|x| dx$;

4) $\int \dfrac{x - 2\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int xdx - 2\int \sin xdx$.

Задание 11. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1) $\int \sin\sqrt{x} \cdot 2xdx = \int \sin\sqrt{x}dx \cdot \int 2xdx$;

2) $\int \left(\cos x - \sin x\right)^2 dx = \int dx - \int \sin 2xdx$;

3) $\int 6\ln\sqrt[3]{x}dx = 2\int \ln xdx$;

4) если $F\left(x\right) = f\left(x\right)$, где $F\left(x\right)$ — первообразная от функции $f\left(x\right)$, то $F\left(x\right) = \ln x$.

Задание 12. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1) $\int \ln\sqrt{x}dx = \dfrac{1}{2}\int \ln xdx$;

2) $\int 2xdx = x^2 + 4$;

3) $\int \left(\sin x + 1\right)^2 dx = \int \sin^2 xdx + \int 2\sin xdx + \int dx$;

4) $\int 2^x\sqrt{x}dx = \int 2^x dx \cdot \int \sqrt{x}dx$.

Задание 13. Функция $f\left(x\right)$ имеет производную $f'\left(x\right) = x + 1$. Укажите, какие из приведенных ниже функций могут считаться функцией $f\left(x\right)$:

1) $\dfrac{x^2}{2} + x + 2$;

2) $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + 2$;

3) $\dfrac{x^2}{2} + x$;

4) $\dfrac{(x+1)^2}{2}-2.$

Задание 14. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1) $\int x^{-10}dx=-\dfrac{1}{x^9}+c;$

2) $\int 3^{2x}\,dx=\dfrac{9^x}{\ln 9}+3;$

3) $\dfrac{5x+1}{x+1}=5-\dfrac{4}{x+1};$

4) $\int \cos(x-1)\,dx=-\sin(1-x)+c.$

Задание 15. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1) $\int\left(2^{x+3}-16\sqrt{x}\right)dx=8\int\left[2^x\,dx-\int xdx\right];$

2) $\int(\cos x+\sin x)^2\,dx=\int dx+\int \sin 2xdx;$

3) если $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$, то $\left[F(x)-x^2\right]$ — первообразная от функции $[f(x)-2x]$;

4) если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные от одной функции $f(x)$ так, что $F_1(x)=2F_2(x)$, то $f(x)=0$.

Секция 2. Определенный интеграл, формула Ньютона — Лейбница

Задание 1. Вычислите и запишите значение интеграла $\int\limits_2^4 7(x-3)^6\,dx.$

Задание 2. Вычислите и запишите значение интеграла $\int\limits_2^4 9(x-3)^8\,dx.$

Задание 3. Вычислите и запишите значение интеграла $\int\limits_2^4 10(x-3)^9\,dx.$

Задание 4. Вычислите и запишите значение интеграла $\int\limits_0^2 9(x-1)^8\,dx.$

Задание 5. Вычислите и запишите значение интеграла $\int\limits_0^2 11(x-1)^{10}\,dx.$

Задание 6. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_0^2 (x-1)^{11}\,dx$.

Задание 7. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_1^3 (x-2)^9\,dx$.

Задание 8. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_1^3 11(x-2)^{10}\,dx$.

Задание 9. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_3^5 7(x-4)^6\,dx$.

Задание 10. Вычислите интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin x dx$.

Задание 11. Вычислите интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x dx$.

Задание 12. Вычислите интеграл: $\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Задание 13. Вычислите интеграл: $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (x+1)\sin x dx$.

Задание 14. Вычислите интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$.

Задание 15. Вычислите интеграл: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x-1)\sin x dx$.

Секция 3. Приложения определенного интеграла

Задание 1. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2-x};\ y=\sqrt{x};\ y=0.$ В ответе укажите значение $3S$.

Задание 2. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{8-x};\ y=\sqrt{x};\ y=0.$ В ответе укажите значение $3S$.

Задание 3. Запишите значение площади S фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{18-x};\ y=\sqrt{x};\ y=0.$

Задание 4. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $y = 1$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 5. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $y = 4$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 6. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$; $y = 2$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 7. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $y = 2x$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 8. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $y = -2x$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 9. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$; $y = 0$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 10. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$; $y = 0$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 11. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$; $y = 2x$. В ответе укажите значение $3S$.

Задание 12. Найдите площадь треугольника, образованного прямой $l: 3x - 4y = 12$ с осями координат.

Задание 13. Найдите площадь треугольника, образованного прямой $l: x + 2y - 4 = 0$ с осями координат.

Задание 14. Найдите площадь треугольника, образованного прямой $l: x - 3y + 6 = 0$ с осями координат.

Задание 15. Найдите площадь треугольника, образованного прямой $l: 2x + 3y - 6 = 0$ с осями координат.

Секция 4. Несобственный интеграл

Задание 1. Вычислите несобственный интеграл с бесконечными пределами $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$. В ответе укажите значение $\frac{1}{\pi} J$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $J=\int\limits_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}$.

Задание 3. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $J=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(3+x)^2}$. В ответе укажите значение $4J$.

Задание 4. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Задание 5. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Задание 6. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^3}$.

Задание 7. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $J=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx$.

Задание 8. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $J=\int\limits_0^{\infty}e^{-2x}dx$. В ответе укажите значение $2J$.

Задание 9. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции $J=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. В ответе укажите значение $\frac{2}{\pi}J$.

Задание 10. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции $J=\int\limits_0^{1}\frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Задание 11. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции $J=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Задание 12. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции $J=\int\limits_0^{1}\frac{2dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

Задание 13. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции $J = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Задание 14. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции $J = \int\limits_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$. В ответе укажите значение $3J$.

Задание 15. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{2dx}{x+x^3}$. В ответе укажите значение $3J$.

ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

Секция 1. Неопределенный интеграл, методы интегрирования

Задание 1.

1) $c \cdot e^x$.

Задание 2.

3) $x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$.

Задание 3.

4) $\sin(x-2) + c$.

Задание 4.

4) $\frac{1}{2}\sin 2x + c$.

Задание 5.

2) $\frac{2^{x+1}}{\ln 2} + c$.

Задание 6.

1) $\ln|x| - \frac{1}{x^2} + c$.

Задание 7.

2) $\dfrac{(x+1)^7}{7}-\dfrac{(x+1)^6}{6}+c.$

Задание 8.

3) $\dfrac{(x-1)^6}{6}+\dfrac{(x-1)^5}{5}+c.$

Задание 9.

1) $\dfrac{(x-1)^{12}}{12}+\dfrac{(x-1)^{11}}{11}+c.$

Задание 10.

1) $\int \sin x^2 \cdot 2xdx=\int \sin x^2 d\left(x^2\right);$

2) если $F(x)=f(x)$, где $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$, то $f(x)=ce^x;$

3) $\int \ln x^2 dx=2\int \ln|x|\,dx.$

Задание 11.

2) $\int(\cos x-\sin x)^2\,dx=\int dx-\int \sin 2xdx;$

3) $\int 6\ln\sqrt[3]{x}dx=2\int \ln xdx.$

Задание 12.

1) $\int \ln\sqrt{x}dx=\dfrac{1}{2}\int \ln xdx;$

3) $\int(\sin x+1)^2\,dx=\int \sin^2 xdx+\int 2\sin xdx+\int dx.$

Задание 13.

1) $\dfrac{x^2}{2}+x+2;$

3) $\dfrac{x^2}{2}+x;$

4) $\dfrac{(x+1)^2}{2}-2.$

Задание 14.

3) $\dfrac{5x+1}{x+1}=5-\dfrac{4}{x+1}$;

4) $\int\cos(x-1)\,dx=-\sin(1-x)+c.$

Задание 15.

2) $\int(\cos x+\sin x)^2\,dx=\int dx+\int\sin 2x dx$;

3) если $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$, то $\left[F(x)-x^2\right]$ — первообразная от функции $\left[f(x)-2x\right]$;

4) если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные от одной функции $f(x)$ так, что $F_1(x)=2F_2(x)$, то $f(x)=0$.

Секция 2. Определенный интеграл, формула Ньютона — Лейбница

Задание 1. 2.
Задание 2. 2.
Задание 3. 0.
Задание 4. 2.
Задание 5. 2.
Задание 6. 0.
Задание 7. 0.
Задание 8. 2.
Задание 9. 2.
Задание 10. 3.
Задание 11. –1.
Задание 12. –2.
Задание 13. 0.
Задание 14. 1.
Задание 15. 2.

Секция 3. Приложения определенного интеграла

Задание 1. 4.
Задание 2. 32.
Задание 3. 36.
Задание 4. 4.
Задание 5. 32.
Задание 6. 4.
Задание 7. 4.

Задание 8. 4.
Задание 9. 32.
Задание 10. 4.
Задание 11. 4.
Задание 12. 6.
Задание 13. 4.
Задание 14. 6.
Задание 15. 3.

Секция 4. Несобственный интеграл

Задание 1. 1.
Задание 2. 1.
Задание 3. 1.
Задание 4. 1.
Задание 5. 1.
Задание 6. 1.
Задание 7. 1.
Задание 8. 1.
Задание 9. 1.
Задание 10. 3.
Задание 11. 2.
Задание 12. 3.
Задание 13. 2.
Задание 14. 8.
Задание 15. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бараненков А.И., Богомолова Е.И., Петрушко И.М.* Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике. – СПб.: Лань, 2009. – 240 с.

2. *Бутузов В.Ф.* и др. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2002.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. – М.: АСТ, 2001.

4. *Карасев В.А., Левшина Г.Д.* Математический анализ. Ч.1. Интегральное исчисление. – М.: Илекса, 2011. — 284с.

5. *Лунгу К.Н.* Сборник задач по высшей математике: 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 576 с.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1 – 2. – М.: Наука, 1996.

7. *Соболь Б.В.* Практикум по высшей математике. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 630 с.

Содержание

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов,**
Руслан Эльдар **Ахмедов**

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
С.А. Бобко
Технический редактор
К.А. Антонов
Компьютерная верстка
К.А. Рыжевский

Подписано в печать 17.11.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 4.
Тираж 46 экз. Заказ № 38.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.