

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение инклюзивного высшего образования
**«Московский государственный
гуманитарно-экономический университет»
(ФГБОУ ИВО «МГГЭУ»)**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методической работе

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Б1.В.01 Методы оптимизации

наименование дисциплины

44.03.01 «Педагогическое образование»

шифр и наименование направления подготовки

Информатика

направленность (профиль)

Москва 2023

Разработчик:
МГГЭУ, старший преподаватель кафедры информационных технологий и кибербезопасности

место работы, занимаемая должность



Литвин О.Н. «31» 03 2023 г.

подпись

Ф.И.О.

Дата

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры Информационных технологий и кибербезопасности (протокол № 9 от «03» 04 2023 г.)

на заседании Учебно-методического совета МГГЭУ

(протокол № 3 от «26» 04 2023 г.)

Согласовано:

Представитель работодателя
или объединения работодателей



Ощепков В.И. Ф.И.О./
«13» 04 2023 г.
«13» 04 2023 г.
«13» 04 2023 г.
№-342

Начальник учебно-методического управления



И.Г. Дмитриева
«26» 04 2023 г.

Начальник методического отдела



Д.Е. Гапеев
«26» 04 2023 г.

Декан факультета ЦТик



А.Н. Руднев
«26» 04 2023 г.

Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств.....
2. Перечень оценочных средств.....
3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций.....
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.....
Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации.....

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине «Методы оптимизации»

Оценочные средства составляются в соответствии с рабочей программой дисциплины и представляют собой совокупность контрольно-измерительных материалов (типовые задачи (задания), контрольные работы, тесты и др.), предназначенных для измерения уровня достижения обучающимися установленных результатов обучения.

Оценочные средства используются при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Таблица 1 - Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения дисциплины

Код компетенции	Содержание компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает: методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического анализа.
		УК-1.2. Умеет: получать новые знания на основе анализа, синтеза и других методов; собирать данные по сложным научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск информации и решений на основе экспериментальных действий.
		УК-1.3. Владеет: исследованием проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявлением научных проблем и использованием адекватных методов для их решения; демонстрацией оценочных суждений в решении проблемных профессиональных ситуаций.
ПК-4	Способен организовывать различные виды деятельности обучающихся в образовательном процессе по информатике и ИКТ, применять приемы, направленные на поддержание познавательного интереса	ПК-4.1. Знает: способы организации образовательной деятельности обучающихся при обучении информатике и ИКТ; приемы мотивации школьников к учебной и учебно-исследовательской работе по информатике и ИКТ
		ПК-4.2. Умеет: организовывать различные виды деятельности обучающихся в образовательном процессе по информатике и ИКТ; применять приемы, направленные на поддержание познавательного интереса

		ПК-4.3. Владеет: умениями по организации разных видов деятельности обучающихся при обучении информатике и ИКТ и приемами развития познавательного интереса
--	--	--

Конечными результатами освоения дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках контактной работы, включающей различные виды занятий и самостоятельной работы, с применением различных форм и методов обучения

2. ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ¹

Таблица 2

№	Наименование оценочного средства	Характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1.	Опрос	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2.	Решение разноуровневых задач (заданий)	Различают задачи и задания: а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; в) творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.	Комплект разноуровневых задач (заданий)
3.	зачет	Средство, позволяющее оценить знания, умения, навыки обучающегося по учебной дисциплине и определить уровень освоения компетенций.	Вопросы к зачету

¹ Указываются оценочные средства, применяемые в ходе реализации рабочей программы данной дисциплины.

3.ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценивание результатов обучения по дисциплине «Математика» осуществляется в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

Предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль (осуществление контроля всех видов аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающегося с целью получения первичной информации о ходе усвоения отдельных элементов содержания дисциплины) и промежуточная аттестация (оценивается уровень и качество подготовки по дисциплине в целом).

Показатели и критерии оценивания компетенций, формируемых в процессе освоения данной дисциплины, описаны в табл. 4.

Таблица 3.

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения
УК-1		Знает	
	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно».	УК-1.1.	<i>Не знает значительной части материала курса, не способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале дисциплины.</i>
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно».	УК-1.1.	<i>Знает не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения в его применении.</i>
	Средний уровень Оценка «хорошо».	УК-1.1.	<i>Знает основную часть материала курса, способен применить изученный материал на практике, испытывает незначительные затруднения в решении задач.</i>
	Высокий уровень Оценка «отлично».	УК-1.1.	<i>Показывает глубокое знание и понимание материала, способен применить изученный материал на практике.</i>
		Умеет	
	Базовый уровень	УК-1.2.	<i>Умеет воспроизвести не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения при решении практических задач.</i>
	Средний уровень	УК-1.2.	<i>Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, испытывает незначительные затруднения в решении задач.</i>
	Высокий уровень	УК-1.2.	<i>Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, показывает глубокое знание и понимание материала, способен решить задачу при изменении формулировки.</i>
		Владеет	
	Базовый уровень	УК-1.3.	<i>Студент владеет основными навыками теоретического и практического применения методов аналитической геометрии, линейной алгебры и математического анализа. Имеет несистематизированные знания основных разделов дисциплины.</i>
	Средний уровень	УК-1.3.	<i>Студент владеет знаниями всего изученного материала, владеет навыками теоретического и практического применения методов аналитической геометрии, линейной алгебры и математического анализа. Испытывает незначительные</i>

			<i>затруднения в решении задач.</i>
	Высокий уровень	<i>УК-1.3.</i>	<i>Свободно владеет навыками теоретического и практического применения методов аналитической геометрии, линейной алгебры и математического анализа, показывает глубокое знание и понимание изученного материала. Студент владеет концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией профессиональной деятельности.</i>
<i>ПК-4</i>		Знает	
	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно».	<i>ПК-4.1.</i>	<i>Не знает значительной части материала курса, не способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале дисциплины.</i>
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно».	<i>ПК-4.1.</i>	<i>Знает не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения в его применении.</i>
	Средний уровень Оценка «хорошо».	<i>ПК-4.1.</i>	<i>Знает основную часть материала курса, способен применить изученный материал на практике, испытывает незначительные затруднения в решении задач.</i>
	Высокий уровень Оценка «отлично».	<i>ПК-4.1.</i>	<i>Показывает глубокое знание и понимание материала, способен применить изученный материал на практике.</i>
		Умеет	
	Базовый уровень	<i>ПК-4.2.</i>	<i>Умеет воспроизвести не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения при решении практических задач.</i>
	Средний уровень	<i>ПК-4.2.</i>	<i>Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, испытывает незначительные затруднения в решении задач.</i>
	Высокий уровень	<i>ПК-4.2.</i>	<i>Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, показывает глубокое знание и понимание материала, способен решить задачу при изменении формулировки.</i>
		Владеет	
Базовый уровень	<i>ПК-4.3.</i>	<i>Студент владеет основными навыками теоретического и практического применения методов аналитической геометрии, линейной алгебры и</i>	

			<i>математического анализа. Имеет несистематизированные знания основных разделов дисциплины.</i>
	Средний уровень	<i>ПК-4.3.</i>	<i>Студент владеет знаниями всего изученного материала, владеет навыками теоретического и практического применения методов аналитической геометрии, линейной алгебры и математического анализа. Испытывает незначительные затруднения в решении задач.</i>
	Высокий уровень	<i>ПК-4.3.</i>	<i>Свободно владеет навыками теоретического и практического применения методов аналитической геометрии, линейной алгебры и математического анализа, показывает глубокое знание и понимание изученного материала. Студент владеет концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией профессиональной деятельности.</i>

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения

Задания в форме опроса:

Опрос используется для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине в качестве проверки результатов освоения материала. Каждому студенту выдается свой собственный, узко сформулированный вопрос. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия. В своем ответе студент должен показать умения проследивать причинно-следственные связи и навыки рассуждений и доказательства.

Задания в форме практических работ. Разноуровневые задачи

Практическая работа представляет собой контрольное мероприятие по учебному материалу каждой темы (раздела) дисциплины, состоящее в индивидуальном выполнении обучающимся практических заданий для оценки полученных знаний, умений и владений компетенциями, формируемыми по данной дисциплине.

Выполнение практических работ является средством текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине и может включать в себя следующие типы заданий: задания типового вида и задания творческого характера, по результатам выполнения практических заданий обучающие оформляют отчеты, содержащие анализ полученных результатов и выводы.

5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации

Задания в форме опроса

Тема 1. Задачи линейного программирования

- 1) Цель и задачи курса.
- 2) Постановка и классификация задач линейного программирования.
- 3) Начальное опорное решение.
- 4) Свойства решения ЗЛП и области допустимых решений.
- 5) Алгоритм симплекс-метода для решения ЗЛП.

Тема 2. Теория двойственности.

- 1) Экономическая интерпретация двойственной задачи на примере задачи об использовании ресурсов при производстве продукции.
- 2) Алгоритм составления задачи, двойственной по отношению к исходной.
- 3) Основное неравенство теории двойственности.
- 4) Первая и вторая теоремы двойственности.

Тема 3. Транспортная задача.

- 1) Постановка транспортной задачи (ТЗ).
- 2) Условие существования решения ТЗ.

- 3) Опорное решение.
- 4) Структура матрицы ограничений ТЗ.
- 5) Теорема о ранге.
- 6) Критерии оптимальности базисного распределения поставок.
- 7) Циклы.

Тема 4. Выпуклое программирование.

- 1) Особенности задачи выпуклого программирования (ВП).
- 2) Выпуклые функции.
- 3) Безусловная оптимизация.
- 4) Условная оптимизация.
- 5) Функция Лагранжа и седловые точки.
- 6) Приближенное решение задач выпуклого программирования.
- 7) Теорема Куна-Таккера.

Тема 5. Численные методы оптимизации.

- 1) Методы поиска локального экстремума функций нескольких переменных.
- 2) Принципы построения численных методов поиска безусловного экстремума.
- 3) Приближенные решения.
- 4) Скорость сходимости.
- 5) Метод квадратичной интерполяции.
- 6) Метод Ньютона.
- 7) Численные методы поиска условного экстремума.
- 8) Метод барьерных функций.

Вопросы для промежуточного контроля.

1. Сформулируйте классическую задачу оптимизации с n переменными.
2. Какой вид имеет производственная функция в: (а) линейной; (б) нелинейной задаче оптимизации?
3. Что называют локальным экстремумом функции n переменных, заданной в некоторой области?
4. Что называют глобальным экстремумом функции n переменных в некоторой области D ?
5. Как построить линию уровня производственной функции?
6. Что называется поверхностью уровня данной функции?
7. Как определяются стационарные точки функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$?
8. Для чего используется знак второго дифференциала $d^2F(x_1, x_2, \dots, x_n)$?
9. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух переменных $F(x_1, x_2)$.
10. Что называется условным экстремумом функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$?
11. Что называется оптимальным решением линейной задачи оптимизации?
12. Как построить область допустимых решений в линейной задаче оптимизации?
13. Как определяется функция Лагранжа; в каких задачах она используется?
14. Что называют выпуклым множеством в n -мерном пространстве?
15. Что называют выпуклой линейной комбинацией точек n -мерного пространства?
16. Как определяются выпуклые и вогнутые функции n переменных?

17. Какой критерий используется для определения выпуклости функции n переменных?
18. Какой геометрический смысл имеет условие выпуклости функции одной и двух переменных?
19. Сформулируйте задачу выпуклого программирования.
20. При каких условиях задача выпуклого программирования имеет единственное решение?

Задачи линейного и выпуклого программирования.

Вариант №1

1. Составить экономико-математическую модель задачи. Торговая организация планирует реализацию по двум товарным группам, по которым выделены фонды 800 тыс.руб. и 500 тыс.руб. Уровень транспортных издержек по этим товарам составляет 1% и 2% соответственно, уровень издержек, связанных с хранением товаров, – 2% и 1%, уровень прибыли – 3% и 2%. Предельно допустимые расходы, связанные с перевозкой и хранением товаров, равны 25 тыс.руб. и 29 тыс.руб. С учетом закупки товаров сверх выделенных фондов определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую организации максимальную прибыль.
2. Сформулировать условие, при котором точка X n -мерного пространства является выпуклой линейной комбинацией точек $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$.
3. Определить область допустимых решений двойственной задачи, если целевая функция исходной задачи не ограничена.
4. Построить все базисные допустимые решения системы ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Вариант №2

1. Составить экономико-математическую модель задачи. Предприятие выпускает три вида изделий. Месячная программа выпуска составляет: 2000 изделий первого вида, 1800 изделий второго вида и 1500 изделий третьего вида. Для выпуска изделий используются материалы, месячный расход которых не может превысить 61000 кг. В расчете на одно изделие первого вида расходуется 8 кг материала, второго вида – 10 кг, третьего вида – 11 кг. Оптовая цена одного вида изделия первого вида 70 у. е., второго и третьего соответственно 100 и 90 у. е. Определить оптимальный план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимум выручки.
2. Найти оценку числа базисных допустимых решений задачи линейного программирования с n переменными, содержащей m ограничений.
3. Определить ранг системы ограничений транспортной задачи, содержащей 5 поставщиков и 10 потребителей.
4. Построить все базисные допустимые решения системы ограничений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 10. \end{cases}$$

Вариант №3

1. Составить экономико-математическую модель задачи. Рацион составляется из двух видов продуктов (P_1 и P_2), в каждый из которых входят питательные вещества A, B, C . Минимальное суточное потребление питательного вещества A равно 100 ед., вещества B – 80 ед., вещества C – 160 ед. Цена 1 единицы продукта P_1 составляет 0.2 у. е., 1 ед. продукта P_2 – 0.3 у. е. Количество питательного вещества каждого вида в 1 ед. продукта приведено в таблице.

Питательные вещества	Содержание питательного вещества в единице продукта, ед.	
	P_1	P_2
A	0.1	0.5
B	0.25	0.1
C	0.2	0.4

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

2. Сформулировать критерий оптимальности решения в задаче максимизации целевой функции.

3. Определить условие, при котором оптимальное решение двойственной задачи является вырожденным.

4. Построить все базисные допустимые решения системы ограничений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант №4

1. Составить экономико-математическую модель задачи. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 70 у. е. и содержит 2 ед. жиров, 5 ед. белков, 2 ед. углеводов, 4 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 30 у. е. и содержит 4 ед. жиров, 3 ед. белков, 6 ед. углеводов, 3 ед. нитратов. Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий содержание жиров не менее 6 ед., белков не менее 10 ед., углеводов не менее 7 ед., нитратов не более 12 ед.

2. Определить условие, при котором общая задача линейного программирования имеет более одного оптимального решения.

3. Найти изменение оценки свободной клетки (i, j) в транспортной задаче, если к строке матрицы затрат добавляется положительный потенциал (+1).

4. Построить все базисные допустимые решения системы ограничений

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30. \end{cases}$$

Итерационные методы.

Задание № 1.

Вычислить и напечатать таблицу трёх функций y , z , w .

Аргумент x меняется от x_0 до x_k с шагом h . Функция y задана сходящимся рядом, сумму которого надо считать до тех пор, пока его очередной член не станет по модулю меньше заданного малого положительного ϵ .

Рассмотреть задачу при нескольких различных ϵ .

Таблицу представить в следующем виде:

x	y	z	w
-	-	-	-
-	-	-	-
...
-	-	-	-

Выровнять данные в таблице с помощью функций `cout.width()`, `cout.precision()`.

Варианты.

1.

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots;$$

$$z = \operatorname{arctg} x;$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.5, \quad x_k = 0.5, \quad h = 0.1.$$

2.

$$y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

$$z = e^{-x};$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -1, \quad x_k = 1, \quad h = 0.2.$$

3.

$$y = 2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \frac{2^7 x^7}{7!} + \dots;$$

$$z = \sin 2x;$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_k = \frac{\pi}{4}, \quad h = \frac{\pi}{20}.$$

4.

$$y = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots;$$

$$z = \cos 2x;$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = 0, \quad x_k = \frac{\pi}{2}, \quad h = 0.05\pi.$$

5.

$$y = 2x + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} + \frac{2^7 x^7}{7!} + \dots;$$

$$z = \operatorname{sh} 2x;$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.5, \quad x_k = 0.5, \quad h = 0.1.$$

6.

$$y = 1 + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots;$$

$$z = \operatorname{ch} 2x;$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.5, \quad x_k = 0.5, \quad h = 0.1.$$

7.

$$y = -\left(2x + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} + \frac{2^4 x^4}{4} + \dots\right);$$

$$z = \ln(1 - 2x);$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.25, \quad x_k = 0.25, \quad h = 0.05.$$

8.

$$y = 2x - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} - \frac{2^4 x^4}{4} + \dots;$$

$$z = \ln(1 + 2x);$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.25, \quad x_k = 0.25, \quad h = 0.05.$$

9.

$$y = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \dots;$$

$$z = \ln \frac{1}{1 - x^2};$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.5, \quad x_k = 0.5, \quad h = 0.1.$$

10.

$$y = 2x - \frac{2^3 x^3}{3} + \frac{2^5 x^5}{5} - \frac{2^7 x^7}{7} + \dots;$$

$$z = \operatorname{arctg} 2x;$$

$$w = y - z;$$

$$x_0 = -0.25, \quad x_k = 0.25, \quad h = 0.05.$$

Задание № 2.

Найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и минимальное значение $f(x^*)$.

Применить методы:

- 1) общего поиска;
- 2) деления пополам;
- 3) золотого сечения;

Подсчитать число итераций, число вычислений функции $f(x)$ и сравнить результаты.

Задание № 3.

Найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и минимальное значение $f(x^*)$ (выбрать начальное приближение на отрезке $[a, b]$) следующими методами:

- 1) Ньютона-Рафсона;
- 2) Квазиньютоновским (с аппроксимацией производной).

Подсчитать число итераций и число вычислений функции $f(x), f'(x), f''(x)$; сравнить результаты.

-
1. $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$, $[1; 1,5]$
 2. $f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x$, $[0; \pi/4]$
 3. $f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}$, $[0; 1]$
 4. $f(x) = x^4 + 4x^2 - 32x + 1$, $[1,5; 2]$
 5. $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$, $[1; 1,5]$
 6. $f(x) = x^3 - 3 \sin x$, $[0,5; 1]$
 7. $f(x) = 5x^2 - 8x^{5/4} - 20x$, $[3; 3,5]$
 8. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x$, $[1,5; 2]$
 9. $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$, $[-5; -4]$
 10. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$, $[1,5; 2]$
 11. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, $[-1; 0]$
 12. $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}$, $[0,5; 1]$
 13. $f(x) = x^2 + 2 \left(x \operatorname{tg} \frac{x}{e} - 2 \right)$, $[1,5; 2]$
 14. $f(x) = \frac{2x}{\ln 2} - 2x^2$, $[3,5; 4,5]$
 15. $f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x$, $[-1,5; -1]$

-
16. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, [-1; 0]$
17. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 5x, [-3; -2]$
18. $f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1), [0,5; 1]$
19. $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x, [0,5; 1]$
20. $f(x) = (x + 1)^4 - 2x^2, [-3; -2]$
21. $f(x) = 3(5 - x)^{4/3} + 2x^2, [1,5; 2]$
22. $f(x) = -x^3 + 3(1 + x)[\ln(1 + x) - 1], [-0,5; 0,5]$
23. $f(x) = 2 + x^2 + x^{2/3} - \ln(1 + x^{2/3}) - 2x \operatorname{arctg} x^{1/3}, [0,5; 1]$
24. $f(x) = x - \ln x, [0,1; 2]$
25. $f(x) = x^2 - \sin x, [0; \pi / 2]$
26. $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, [-1; 2]$
27. $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x}, [0; 1]$
28. $f(x) = e^x + \frac{1}{x}, [0,1; 2]$
29. $f(x) = (x - 4)^2 + \ln x, [3; 5]$
30. $f(x) = x^4 + e^{-x}, [0; 1]$

Задание № 4.

Решить задачу многомерной безусловной оптимизации.

Найти минимум функции $f(x)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$

- 1) методом градиентного спуска;
- 2) методом Марквардта.

Сравнить методы, для чего найти число итераций, число вычислений функции и ее производных.

№ вар.	Функция
1.	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2+x_2^2} - x_1 + 2x_2.$
2.	$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 0.5x_1 - 0.5x_2.$
3.	$f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2.$
4.	$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2).$
5.	$f(x) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2+2x_2^2} - x_1 - x_2.$
6.	$f(x) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2+x_2^2}.$
7.	$f(x) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + 3x_2.$
8.	$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2.$
9.	$f(x) = \ln(1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)).$
10.	$f(x) = x_1^2 + e^{x_1^2+x_2^2} + 4x_1 + 3x_2.$
11.	$f(x) = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$
12.	$f(x) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2+0.5x_2^2}.$
13.	$f(x) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2} - x_1 - x_3.$
14.	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 2x_3 - x_2 + e^{x_2^2+x_3^2}.$
15.	$f(x) = 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2} + x_1 - 2x_2.$
16.	$f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 + x_1^2x_2^2 + x_3^4 + x_1^2x_3^2 + x_1 + x_2.$
17.	$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + \cos(x_1 - x_2 + x_3).$

18.	$f(x) = e^{x_1^2+x_3^2} + \ln(4 + x_2^2 + 2x_3^2).$
19.	$f(x) = x_1 + x_2 - 5x_3 + e^{x_1^2+2x_2^2+x_3^2}.$
20.	$f(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2x_2^2 + \sqrt{5 + x_2^2 + 2x_3^2} + x_1 + x_3.$
21.	$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2\sin \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}.$
22.	$f(x) = 2\sqrt{x_1^2 + 3x_2^2 + 3} + x_2^2x_3^2 - x_1 - x_2.$
23.	$f(x) = x_1 - x_2 + x_2^2 + x_3^2 + e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$
24.	$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 3\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + 1} + e^{x_1^2+x_3^2}.$
25.	$f(x) = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + 3} + x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2).$
26.	$f(x) = x_1 + 10x_2 - 3x_3 + e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$
27.	$f(x) = e^{x_1^2} + (x_1 + x_2 + x_3)^2.$
28.	$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2\cos \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}.$
29.	$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - \sin(x_1 + 2x_2).$
30.	$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1^2+x_3^2} - x_2 + 3x_3.$

Задание № 5.

Решить задачу многомерной безусловной оптимизации.

Найти минимум функции $f(x)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$

- 1) методом штрафных функций или методом барьерных функций.
- 2) методом факторов.

Сравнить методы, для чего найти число итераций, число вычислений функции и т.д.

№ вар.	Функция
1.	$f(x) = 10x_1 - x_2,$ $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 3 \leq 0,$ $x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_2 - 4 \leq 0.$
2.	$f(x) = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2,$ $x_1^2 - 2x_2 \leq 0,$ $-x_1 + x_2 \leq 0.$
3.	$f(x) = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2,$ $-1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 2.$
4.	$f(x) = 2x_1 + x_2,$ $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1.$
5.	$f(x) = 2\sqrt{1 + x_1^2 + 2x_2^2} + x_1 + x_2,$ $5 \leq x_1 \leq 8, \quad 1 \leq x_2 \leq 10.$
6.	$f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2,$ $x_1 + (x_2 - 4)^2 \leq 9.$
7.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3,$ $x_1 + x_2 - x_3 = 3.$
8.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 - 2x_3,$ $2x_1 + x_3 = 2.$
9.	$f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 1)^4,$ $2x_1 + x_2 \leq 2.$
10.	$f(x) = x_1^2 - x_2,$ $2x_1 - 2x_2 \leq 1.$

11.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 13,$ $2x_1 + x_2 \leq 10.$
12.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2,$ $5x_1 + 13x_2 \leq 51,$ $15x_1 + 7x_2 \leq 107.$
13.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 6.$
14.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2,$ $9x_1 + 8x_2 \leq 72,$ $x_1 + 2x_2 \leq 10.$
15.	$f(x) = x_1^2 - 2x_1 - 2x_2,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 6,$ $2x_1 + x_2 \leq 4.$
16.	$f(x) = x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + x_3,$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6,$ $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2.$
17.	$f(x) = x_2^2 - x_1 - 2x_2,$ $2x_1^2 + 2x_2^2 \leq 6.$
18.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2,$ $x_1^2 + x_2^2 \leq 9.$
19.	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_2,$ $-2x_1 + x_2^2 \leq 0,$ $x_1 - 2x_2 \leq 0.$
20.	$f(x) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2,$ $x_1^2 + (x_2 + 4)^2 \leq 9.$

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1. Провести две итерации методом наискорейшего спуска в задаче нелинейного программирования без ограничений. Начиная из исходной точки $X_0 = (x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$ и находя одномерные минимумы на каждой итерации аналитически, используя необходимое условие существования экстремума. Показать на графике направления спуска и последовательные приближения к точке минимума. Вычислить значение целевой функции в исходной точке и последующих приближениях.

- 1) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$ (min) ;
- 2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2$ (min);
- 3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 20$ (min) ;
- 4) $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2 - 5x_1^2$ (max) ;
- 5) $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2$ (max) ;
- 6) $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 13$ (max) ;
- 7) $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$ (max) ;
- 8) $f(x_1, x_2) = -6x_1 + 2x_1^2 + 2x_2^2$ (min) ;

Задание 2. Дана задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений.

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений:

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>a</i>	-5	-6	-1	-2	-3	-1	-3	-2	-2	1
<i>b</i>	-4	-2	-1	-1	-4	-1	-1	-6	-2	-1
a_{11}	5	2	5	2	3	3	3	3	6	6
a_{12}	-4	5	-4	5	8	5	8	5	7	7
b_1	-20	20	-20	20	24	15	24	15	42	42
a_{21}	3	2	3	2	4	5	4	5	3	3
a_{22}	2	1	2	1	7	3	7	3	-2	-2
b_2	30	10	30	10	28	15	28	15	-6	-6

Задание 3. Двум предприятиям на пять лет выделены средства в количестве $a=2000$ ден. ед. Известно, что доход от x единиц на первом предприятии равен $f_1(x)=5x$, от y ден. единиц на втором предприятии – $f_2(y)=6y$ ден. единиц. К концу года остаток средств равен соответственно $q_1(x)=0,8x$, $q_2(y)=0,3y$. Как распределить средства между предприятиями, чтобы общий доход был наибольшим? Решить задачу методом динамического программирования.

Задание 4. Найти графически решение задачи выпуклого программирования. Составить функцию Лагранжа и найти ее седловую точку.

$$Z(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 4 - x_1^2; \\ x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 1. \end{cases}$$

4.

Вопросы к зачету

1. Линейные и нелинейные задачи оптимизации.
2. Поверхности уровня функции n переменных. Линии уровня.
3. Условный и безусловный экстремум. Допустимая область.
4. Необходимые условия экстремума целевой функции.
5. Второй дифференциал целевой функции. Матрица Гессе.
6. Достаточные условия экстремума целевой функции.
7. Уравнения связи в экстремальных задачах. Метод множителей Лагранжа.
8. Выпуклые множества в n -мерных пространствах, их свойства.
9. Алгебраические и аналитические свойства выпуклых функций.
10. Задача выпуклого программирования.
11. Геометрический метод решения задачи выпуклого программирования.
12. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Общая и каноническая формы.
13. Свойства опорного решения ЗЛП.
14. Общая схема симплексного метода решения ЗЛП.
15. Свойства оптимальных решений задачи линейного программирования.
16. Критерий оптимальности решения ЗЛП.
17. Понятие двойственности в линейном программировании.
18. Свойства решений взаимно двойственных задач.
19. Транспортная задача по критерию стоимости. Открытая и закрытая модели.
20. Методы построения начального опорного решения транспортной задачи.
21. Критерии оптимальности базисного решения транспортной задачи.
22. Метод потенциалов решения транспортной задачи.
23. Приближенное решение задач выпуклого программирования.
24. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования. Метод спуска.
25. Метод последовательной безусловной минимизации.
26. Постановка задачи вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.
27. Построение экстремалей в задачах вариационного исчисления.
28. Метод штрафных функций.