**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет

В.А. КАДЫМОВ

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Москва
2018

УДК 517
ББК 22.161.1
К 13

Рецензенты:

Уварова Л.А., д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ Станкин

Яновская Е.А., канд. тех. наук, доцент кафедры

В.А. Кадымов

К 13 Функции многих переменных. Теория пределов. Дифференциальное исчисление: учебно-методическое пособие. – М.: МГГЭУ, 2018. – 80 с.

ISBN 978-5-9799-0107-7

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1.1. Область определения

Определение 1. Пусть задано множество G пар (x, y) числовых значений переменных x и y и задан закон f, по которому каждой паре $(x; y)$ из множества G ставится в соответствие единственное значение функции $z\,(x, y)$. Тогда говорят, что задана *функция двух переменных* $z = f\,(x,\ y)$, которые называются *аргументами*, или *независимыми переменными*.

Множество G называется областью определения (существования) функции $f(x, y)$.

Замечание. Поскольку на плоскости xoy любой паре $(x; y)$ соответствует точка $M\,(x; y)$, то вместо $f\,(x, y)$ можно записать $f\,(M)$, а пару $(x; y)$ называть точкой $M\,(x; y)$. Под областью определения функции $z = f\,(x,\ y)$ будем понимать как множество G, так и соответствующее ему множество точек в плоскости xoy.

Если область определения специально не указана, то она находится из условия того, чтобы выражение $f\,(x, y)$ имело смысл.

Пример 1. $z = \ln\left(x + y\right)$. Область определения этой функции находится из условия $x + y > 0$ или $y > -x$, т.е. G — множество точек плоскости xoy, лежащих выше прямой $y = -x$.

Выполните самостоятельно. Изобразите области определения функций.

1. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

2. $z = \arcsin(x + y)$.

3. $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.

4. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Определение 2. *Окрестностью* $U_r(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$ радиуса r называется множество точек $M(x; y)$, лежащих внутри круга радиуса r с центром в $M_0(x_0; y_0)$:

$$U_r(M_0) = \left\{ (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}. \qquad (1.1)$$

Введем понятие области как множества точек плоскости *xoy* определенного класса (не путать с понятием области определения функции).

Определение 3. *Областью D* называется множество точек плоскости, характеризующееся следующими свойствами:

1) *свойство открытости:* если точка $M \in D,$ то существует и некоторая окрестность этой точки, которая целиком содержится в *D*;
2) *свойство связности*: любые две точки множества *D* можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в *D*.

Примером области может служить круг $x^2 + y^2 < 1,$ не включающий в себя точки окружности $x^2 + y^2 = 1.$

Определение 4. *Граничной точкой* области *D* называется точка, любая окрестность которой содержит как точки области *D*, так и точки, не принадлежащие *D*.

Границей ∂D области *D* называется множество всех ее граничных точек. Вследствие свойства открытости, все точки области *D* являются внутренними, т.е. не принадлежащими границе.

Объединение области *D* с ∂D называется *замкнутой областью D*.

Область называется *ограниченной*, если она целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса. Примером замкнутой области может служить круг $x^2 + y^2 \le 1.$

Линия уровня функции двух переменных — это такое множество точек из ее области определения, в которых функция принимает одно и то же значение.

Определение 5. *Линией уровня* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью $z = C$, параллельной координатной плоскости xoy.

По взаимному расположению линий уровня (при различных значениях C) можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$.

Выполните самостоятельно. Постройте линии уровня функций.

1. $z = \dfrac{y}{x}$.

2. $z = x^2 - y^2$.

3. $z = x^2 + y^2$.

1.2. Предел и непрерывность

Определение 6. Число A называется *пределом* функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой радиус $r = r(\varepsilon) > 0$, что для всякой точки $M\left(x; y\right)$, не совпадающей с M_0 и находящейся в окрестности точки M_0 радиуса r, т.е. при $0 < \left|\overrightarrow{MM_0}\right| = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < r(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon.$$

Записывается это так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = A. \tag{1.2}$$

Отметим, что для существования предела $f\left(x, y\right)$ в точке M_0 вовсе не требуется, чтобы функция была определена в этой точке. Подчеркнем также, что из самого определения предела следует, что если он существует, то он единственный и не зависит от траектории, по которой точка $M\left(x,\, y\right)$ стремится к точке M_0.

Пример 2. Найдите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0;\quad y\to 2\\ \alpha\equiv xy\to 0}}\left(y\cdot\frac{\sin xy}{xy}\right)=\lim_{\substack{y\to 2\\ \alpha\to 0}}\left(y\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\cdot 2=2.$$

Мы воспользовались первым замечательным пределом, а также теоремой о пределе произведения двух функций: предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если каждый из них существует.

Пример 3. Исследуйте вопрос существования предела функции

$$J=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}.$$

Решение. Этот предел удобнее исследовать в полярных координатах $\left(x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi\right)$:

$$J=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\rho\neq 0)}}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi\right)}{\rho^2\left(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\lim_{\rho\to 0}\rho f_1\left(\varphi\right)=0,$$

где $f_1\left(\varphi\right)$ — ограниченная функция:

$$\left|f_1\left(\varphi\right)\right|=\frac{\left|\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi\right|}{\left|1-\left(1/2\right)\sin 2\varphi\right|}\le\frac{\left|\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi\right|}{1/2}\le\frac{2}{1/2}=4.$$

Пример 4. Исследуйте вопрос существования предела функции $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ в точке $M_0(0;0)$.

Решение. Учитывая, что в пределе $x\neq x_0\equiv 0,\ \ y\neq y_0\equiv 0,$ получаем:

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{x^2y}{x^2\left[1+\left(y/x\right)^2\right]}=\frac{y}{1+\left(y/x\right)^2}\Rightarrow\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{y}{1+\left(y/x\right)^2}\right|\le|y|$$

и, переходя к пределу в последнем неравенстве, устанавливаем, что

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

Отметим, что данный предел проще исследовать в полярной системе координат $\left(x=\rho\cos\varphi\to0;\; y=\rho\sin\varphi\to0\Rightarrow\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0\right)$:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\lim_{\rho\to0}\rho\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\right)=0.$$

Пример 5. Исследуйте вопрос существования предела $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Решение. Покажем, что этого предела не существует. Для этого достаточно взять два разных направления и показать, что они приводят к отличным друг от друга результатам:

а) $y=x;\;\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot x}{x^4+x^2}=\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2+1}=0;$

в) $y=x^2;\;\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle=\lim\limits_{\substack{x\to0\\(x\neq0)}}\dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}.$

Следовательно, указанного предела не существует.

Отсутствие предела можно показать также, используя полярные координаты. Действительно,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{\rho^2\left(\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\lim_{\rho\to0}\rho\left(\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}\right).$$

Достаточно выбрать 2 направления и подтвердить, что последний предел приводит к различным значениям:

а) $\begin{cases}\rho(\varphi)=\sin\varphi/\cos^2\varphi \\ \varphi\to 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = \left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle =$

$$= \lim_{\varphi\to 0} \left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\cos^4\varphi+\sin^2\varphi} = \frac{1}{2};$$

в) $\begin{cases}\rho(\varphi)=\rho\to 0 \\ \varphi=\varphi_0=\pi/4\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = \left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle = \lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\pi/4}} \rho \dfrac{1/\left(2\sqrt{2}\right)}{\rho^2(1/4)+(1/2)} = 0.$

Таким образом, подтвердили полученный выше результат.

Определение 7. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, включая и саму эту точку. Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, причем $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, то $f(x,y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Если точка $M_0(x_0;y_0)$ лежит в области определения функции $f(x,y)$ или на ее границе, причем в этой точке нарушается какое-либо из условий непрерывности, то M_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x,y)$.

Пример 6. Функция $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ разрывна в точке $M_0(0;0)$, поскольку эта точка принадлежит границе (и является границей) области определения, z причем $z(x,y)$ в ней не определена. Более того, данная функция не имеет предела в указанной точке. Действительно, пусть $M(x;y)\to M_0(0;0)$ вдоль прямой $y=kx\,(k=\text{const})$. Тогда вдоль этой прямой $z=\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}=\text{const}$ (при $M\ne M_0$) и получается, что предел $z(x,y)$ зависит от направления прямой $y=kx$, что противоречит определению предела (предел функции в точке определяется единственным образом).

Выполните самостоятельно. Дайте определение предела функции двух переменных в точке. Докажите, что функция $f(x,y)=$ $=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $(0;0)$.

2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

2.1. Частные производные

Пусть задана функция $z=f(x,y)$. Выберем точку $M_0(x_0;y_0)$ внутри области определения $f(x,y)$ и рассмотрим малое приращение Δx аргумента $x=x_0+\Delta x$, оставив другой аргумент фиксированным и равным y_0. Тогда разность $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ называется *частным приращением* функции $f(x,y)$ в точке M_0.

Определение 8. *Частной производной* функции $z=f(x,y)$ по переменной x, обозначаемой $f_x'(x_0,y_0)$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_{0,}y_0)$, в точке $M_0(x_0;y_0)$ называется предел

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

если он существует.

Аналогично вводятся частное приращение $\Delta_y z$ и частная производная функции z по y в точке M_0, обозначаемая $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_{0,}\ y_0)$ или $f_y'(x_0,y_0)$:

$$f_y'(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Поскольку f'_x и f'_y являются функциями точки M_0, и при этом точка M_0, может меняться, то индекс «ноль» у их аргументов будем опускать.

Пример 7. Пусть $z = \dfrac{x^3}{y}$. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3x^2}{y}$ (дифференцируем по *x*, считая *y* постоянным) и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^3}{y^2}$ (дифференцируем по y при постоянном *x*).

Пример 8. Найдите частные производные функции $z = y\sin 2x$ в точке $P_0\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$.

Решение. Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y\cos 2x$ (дифференцируем по *x*, считая *y* постоянным) и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin 2x$ (дифференцируем по *y* при постоянном *x*). Подставим координаты точки $P_0\left(\pi/2;1\right)$: $z'_x\left(P_0\right) = -2$; $z'_y\left(P_0\right) = 0$.

Выполните самостоятельно. 1. Дайте определение частных производных функции $f(x,y)$ в точке $\left(x_0;y_0\right)$. Найдите, исходя из определения, частные производные 1-го порядка функции $f\left(x,y\right) = x^2 y$ в точке $M_0(1;2)$.

Ответ: $f'_x\left(M_0\right) = 4$; $f'_y\left(M_0\right) = 1$).

2. Найдите частные производные функции $f\left(x,y\right) = x^2 + y^3$ в точке $M_0\left(2;3\right)$.

Ответ: $f'_x\left(M_0\right) = 4$; $f'_y\left(M_0\right) = 27$).

2.2. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть точка $M_0\left(x_0; y_0\right)$ лежит внутри области определения функции $z = f(x, y)$. Рассмотрим малые приращения Δx и Δy в точке M_0.

Определение 9. *Полным приращением* $f(x, y)$ в точке M_0 называется разность

$$\Delta z = \Delta f\left(x_0, y_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right). \qquad (2.1)$$

Определение 10. Функция $z = f(x,\ y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \qquad (2.2)$$

при этом величины A и B зависят только от M_0 и не зависят от $\Delta x,\ \Delta y,$ а $\alpha\left(\Delta x, \Delta y\right)$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

$$\alpha\left(\Delta x, \Delta y\right) = o\left(\rho\right), \text{ т.е. } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha\left(\Delta x, \Delta y\right)}{\rho\left(\Delta x, \Delta y\right)} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha\left(\Delta x, \Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Полным дифференциалом df (или dz) указанной функции $z = f\left(x,\ y\right)$ в точке M_0 называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно Δx и Δy:

$$dz\left(x_0, y_0\right) = df\left(x_0, y_0\right) = A\Delta x + B\Delta y, \qquad (2.3)$$

при этом $dy = \Delta y,\ \ dx = \Delta x.$

С точностью до бесконечно малой высшего порядка $\Delta z \approx dz$ при $\Delta x, \Delta y \to 0.$

Теорема 1. Если $z = f(x,\ y)$ *дифференцируема в точке* M_0, *то в этой точке существуют* $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, *причем* $\frac{\partial f}{\partial x} = A,\ \frac{\partial f}{\partial y} = B.$

Обратное утверждение верно, если предположить непрерывность $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Теорема 2. Если у функции $z = f(x,\ y)$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, то $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Итак, для дифференцируемой функции выполняется

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy,$$

$$\Delta z(M_0) = \Delta f(M_0) = df(M_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{2.4}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$

В дальнейшем вместо $x_0,\ y_0$ будем писать x, y.

Пример 9. Найдите полный дифференциал функции $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{(x+y)};$$

$$dz = \frac{dx}{x+y} - \frac{xdy}{y(x+y)} = \frac{1}{x+y}(dx - xdy).$$

Заметим, что все понятия данного раздела легко обобщаются на случай трех и более переменных.

Как следует из (2.4), при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$.

Пример 10. Определите, как изменятся площадь и диагональ прямоугольника со сторонами 8 *м* и 6 *м*, если его большую сторону уменьшить на 1,2 *см*, а меньшую увеличить 1,4 *см*.

Решение.

1) Площадь прямоугольника и длина диагонали находятся по формулам $S = a \times b$ и $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, поэтому для решения задачи привлечем функции $z = f(x, y) = xy$ и $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, а также формулу приближенного вычисления

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

2) Полагаем $x_0 = 8, y_0 = 6, \Delta x = -0{,}012, \Delta y = 0{,}014,$ тогда для площади прямоугольника изменение составляет

$$\Delta z \approx 6 \times (-0{,}012) + 8 \times (0{,}014) = 0{,}4;$$

диагональ прямоугольника изменится на величину

$$\Delta z \approx \frac{8}{\sqrt{64+36}}(-0{,}012) + \frac{6}{\sqrt{64+36}}(0{,}014) =$$
$$= -0{,}8 \times 0{,}012 + 06 \times 0{,}014 = -0{,}0012.$$

Пример 11. Центральный угол кругового сектора пластины равен $\varphi_0 = 80^\circ$, а начальная длина его радиуса равна $R_0 = 20$ см. Заказчик пожелал уменьшить угол на $d\varphi = \varphi - \varphi_0 = -1^\circ$. Насколько при этом надо увеличить радиус сектора, чтобы его площадь $S(R, \varphi) = \dfrac{\pi R^2 \varphi}{360}$ оставить без изменения?

Решение. По условию, изменение площади сектора равно нулю: $\Delta S = S\left(R_0 + dR, \varphi_0 + d\varphi\right) - S\left(R_0, \varphi_0\right) = 0$.

Если положить малыми изменения dR и $d\varphi$ $\left(dR = o\left(R_0\right); d\varphi = o\left(\varphi_0\right)\right)$, то

$$\Delta S \approx dS\left(M_0\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial R} dR + \frac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial \varphi} d\varphi = 0,$$

откуда

$$dR = -\frac{\dfrac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial \varphi} d\varphi}{\dfrac{\partial S\left(M_0\right)}{\partial R}} = \frac{\dfrac{\pi R_0^{\ 2}}{360} \cdot 1}{\dfrac{\pi R_0}{180} \cdot 80} = \frac{1}{8} = 0.125\left(см\right).$$

Пример 12. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{\left(4,05\right)^2 + \left(2,93\right)^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точках $M\left(x; y\right)$ и $M_0\left(x_0; y_0\right)$:

$x = 4,05;\ \ y = 2,93;\ \ x_0 = 4;\ y_0 = 3;\ \ \Delta x = x - x_0 = 0,05;$

$\Delta y = y - y_0 = -0,07;$

$z\left(M_0\right) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$

$$z'_x\left(M\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_x\left(M_0\right) = \frac{4}{5};$$

$$z'_y\left(M\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_y\left(M_0\right) = \frac{3}{5}.$$

Тогда искомое выражение

$$\sqrt{\left(4,05\right)^2 + \left(2,93\right)^2} \equiv z\left(M\right) \approx z\left(M_0\right) + z'_x\left(M\right)\Delta x + z'_y\left(M\right)\Delta y =$$

$$= 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5} \cdot \left(-0,07\right) = 5,04 - 0,042 = 4,998.$$

Пример 13. Заменяя приращение функции дифференциалом**,** вычислите приближенно $0{,}97^{1{,}05}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$ в точках $M(x; y)$ и $M_0(x_0; y_0)$:

$x = 0{,}97;\ y = 1{,}05;\ x_0 = 1;\ y_0 = 1;\ \Delta x = x - x_0 = -0{,}03;$

$\Delta y = y - y_0 = 0{,}05;$

$z(M_0) = 1;$

$z'_x(M) = yx^{y-1} \Rightarrow z'_x(M_0) = 1;$

$z'_y(M) = x^y \ln x \Rightarrow z'_y(M_0) = 0.$

Тогда искомое выражение

$$0{,}97^{1{,}05} \equiv z(M) \approx z(M_0) + z'_x(M)\Delta x + z'_y(M)\Delta y =$$

$$= 1 + 1 \cdot (-0{,}03) = 0{,}97.$$

Выполните самостоятельно. 1. Найдите полный дифференциал функции $z = e^{x^2 + y^2}$.

Ответ: $dz = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy)$.

2. Дайте определение дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$. Докажите, что если функция дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

3. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x = 6$ м и $y = 8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

Ответ: диагональ уменьшится на 3 мм, а площадь уменьшится на 140 см^2.

4. На сколько приблизительно изменится сторона квадрата, если его площадь уменьшить с 16 м^2 до 15,82 м^2?

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

Ответ: 2,95.

2.3. Частные производные высшего порядка. Формула Тейлора

Частными производными 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка этой функции

$$d^2 z = d(dz).$$

Если $z = f(x, y)$, где x и y – независимые переменные, и функция f имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

В общем случае, при наличии соответствующих производных, справедлива формула биномиального распределения:

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

Пример 14. Найдите частные производные 2-го порядка от функции $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Пусть функция двух переменных $z=f\left(x,y\right)$ имеет в окрестности точки $M_0\left(x_0;y_0\right)$ непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)$-го порядка включительно. Тогда в рассматриваемой окрестности точки M_0 справедлива *формула Тейлора*:

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{1!}\left[f_x'\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f_y'\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}''\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)^2+2f_{xy}''\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+f_{yy}''\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)^2\right]+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left[\left(x-x_0\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(y-y_0\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f\left(x_0,y_0\right)+R_n\left(x,y\right),$$

где $R_n\left(x,y\right)=\dfrac{1}{\left(n+1\right)!}\left[\left(x-x_0\right)\dfrac{\partial}{\partial x}+\left(y-y_0\right)\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}$

$f\left[x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right),y_0+\theta\cdot\left(y-y_0\right)\right]$ — остаточный член формулы Тейлора в разложении функции в форме Лагранжа $\left(0<\theta<1\right)$.

Частный случай этой формулы при $x_0=y_0=0$ называется *формулой Маклорена*.

Аналогичные формулы имеют место для функции трех и большего числа независимых переменных.

Пример 15. Разложите функцию $f\left(x,y\right)=2x^2-xy-y^2-6x-$ $-3y+5$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0\left(1;-2\right)$.

Решение. Последовательно вычисляем частные производные:

$$f_x'=4x-y-6;\ f_y'=-x-2y-3;\ f_{xx}''=4;\ f_{xy}''=-1;\ f_{yy}''=-2,$$

причем другие частные производные равны нулю. При этом, $f\left(M_0\right)=5;\ \ f'_x\left(M_0\right)=0;\ f'_y\left(M_0\right)=0.$

Подстановка их в формулу Тейлора дает:

$$f\left(x,y\right)=5+2\left(x-1\right)^2-\left(x-1\right)\left(y+2\right)-\left(y+2\right)^2.$$

Пример 16. Разложите функцию $f\left(x,y\right)=x^y$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M\left(1;1\right)$ с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с $\rho=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2}$.

Решение. Последовательно проводя вычисления, получаем:

$$f'_x=yx^{y-1};\ f'_y=x^y\ln x;\ f''_{xx}=y\left(y-1\right)x^{y-2};\ f''_{xy}=x^{y-1};\ f''_{yy}=x^y\left(\ln x\right)^2.$$

В рассматриваемой точке соответственно:

$$f\left(M\right)=1;\ f'_x\left(M\right)=1;\ f'_y\left(M\right)=0;\ f''_{xx}\left(M\right)=0;\ f''_{xy}\left(M\right)=1;\ f''_{yy}\left(M\right)=0.$$

Искомое разложение принимает вид:

$$f\left(x,y\right)=1+\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(y-1\right)+o\left(\rho^2\right).$$

Пример 17. Разложите функцию $u\left(M\right)\equiv u\left(x,y,z\right)=$ $=\left(5x-4z\right)\operatorname{arctg}^2\left(y+2z\right)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0\left(x_0=0;\ y_0=-1;\ z_0=1\right)$ с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с $\rho=\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-1\right)^2}$.

Решение. Разложим функцию $u\left(x,y,z\right)=\left(5x-4z\right)\operatorname{arctg}^2\left(y+2z\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки M_0 и оставим первые 10 членов ряда:

$$u(x,y,z)=u(M)=u(M_0)+\frac{1}{1!}\Big[u'_x(M_0)(x-x_0)+u'_y(M_0)(y-y_0)+u'_z(M_0)(z-z_0)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2!}\Big[u''_{xx}(M_0)(x-x_0)^2+2u''_{xy}(M_0)(x-x_0)(y-y_0)+2u''_{xz}(M_0)(x-x_0)(z-z_0)+$$

$$+2u''_{yz}(M_0)(y-y_0)(z-z_0)+u''_{yy}(M_0)(y-y_0)^2+u''_{zz}(M_0)(z-z_0)^2\Big]+R_n(x,y,z).$$

Остается найти все неизвестные коэффициенты, входящие в последнее разложение:

$$u(M_0)=(0-4)\operatorname{arctg}^2 1=-\frac{\pi^2}{4};$$

$$u'_x(M)=5\operatorname{arctg}^2(y+2z)\Rightarrow u'_x(M_0)=5\operatorname{arctg}^2 1=\frac{5\pi^2}{16};$$

$$u'_y(M)=\frac{5x-4z}{1+(y+2z)^2}\Rightarrow u'_y(M_0)=\frac{0-4}{1+1}=-2;$$

$$u'_z(M)=-4\operatorname{arctg}^2(y+2z)+(5x-4z)2\operatorname{arctg}(y+2z)\frac{2}{1+(y+2z)^2};$$

$$u'_z(M_0)=-\frac{\pi^2}{4}-2\pi;$$

$$u''_{xx}(M)=5\operatorname{arctg}^2(y+2z)\cdot 0=0\Rightarrow u''_{xx}(M_0)=0;$$

$$u''_{xy}(M)=5\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot 1\Rightarrow u''_{xy}(M_0)=5\operatorname{arctg}1=5\pi/4;$$

$$u''_{xz}(M)=10\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot\frac{2}{1+(y+2z)^2}\Rightarrow u''_{xz}(M_0)=\frac{20\cdot(\pi/4)}{2}=5\pi/2;$$

$$u''_{yy}(M)=-\frac{5x-4z}{\left[1+(y+2z)^2\right]^2}(y+2z)2\Rightarrow u''_{yy}(M_0)=-\frac{0-4}{2^2}2\cdot 1=-2;$$

$$u''_{yz}(M)=\frac{-4\left[1+(y+2z)^2\right]-(5x-4z)2(y+2z)2}{\left[1+(y+2z)^2\right]^2}\Rightarrow u''_{yz}(M_0)=2;$$

$$u''_{zz}(M)=\frac{-8\operatorname{arctg}(y+2z)2}{1+(y+2z)^2}+\frac{1}{1+(y+2z)^2}\left[-8\operatorname{arctg}(y+2z)+\frac{(5x-4z)4}{1+(y+2z)^2}\right]-$$

$$-\frac{(5x-4z)2\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot 2\cdot 2(y+2z)\cdot 2}{\left[1+(y+2z)^2\right]^2} \Rightarrow u''_{zz}(M_0) = -3\pi - 4 + 4\pi = \pi - 4.$$

Выполните самостоятельно. 1. Разложите функцию $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(-2;1)$.

Ответ: $f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$.

2. Разложите функцию $f(x, y) = \sin x \cdot \ln y$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M(0;\ 2)$ с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$.

Ответ: $f(x, y) = x\ln 2 + 0.5x(y-2) + o(\rho^2)$.

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

3.1. Производная по направлению и градиент функции

Пусть $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция двух независимых переменных x и y, которые, в свою очередь, являются функциями независимой переменной t (т.е. определяют кривую на плоскости в параметрическом виде): $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$. Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}. \tag{3.1}$$

В частности, если t совпадает с одной из независимых переменных $(t \equiv x)$, то есть кривая на плоскости задана в явном виде $y = y(x)$, то формула (3.1) упрощается:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Если $z=f\left(x,y\right)$ — дифференцируемая функция двух независимых переменных x и y, которые, в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных

$$x=\varphi(u,v);\ y=\psi(u,v),$$

то частные производные z по u и v преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3.2)$$

Пример 18. Найдите производную $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z=u^{v};\ u=\sin^{2}x;\ v=\cos 3x.$

Решение.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=\left(vu^{v-1}\right)\left(2\sin x\cos x\right)+\left(u^{v}\ln u\right)\left(-3\cos 3x\right).$$

Определение 11. *Производной функции* $z=f\left(x,y\right)$ *в данном направлении* $\vec{l}=M\vec{N}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{M\to N}\frac{\left|f(M)-f(N)\right|}{MN}, \qquad (3.3)$$

где $f(M)$ и $f(N)$ — значения функции в точках M и N. Нетрудно показать, что для дифференцируемой функции z формула (3.3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ $\left(\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\right)$.

Аналогично определяется производная по направлению $\vec{l}$ для функции трех переменных $u=f\left(x,y,z\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (3.4)$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Определение 12. *Градиентом функции* $z=f\left(x,y\right)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$gradz=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Согласно (3.4), производная функции в направлении $\vec{l}$ связана с градиентом функции формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l}=gradz\cdot\frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}=\left|gradz\right|\cdot\cos\varphi$$

(φ — угол между векторами $gradz$ и $\vec{l}$),

то есть производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. С другой стороны, направление градиента функции в данной точке задает направление наибольшей скорости возрастания функции в данной точке, причем

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{наиб}=\left|gradz\right|.$$

Пример 19. Найдите производную функции $f(x,y) = \ln\left(5x^2 + 2y^2\right)$ в точке $M(1,-3)$ по направлению, составляющему угол $\dfrac{\pi}{3}$ с осью *ox*.

Решение. По условию, $\dfrac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = \cos\dfrac{\pi}{3}\vec{i} + \sin\dfrac{\pi}{3}\vec{j} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Находим частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{10x}{5x^2 + 2y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{14y}{5x^2 + 2y^2}$.

Подставим координаты точки:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = \frac{10}{23};\ \frac{\partial f(M)}{\partial y} = \frac{-12}{23}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \frac{10}{23}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{12}{23}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 - 6\sqrt{3}}{23}.$$

Пример 20. Температурное поле в листе металла распределено по закону $T = x\sin\pi y$. Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры в точке $M_0(1;1)$ и соответствующее направление наибольшего возрастания температуры.

Решение. Скорость изменения температуры в точке M_0 достигает наибольшего значения, равного $\dfrac{\partial T(M_0)}{\partial l}\Big|_{\max} = \left|gradT(M_0)\right|$, в направлении $\vec{l}$, совпадающем с направлением вектора $gradT(M_0)$: $gradT = \sin\pi y\vec{i} + \pi x\cos\pi y\vec{j}$; $gradT(M_0) = (0;-\pi)$; $\left|gradT(M_0)\right| = \pi$.

Выполните самостоятельно. 1. Как связаны производная по направлению и градиент дифференцируемой функции $f(x,y)$? Чему равна производная по направлению, перпендикулярному градиенту?

2. Найдите производную функции $u = x + \ln\left(z^2 + y^2\right)$ в точке $A(2;1;1)$ по направлению $\overrightarrow{AB}$, где $B(0;2;0)$.

Ответ: $-\sqrt{6}\big/3.$

3.2. Дифференцирование неявных функций

Пусть в неявном виде задана дифференцируемая функция переменных x и y, определяющая y как функцию от x:

$$f(x, y) = 0. \tag{3.5}$$

Тогда, для производной имеет место формула:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x\left(x, y\right)}{f'_y\left(x, y\right)}. \tag{3.6}$$

Пример 21. Найдите в точке $x = 1$ первую производную функции, заданной в неявном виде:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0. \tag{3.7}$$

Решение. Введем обозначение $f(x, y) \equiv x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2.$ Тогда,

$$f'_x = 2x - 2y + 1,\ f'_y = -2x + 2y + 1.$$

Подставляя $x = 1$ в (3.7), получаем два значения $y_1 = 0;\ y_2 = 1$ для ординаты точек, определяемых неявной функцией (3.7). По формуле (3.6) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2y + 1}{-2x + 2y + 1},$$

и соответственно имеем два значения для производной:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 3; \ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1.$$

Пример 22. Найдите производную $y'(x)$ функции $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Решение. Представим два способа решения.

Запишем данную функцию в виде сложной функции двух переменных:

$$y = u^v, \text{ где } u = \sin x; v = \mathrm{tg}\, x.$$

Тогда, согласно формуле (3.1), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} = vu^{v-1}\cos x + u^v \ln u \frac{1}{\cos^2 x} = (\sin x)^{tgx}\left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right).$$

Второй способ основан на методе предварительного логарифмирования исходной (неэлементарной) функции показательно-степенного вида:

$$\ln y = \mathrm{tg}\, x \ln \sin x.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства и считая функцию $y = y(x)$ известной, получаем:

$$\frac{1}{y}y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ln \sin x + \mathrm{tg}x\frac{\cos x}{\sin x} = 1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}.$$

Подставим в последнее соотношение исходную функцию, получаем искомую производную:

$$y'(x) = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right).$$

Аналогично, если $F(x, y, z) = 0$ определяет z как функцию двух переменных x и y, причем $F(x, y, z)$ — дифференцируемая функция переменных x, y и z, и кроме того, $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{3.8}$$

Пример 23. Найдите частные производные z'_x и z'_y функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

Решение. Находим частные производные функции $F(x, y, z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4$:

$$F'_x = -4z;\ F'_y = 2y;\ F'_z = 3z^2 - 4x.$$

Подставляя их в (3.8), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{3z^2 - 4x}.$$

Считаем полезным указать другой способ. Дифференцируя исходное уравнение (записывая в дифференциалах), получаем:

$$3z^2dz - 4zdx - 4xdz + 2ydy = 0,$$

откуда находим

$$dz = \frac{4z}{3z^2 - 4x}dx - \frac{2y}{3z^2 - 4x}dy.$$

Сравнивая последнее с формулой для дифференциала функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

получаем искомые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4z}{3z^2-4x};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{3z^2-4x}.$$

Выполните самостоятельно. 1. Найдите частные производные z'_x и z'_y функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $z-x=y\,\mathrm{ctg}\left(z-x\right)$, в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $z'_x\left(M_0\right)=1; z'_y\left(M_0\right)=2/\left(2+\pi\right)$.

3.3. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные

Известно множество математических моделей, представленных дифференциальными уравнениями в частных производных и описывающих то или иное явление, либо физический процесс. При этом как исходные уравнения описываемой задачи, так и их решения остаются инвариантными относительно выбора системы координат, в которой проводят вычисление. И в зависимости от исследуемой задачи и ее условий приходится выбирать подходящую систему независимых переменных. При замене переменных в дифференциальных выражениях входящие в них производные следует выразить через производные по новым переменным, используя приведенное выше правило дифференцирования сложных функций. Ниже рассмотрены некоторые из распространенных на практике примеров таких задач.

Пример 24. Преобразуйте уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\left(a\neq 0\right)$$

к новым независимым переменным α и β, так что $\alpha=x-at$; $\beta=x+at$.

Решение. Применяя формулы (3.2) дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \beta}a = a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Применяя повторно дифференцирование и используя те же формулы, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t} =$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a) + a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)a = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x} =$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} -\right)\cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

Подставив полученные зависимости для $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в исходное уравнение, получим:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right),$$

откуда следует искомое дифференциальное уравнение в новых переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Пример 25. Преобразуйте уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

к полярным координатам r и φ, положив $x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi.$

Решение. Найдем сначала обратное преобразование:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\operatorname{arct}g\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases},$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}=\cos\varphi; \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{y}{r^2}=-\dfrac{\sin\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}=\sin\varphi; \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{x}{r^2}=\dfrac{\cos\varphi}{r} \end{cases}.$$

Подставим их в формулы (3.2) преобразования частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Повторно применяя формулы (3.2), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u=$$

$$=\cos^2\varphi\cdot u''_{rr}-\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\cdot u''_{r\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\cdot u''_{\varphi\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r}\cdot u'_r+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\cdot u'_\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u=$$

$$= \sin^2\varphi \cdot u''_{rr} + \frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi \cdot u''_{r\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2} \cdot u''_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r} \cdot u'_r - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \cdot u'_\varphi.$$

Подставив их в исходное дифференциальное уравнение, получим уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = u''_{rr} + \frac{1}{r^2} \cdot u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \cdot u'_r = 0.$$

Пример 26. Покажите, что функция $z(x, y) = e^{xy}$ является частным решением дифференциального уравнения

$$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0.$$

Преобразуйте это уравнение, приняв за новые независимые переменные

$$u = 1 - x - y;\; v = 2 + x + 2y.$$

Решение. Находим частные производные:

$$z'_x = e^{xy} y;\; z''_{xx} = ye^{xy} y = y^2 e^{xy};$$
$$z'_y = e^{xy} x;\;\; z''_{yy} = x^2 e^{xy}.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x^2 \left(y^2 e^{xy}\right) - y^2 \left(x^2 e^{xy}\right) = 0,$$

в результате получаем тождество, подтверждающее, что $z = e^{xy}$ удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению.

Без труда находим обратное преобразование:

$$x = -2u - v + 4;\;\; y = u + v - 3.$$

Преобразуем теперь частные производные, воспользовавшись формулой (3.2):

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = -z'_u + z'_v;$$
$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = -z'_u + 2z'_v;$$
$$= z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv};$$
$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-z'_u + 2z'_v\right)'_u \cdot u'_y + \left(-z'_u + 2z'_v\right)'_v \cdot v'_y =$$
$$= \left(-z''_{uu} + 2z''_{vu}\right) \cdot (-1) + \left(-z''_{uv} + 2z''_{vv}\right) \cdot 2 = z''_{uu} - 4z''_{uv} + 4z''_{vv}.$$

Подставим теперь в исходное дифференциальное уравнение:

$$\left(-2u - v + 4\right)^2 \left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right) - \left(u + v - 3\right)^2 \left(z''_{uu} - 4z''_{uv} + 4z''_{vv}\right) = 0$$

и получаем конечный вид исходного дифференциального уравнения в новых переменных:

$$A(u,v) \cdot z''_{uu} + 2B(u,v) \cdot z''_{uv} + C(u,v) \cdot z''_{vv} = 0,$$

где обозначено

$$A \equiv \left(-2u - v + 4\right)^2 - \left(u + v - 3\right)^2; \quad B \equiv -\left(-2u - v + 4\right)^2 + 2\left(u + v - 3\right)^2;$$
$$C \equiv \left(-2u - v + 4\right)^2 - 4\left(u + v - 3\right)^2.$$

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

4.1. Дифференциальные операторы

Напомним, что *вектор-градиент* функции $U(x, y, z)$

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \equiv \nabla U \qquad (4.1)$$

был рассмотрен ранее. Градиент функции направлен по нормали поверхности (линии) уровня $U(x, y, z) = C$ в точке M в сторону возрастания функции $U(x, y, z)$ и по величине (длине) равен наибольшей скорости изменения $U(x, y, z)$ в точке M:

$$\left|gradU(M)\right| = \max_{l} \frac{\partial U}{\partial l}.$$

Определение 13. *Дивергенцией векторного поля* $\vec{v}(M) = v_x\vec{i} +$ $+v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ называется скаляр следующего вида:

$$div\vec{v}(M) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \qquad (4.2)$$

Вихрем векторного поля $\vec{a}(M) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ называется вектор

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (4.3)$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным*, если существует скалярная функция $U = f(x, y, z)$ (называемая потенциалом поля) такая, что

$$\vec{a}(x, y, z) = gradU. \qquad (4.4)$$

Для потенциальности поля $\vec{a}(x, y, z)$, определенного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было *безвихревым*, т.е. $rot\vec{a} = 0.$ В таком случае существует потенциал $U(x, y, z)$, определяемый из уравнения

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Векторное поле называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля выполняется условие $div\vec{a} = 0.$ Если поле $\vec{a}(M)$ является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $div\left(gradU\right)=0$ и потенциал функции U является *гармонической функцией*, т.е. $U(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U(x,y,z)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

где $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа.

Пример 27. Определите градиент функции $z(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ в точке $M\left(2;4\right)$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\Rightarrow\frac{\partial z\left(M\right)}{\partial x}=2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}y\Rightarrow\frac{\partial z\left(M\right)}{\partial y}=\frac{2}{3}.$$

Значит,

$$gradz\left(M\right)=2\vec{i}+\frac{8}{3}\vec{j}.$$

Уравнение линии уровня, проходящей через данную точку, имеет вид:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3}.$$

Пример 28. Вычислите дивергенцию и вихрь вектора $\vec{a}\left(x,y,z\right)\equiv$ $\equiv\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Решение. По условию, координаты вектора $\vec{a}$ имеют вид $a_x=x$; $a_y=y$; $a_z=z$.

Следовательно,

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=1+1+1=3;$$

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0},$$

так как x, y, z — не зависимые между собой переменные.

4.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение 14. *Касательной плоскостью* к поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4.5}$$

в точке M (точке касания) называется плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку.

Нормалью к поверхности в точке касания M называется прямая, проведенная через данную точку перпендикулярно у касательной плоскости.

Заметим, что в особых точках поверхности (т.е. точках, в которых все три частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю или хотя бы одна из них не существует) касательная плоскость может не существовать.

Если уравнение гладкой поверхности задано в виде (4.5), то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0, \tag{4.6}$$

где $\vec{n} = F'_x(M_0)\vec{i} + F'_y(M_0)\vec{j} + F'_z(M_0)\vec{k}$ — вектор нормали к поверхности в точке M_0;

соответственно, уравнение нормали к поверхности (4.5) в точке M_0 будет:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \tag{4.7}$$

Пример 29. Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ в ее точке $M_0(2;-1;1)$.

Решение. Примем, что $F(x,y,z)=z-\frac{x^2}{2}+y^2$. Тогда,

$$F'_x=-x; F'_y=2y; F'_z=1 \Rightarrow F'_x(M_0)=-2; F'_y(M_0)=-2; F'_z(M_0)=1.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали соответственно принимают вид:

$$-2(x-2)-2(y+1)+(z-1)=0 \Rightarrow 2x+2y-z-1=0;$$
$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

Пример 30. На поверхности $x^2+y^2-z^2-2x=0$ найдите точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости *xoz*.

Решение. Найдем направление вектора нормали к исходной поверхности:

$$F'_x=2x-2; F'_y=2y; F'_z=-2z.$$

С другой стороны, нормаль к координатной плоскости *xoz* (или, что то же, вектор, направленный вдоль оси *oy*) имеет вид $\vec{n}=(0;1;0)$. Решая совместно уравнение поверхности, и условие коллинеарности вектора нормали к поверхности в произвольной точке $M(x;\ y;\ z)$ и направляющего вектора оси *oy*, находим искомые точки на поверхности:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2-2x=0 \\ 2x-2=\lambda\cdot 0=0 \\ 2y=\lambda\cdot 1=\lambda \\ 2z=\lambda\cdot 0=0 \end{cases},$$

откуда получаем, что $x=1;\ z=0.$ Подставим их в уравнение поверхности:

$$y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm 1.$$

Таким образом, нашли на заданной поверхности точки $M_1(1;1;0)$ и $M_2(1;-1;0)$, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости *xoz*.

Отметим, что приведенные выше дифференциальные операторы находят широкое применение в интегральном исчислении функции многих переменных и его приложениях, а также в курсе уравнений в частных производных и математической физики.

Выполните самостоятельно. 1. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $e^x-z+xy=3$ в точке $M(2;\ 1;\ 0)$.

Ответ: $x+2y=4;\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}.$

2. Составьте уравнение плоскости, касательной к поверхности $3x^2+2y^2+z^2=21,$ параллельной плоскости $6x-4y-z=0.$

Ответ: $6x-4y-z=\pm 21.$

3. К поверхности $xy+xz+z^2=1$ проведите касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0.$ Укажите соответствующую точку на поверхности. Составьте также уравнение нормали к поверхности в найденной точке.

Ответ: $M_0\left(-2/\sqrt{5};-1/\sqrt{5};3/\sqrt{5}\right);\ x-y+2z-\sqrt{5}=0;$

$$\frac{\sqrt{5}x+2}{3}=\frac{\sqrt{5}y+1}{-2}=\frac{\sqrt{5}z-3}{4}.$$

5. ЛОКАЛЬНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМЫ

5.1. Локальный экстремум

Определение 15. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет *максимум (минимум)* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для всех отличных от M_0 точек $M(x; y)$ в достаточно малой окрестности точки M_0 выполнено неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (или соответственно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Иначе говоря, функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то каждая из частных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или хотя бы одна из них не существует.

Такие точки возможного экстремума $M_0(x_0; y_0)$ называют *критическими*.

Пример 31. Рассмотрим две функции: $f_1(x, y) = (x-1)^2 (y+2)^4 + 5$ и $f_2(x, y) = (x-1)^3 (y+2)^4 + 5$. Точка $M_0(1; -2)$ является критической для обеих функций, однако при этом первая функция достигает минимума в точке M_0, а для второй функции M_0 не является точкой экстремума.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Предположим еще, что $M_0(x_0; y_0)$ является критической (стационарной) точкой для функции $f(x, y)$, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Введем для удобства обозначения: $A = f''_{xx}(M_0)$; $B = f''_{xy}(M_0)$; $C = f''_{yy}(M_0)$; $\Delta = AC - B^2$.

Тогда в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$:

1) $f(x,\ y)$ имеет максимум, если $\Delta > 0$ и $A < 0$ (или $C < 0$);
2) $f(x,\ y)$ имеет минимум, если $\Delta > 0$ и $A > 0$ (или $C > 0$);
3) $f(x,\ y)$ не имеет ни максимума, ни минимума, если $\Delta < 0$;
4) если $\Delta = 0$, то вопрос наличия экстремума остается открытым (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Пример 32. Найдите локальный экстремум функции двух аргументов

$$z = x^3 + y^3 - 9xy.$$

Решение.

1) Найдем частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y.$

2) Найдем критические точки, т.е. точки, в которых частные производные обращаются в нуль.

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0, \\ 3y^2 - 9x = 0, \end{cases} \text{ или } \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{array}\right. \text{ и } \left[\begin{array}{l} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{array}\right.$$

3) Найдем вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9;$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,$ а затем их значения в критических точках: $A_1 = 0,\ B_1 = -9,$ $C_1 = 0$ и $A_2 = 18,\ B_2 = -9,\ C_2 = 18.$

a) $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = -81 < 0$ и, следовательно, в точке $M_1\left(0;0\right)$ экстремума нет;

b) $\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 324 - 81 > 0$ и, следовательно, в точке $M_2\left(3;3\right)$ есть экстремум. Поскольку в этом случае $A_2 = 18 > 0$, точка $M_2\left(3,3\right)$ является точкой локального минимума.

Пример 33. Найдите локальный экстремум функции двух переменных

$$z = 3x^2 y - x^3 - y^4.$$

Решение. Находим точки возможного экстремума из решения системы:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 6xy - 3x^2 = 3x(2y - x) = 0 \\ z'_y \equiv 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}, \text{ или}$$

$$\left[\begin{array}{c} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, \\ x = 2y \Rightarrow 4y^2(3 - y) = 0 \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 6. \end{array} \right.$$

Итак, нашли 2 точки возможного экстремума: $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$. Проверяем достаточные условия существования экстремума:

$$A \equiv z''_{xx} = 6y - 6x; C \equiv z''_{yy} = -12y^2; B \equiv z''_{xy} = 6x.$$

Для точки $M_1(0;0)$ получаем: $A_1 = 0; C_1 = 0;$ $B_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0.$ То есть, в точке M_1 требуется провести дополнительное исследование:

$$z(M_1) = 0;$$

При $x < 0; y = 0 \Rightarrow z(x, y) = -x^3 > 0;$

а при $x = 0;\ y \neq 0 \Rightarrow z(x, y) = -y^4 < 0.$

Итак, в окрестности точки $M_1(0;0)$ функция $z = z(x, y)$ принимает как значения, большие $z(M_1)$, так и меньшие $z(M_1)$. Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ функция $z(x, y)$ не достигает экстремума.

В точке $M_2(6;3)$ имеем: $A_2 = -18 < 0;$ $C_2 = -108 < 0;$ $B_2 = 36 \Rightarrow \Rightarrow \Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 108 \cdot 18 - 36^2 > 0.$

Значит, M_2 — точка максимума, причем $z_{\max} = z(M_2) = 27.$

Переходим к нахождению экстремумов функций трех (и более) переменных.

Ищем сначала точки возможного экстремума (критические точки) $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Для дифференцируемой функции $u=f(x,\ y,z)$ это сводится к условию:

$$df\left(M_0\right)\equiv f_x'\left(M_0\right)dx+f_y'\left(M_0\right)dy+f_z'\left(M_0\right)dz=0. \qquad (5.1)$$

Вопрос наличия в точке M_0 экстремума определяется знаком приращения функции в малой окрестности этой точки:

$$\begin{cases} \Delta f\left(M_0\right)=df\left(M_0\right)+\dfrac{1}{2!}d^2f\left(M_0\right)+o\left(\rho^2\right), \\ \rho=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}\equiv\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2+\left(dz\right)^2} \end{cases}, \qquad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что

$$\Delta f\left(M_0\right)=\begin{cases} <0, d^2f\left(M_0\right)<0\Rightarrow M_0-\max \\ >0, d^2f\left(M_0\right)>0\Rightarrow M_0-\min \end{cases}.$$

Дифференциал второго порядка дифференцируемой функции $u=f(x,\ y,z)$ в точке M_0 представляет собой квадратичную форму

$$d^2f\left(M_0\right)=\left(dx,dy,dz\right)\begin{pmatrix} f_{xx}''\left(M_0\right) & f_{xy}''\left(M_0\right) & f_{xz}''\left(M_0\right) \\ f_{yx}''\left(M_0\right) & f_{yy}''\left(M_0\right) & f_{yz}''\left(M_0\right) \\ f_{zx}''\left(M_0\right) & f_{zy}''\left(M_0\right) & f_{zz}''\left(M_0\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}=$$

$$=f_{xx}''\left(M_0\right)dx^2+2f_{xy}''dxdy+2f_{xz}''dxdz+2f_{yz}''\left(M_0\right)dydz+$$

$$+f_{yy}''dy^2+f_{zz}''dz^2. \qquad (5.3)$$

Квадратичная форма $d^2 f\left(M_0\right)$ называется *положительно определенной* (или знакоположительной), если для любого направления $\vec{l} = \left(dx, dy, dz\right)$ в точке M_0 выполняется неравенство $d^2 f\left(M_0\right) > 0.$

Матрицу $f_{ij} \equiv f_{x_i x_j}{}''\left(M_0\right), \left(x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z\right)$ в формуле (5.3) называют *матрицей Гессе*, а миноры, примыкающие к левому верхнему углу этой матрицы, — *угловыми*.

Имеет место *критерий Сильвестра*. Для того чтобы квадратичная форма $d^2 f\left(M_0\right)$ с матрицей $f_{ij}\left(M_0\right)$ была *положительно (отрицательно) определенной*, необходимо и достаточно, чтобы для угловых миноров матрицы $f_{ij}\left(M_0\right)$

$$\Delta_1 = f_{xx}''\left(M_0\right); \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}''\left(M_0\right) & f_{xy}''\left(M_0\right) \\ f_{yx}''\left(M_0\right) & f_{yy}''\left(M_0\right) \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}''\left(M_0\right) & f_{xy}''\left(M_0\right) & f_{xz}''\left(M_0\right) \\ f_{yx}''\left(M_0\right) & f_{yy}''\left(M_0\right) & f_{yz}''\left(M_0\right) \\ f_{zx}''\left(M_0\right) & f_{zy}''\left(M_0\right) & f_{zz}''\left(M_0\right) \end{vmatrix}$$

выполнялись условия:

1) если все угловые миноры положительны, то квадратичная форма будет положительно определенной (т.е. в критической точке M_0 функция $u = f\left(x, y, z\right)$ достигает минимума);
2) если миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ чередуют знаки, начиная с отрицательного, то квадратичная форма будет отрицательно определенной (т.е. в критической точке M_0 функция $u = f(x, y, z)$ достигает максимума).

Пример 34. Исследуйте на локальный экстремум функцию трех переменных

$$u = f\left(x, y, z\right) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Решение. Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} f_x' = 3x^2 + 12y = 0 \\ f_y' = 2y + 12x = 0 \\ f_z' = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1\left(x_2 = 24; y_2 = -144; z_2 = -1\right), \\ M_2\left(x_1 = 0; y_1 = 0; z_1 = -1\right) \end{cases}.$$

Вычисляем вторые производные:

$$f_{xx}'' = 6x;\ f_{xy}'' = 12;\ f_{xz}'' = 0;\ f_{yy}'' = 2;\ f_{yz}'' = 0;\ f_{zz}'' = 2.$$

Определяем матрицу Гессе и угловые миноры в указанных точках:

1) M_1: $f_{ij}(M_1) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 144 > 0$; $\Delta_2 = 144 > 0$; $\Delta_3 = 288 > 0$.

Следовательно, M_1 — точка минимума.

2) M_2: $f_{ij}(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = -144$; $\Delta_3 = -288$.

В точке M_2 условия критерия Сильвестра не выполняются, а значит, требуется дополнительное исследование. Можно показать, что в точке M_2 функция не достигает экстремума (эти рассуждения мы опускаем).

Выполните самостоятельно. 1. Найдите локальные экстремумы функции $z(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

Ответ: $(0;3)$ — max.

2. Исследуйте на локальные экстремумы функцию $u(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^3$.

Ответ: $(0;0)$ — нет экстремума; $(2/3;1/3)$ — min.

3. Найдите локальные экстремумы функции $u(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

Ответ: $(3;2)$ — min; $(-3;-2)$ — max.

5.2. Условный экстремум

Во многих задачах на отыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к нахождению максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны между собой некоторыми дополнительными условиями (например, они должны удовлетворять заданным уравнениям).

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

Из данного куска жести площадью $2a$ нужно сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Если обозначить длину, ширину и высоту коробки через x, y, z, то задача сводится к нахождению максимума функции

$$u = xyz \tag{5.1}$$

при условии, что

$$2xy + 2xz + 2yz = 2a. \tag{5.2}$$

Здесь мы имеем *задачу на условный экстремум* функции (5.1), при котором переменные x, y, z связаны дополнительным условием (5.2). Ниже мы представим метод решения таких задач.

Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x, y) \tag{5.3}$$

при условии, что переменные x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{5.4}$$

При наличии условия (5.4) из двух переменных x и y независимым будет только одно, например x, так как y определяется из равенства (5.4) как функция от x. Если разрешим уравнение (5.4) относительно y, то получим функцию одной переменной x и сведем задачу к задаче об исследовании на экстремум функции одной независимой переменной x.

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнение (5.4) относительно x или y. Чтобы найти условный экстремум функции $f\left(x,\ y\right)$ при наличии условия (5.4), поступают следующим образом.

1. Составляют так называемую функцию Лагранжа

$$L(x,y,t) = f(x,y) + t\cdot\varphi(x,y), \tag{5.5}$$

где t — неопределенный постоянный множитель. Необходимые условия экстремума сводятся к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + t\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + t\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t} \equiv \varphi\left(x,y\right) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

с тремя неизвестными x, y, t, из которой определяются точки возможного экстремума $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и значения для множителя Лагранжа t.

Понятно, что наличие экстремума в точке возможного экстремума M_0 определяется знаком приращения

$$\Delta f\left(M_0\right) = df\left(M_0\right) + \frac{1}{2}d^2 f\left(M_0\right) + o\left(\rho^2\right),\ \ \rho = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2}.$$

2. Далее можем продолжить исследование двумя путями.

2а. Найдем знак определителя $\tilde{\Delta}\left(M_0\right) = L''_{xx}L''_{yy} - L''^{\,2}_{xy}$, куда подставлено соответствующее значение множителя Лагранжа $t = t_0$;

$$\tilde{\Delta}\left(M_0\right) = \begin{cases} > 0, \textit{точка экстр.} \\ < 0, \textit{экстр. нет.} \end{cases}$$

А именно, если $L''_{xx}\left(M_0\right) > 0,$ то функция достигает минимума в точке M_0;

если $L''_{xx}\left(M_0\right) < 0,$ то функция достигает максимума в точке M_0.

2б. Составим в каждой точке возможного экстремума квадратичную форму $d^2L(M_0) = -\frac{dx^2}{\varphi_y'^2}\left|\tilde{H}\right|$, где $\left|\tilde{H}\right|$ — окаймленный гессиан матрицы

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{pmatrix};$$

если при этом $\left|\tilde{H}(M_0)\right| > 0 \Rightarrow d^2L(M_0) < 0,$ то M_0 — точка максимума;

если $\left|\tilde{H}(M_0)\right| < 0 \Rightarrow d^2L(M_0) > 0,$ то M_0 – точка минимума;

если $\left|\tilde{H}(M_0)\right| = 0,$ то необходимо продолжить исследование, воспользовавшись другим способом.

Отметим, что указанный способ нахождения условного экстремума имеет место и в случае функций трех переменных.

Пример 35. Найдите условный экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $5x + 2y - 20 = 0$.

Решение. Выразим из дополнительного условия y через x:

$$y = \frac{20 - 5x}{2} = -\frac{5}{2}(x - 4),$$

и подставим в функцию $z = xy$:

$$z(x, y(x)) = -\frac{5}{2}x(x - 4).$$

Найдем точку возможного экстремума:

$$z'(x) = -\frac{5}{2}(2x - 4) = -5(x - 2) = 0 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Находим вторую производную:

$$z''(x) = -5 < 0.$$

Следовательно, $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{-5}{2}\left(x_0 - 4\right) = 5;$ и $M_0\left(2;5\right)$ — точка условного максимума функции $z = xy,$ причем $z_{max} = 10.$

Пример 36. Найдите экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии, что переменные *x* и *y* удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1.$

Решение. Поясним геометрический смысл задачи: требуется найти наибольшее и наименьшее значения аппликаты *z* в плоскости для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 1.$

Составим функцию Лагранжа

$$L\left(x, y, t\right) = 6 - 4x - 3y + t\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Найдем $\frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2tx;$ $\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2ty.$ Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} -4 + 2tx = 0 \\ -3 + 2ty = 0. \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Последняя система дает две точки возможного экстремума:

$$t_1 = \frac{5}{2};\ x_1 = \frac{4}{5};\ y_1 = \frac{3}{5}$$

и

$$t_2 = -\frac{5}{2};\ x_2 = -\frac{4}{5};\ y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Найдем вторые производные:

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2t;\ \ B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;\ \ C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2t.$$

Следовательно, $\Delta = AC - B^2 > 0$ в каждой из точек возможного экстремума. При этом в первой точке $A_1 = 5 > 0$, значит, $M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ — точка минимума, и $z_{\min} = 6 - 4x_1 - 3y_1 = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$ Во второй точке $A_2 = -5 < 0.$ то есть $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ — точка максимума, и $z_{\max} = 6 - 4x_1 - 3y_1 = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11.$

Подтвердим этот факт вторым способом, с помощью гессиана.

1) $M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 8/5 & 6/5 \\ 8/5 & 5 & 0 \\ 6/5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\tilde{H}\right| < 0$ — точка минимума;

2) $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & -8/5 & -6/5 \\ -8/5 & -5 & 0 \\ -6/5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\tilde{H}\right| > 0$ — точка максимума.

Пример 37. Исследуйте на экстремум функцию $z = 5xy - 4$ при условии, что переменные x и y положительны и удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$

Решение. Составим функцию Лагранжа и найдем ее стационарные точки:

$$L(x, y, t) = 5xy - 4 + t\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 5y + \dfrac{tx}{4} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 5x + ty = 0 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -5xy \\ x = 2y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ t = -10 \end{cases}.$$

Установим характер экстремума в найденной точке возможного экстремума $M_0(2;1)$, исходя из знака $d^2L(M_0)$:

$L''_{xx} = t/4;\ L''_{xy} = 5;\ L''_{yy} = t;$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4}dx + ydy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{xdx}{4y}$$

$$\begin{cases} L''_{xx}(M_0) = -5/2;\ L''_{xy} = 5;\ L''_{yy} = -10 \\ dy = -\dfrac{xdx}{4y} \end{cases};$$

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = -10dx^2 < 0.$$

Следовательно, $M_0(2;1)$ — точка условного максимума, причем $z_{\max} = 10 - 4 = 6$.

Пример 38. Найдите экстремум функции $u = 2x + y - z + 1$ при условии, что переменные x, y и z удовлетворяют уравнению связи $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$.

Решение. Составим функцию Лагранжа и найдем ее стационарные точки:

$$L(x,y,t) = u(x,y,z) + tf(x,y,z) = 2x + y - z + 1 + t\left(x^2 + y^2 + 2z^2 - 22\right);$$

$$\begin{cases} L'_x = 2 + 2tx = 0 \\ L'_y = 1 + 2ty = 0 \\ L'_z = -1 + 4tz = 0 \\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 22 \end{cases}.$$

В результате получим 2 точки:

$$M_1(4;2;-1) \text{ при } t_1 = -1/4; \quad M_2(-4;-2;1) \text{ при } t_2 = 1/4.$$

Составим окаймленную матрицу Гессе:

$$f'_x = 2x;\ f'_y = 2y;\ f'_z = 4z;$$
$$L''_{xx} = 2t; L''_{xy} = 0; L''_{xz} = 0; L''_{yy} = 2t; L''_{yz} = 0; L''_{zz} = 4t;$$
$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2t & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2t & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix}.$$

Определим знаки угловых миноров $H_{2m+1}, H_{2m+2}, ..., H_{m+n}$ матрицы $\tilde{H}$ ($m=1$ — количество условий связи; $n=3$ — число независимых переменных). Так как $2m+1=3$ и $m+n=4$, то достаточно найти H_3 и $H_4 \equiv \left|\tilde{H}\right|$:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2t & 0 \\ 2y & 0 & 2t \end{vmatrix} = -8t\left(x^2 + y^2\right);$$
$$H_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2t & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2t & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4t \end{vmatrix} = -32t^2\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right);$$
$$H_3(M_1) = 40; H_4(M_1) = -44; \quad H_3(M_2) = -40; H_4(M_2) = -44.$$

Знаки $H_3(M_1)$ и $H_4(M_1)$ чередуются, причем знак $H_3(M_1)$ совпадает со знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1$, поэтому M_1 — точка условного максимума, $u_{\max} = 12$.

Миноры $H_3(M_2)$ и $H_4(M_2)$ одного знака, совпадающего со знаком $(-1)^m = -1,$ поэтому M_2 — точка условного минимума, $u_{\min} = -10.$

Пример 39. Найдите кратчайшее расстояние от точки $O(0;0)$ до кривой

$$\varphi(x,y) \equiv x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \qquad (5.7)$$

Решение. Заметим, что кривая $\varphi(x,y) = 0$ симметрична относительно начала координат. Из чего следует, что задача имеет соответственно два решения. Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка на кривой (5.7). Тогда расстояние от точки M до точки O равно

$$\rho(x;y) = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В результате приходим к следующей задаче об условном экстремуме функции $\rho(x;y)$ при условии (5.7). Однако для упрощения вычислений вместо $\rho(x;y)$ возьмем $\rho^2(x;y)$ и составим для последней функции лагранжиан:

$$L(x,y,t) = \rho^2(x,y) + t \cdot \varphi(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) + t\left(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225\right),$$

который позволит определить искомую точку на кривой (5.7), в которой достигается наименьшее значение функции $\rho = \rho(x,y).$ Находим точки возможного экстремума из решения следующей системы:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x + t(2x + 8y) = 0 \\ L'_y \equiv 2y + t(8x + 14y) = 0 \\ L'_t \equiv x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \end{cases} \qquad (5.8)$$

Из первых двух уравнений системы, исключив неизвестный параметр t, находим подстановки:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+4y}{4x+7y}\Rightarrow\frac{x}{y}\equiv k\Rightarrow 2k^2+3k-2=0\Rightarrow k_{1,2}=\left[\begin{array}{l}-2\\ 1/2\end{array}\right..$$

Итак, нашли 2 подстановки для определения точек возможного экстремума.

1) $\dfrac{x}{y}=-2\Rightarrow x=-2y.$

Подставим последнее в третье уравнение системы (5.8), в результате получаем:

$$4y^2-16y^2+7y^2-225=0\Rightarrow 5y^2+225=0.$$

Последнее уравнение не имеет решений в классе действительных чисел.

2) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2x.$

Подставим в последнее уравнение системы (5.8):

$$x^2+16x^2+28x^2-225=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}.$$

Следовательно, получаем 2 точки возможного экстремума:

$$M_1\left(x_1=\sqrt{5};y_1=2\sqrt{5}\right);t_1=-\frac{x_1}{x_1+4y_1}=-\frac{1}{9};$$

$$M_2\left(x_2=-\sqrt{5};y_2=-2\sqrt{5}\right);t_2=-\frac{x_2}{x_2+4y_2}=-\frac{1}{9}.$$

Применим теперь достаточные условия существования условного экстремума. Для этого находим вторые частные производные:

$$A\equiv L''_{xx}=2+2t;\,C\equiv L''_{yy}=2+13t;\,B\equiv L''_{xy}=8t.$$

1) Для точки M_1 получаем: $A_1 = 2 + 2\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} > 0;$ $C_1 = \frac{4}{9} > 0;$ $B_1 = -\frac{8}{9};$ $\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0,$ т.е. исследование нужно продолжить другим способом.

Определим знак второго дифференциала от лагранжиана:

$$d^2L(M_1) = L''_{xx}(M_1)dx^2 + 2L''_{xy}(M_1)dxdy + L''_{yy}(M_1)dy^2 =$$
$$= \frac{4}{9}\left(4dx^2 - 4dxdy + dy^2\right).$$

Из условия (5.7) находим связь между дифференциалами dx и dy в исследуемой точке M_1:

$$\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \Rightarrow (2x_1 + 8y_1)dx + (8x_1 + 14y_1)dy =$$
$$= 0 \Rightarrow dx = -2dy.$$

Следовательно,

$$d^2L(M_1) = \frac{4}{9}(dx)^2\left[4 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{25}{9}(dx)^2 > 0 \text{ при}$$

$(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0,$ то есть M_1 — точка условного минимума функции $\rho(x, y)$.

2) Переходим к исследованию точки M_2 на условный экстремум. Проводя выкладки, аналогичные предыдущему случаю, находим такую же зависимость между дифференциалами dx и dy, а также второй дифференциал $d^2L(M_2)$ в точке M_2:

$dx = -2dy \Rightarrow d^2L(M_2) > 0,$ то есть M_2 — также будет точкой условного минимума функции $\rho(x, y)$.

Запишем ответ: кратчайшее расстояние от точки $O(0; 0)$ до кривой (5.7) равно

$$\rho_{\min} = \rho(M_1) = \rho(M_2) = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = 5$$

и достигает в двух точках M_1 и M_2, лежащих на кривой (5.7).

Приведем другой способ решения задачи, основанный на применении гессиана $\left(n = 2;\, m = 1;\, H_{2m+1} = H_3 \equiv \tilde{H}\right)$:

$$\left|\tilde{H}(M_1)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 16/9 & -8/9 \\ 36\sqrt{5} & -8/9 & 4/9 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow d^2L(M_1) > 0 \text{ —}$$

минимум;

$$\left|\tilde{H}(M_2)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} \\ -18\sqrt{5} & -16/9 & -8/9 \\ -36\sqrt{5} & -8/9 & 4/9 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow d^2L(M_1) > 0 \text{ —}$$

минимум.

Пример 40. Найдите кратчайшее расстояние от точки $A(0;3;3)$ до точки пересечения двух поверхностей

$$\varphi_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \tag{5.9}$$

$$\varphi_2(x, y, z) \equiv x + y + z - 1 = 0. \tag{5.10}$$

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка на линии пересечения поверхностей (5.9) и (5.10). Тогда расстояние от точки M до точки A равно

$$\rho(x; y; z) = AM = \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2}.$$

Однако, как и в предыдущей задаче, вместо $\rho(x; y; z)$ выберем $\rho_0(x; y; z) = \rho^2(x; y; z)$. Выразим переменную z из (5.10) через x, y и тем самым уменьшим число независимых переменных и количество уравнений связей на единицу:

$$z=1-x-y\Rightarrow\rho\big(x;y;z(x,y)\big)=\sqrt{x^2+(y-3)^2+(x+y+2)^2}.$$

В результате приходим к задаче об условном экстремуме функции двух переменных, для которой составляем лагранжиан:

$$L(x,y,t)=\left[x^2+(y-3)^2+(x+y+2)^2\right]+t\left(x^2+y^2+xy-x-y\right).$$

Найдем точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x\equiv 2x+2(x+y+2)+t(2x+y-1)=0\\ L'_y\equiv 2(y-3)+2(x+y+2)+t(x+2y-1)=0.\\ L'_t\equiv x^2+y^2+xy-x-y=0\end{cases}\qquad(5.11)$$

Из первых двух уравнений системы, исключая неизвестный параметр t, найдем подстановку:

$$\frac{4x+2y+4}{2x+4y-2}=\frac{2x+y-1}{x+2y-1}\Rightarrow x=-2y+1.$$

Подставим ее в третье уравнение системы (5.11):

$$(-2y+1)^2+y^2+(-2y+1)y-(-2y+1)-y=0\Rightarrow y(3y-2)=0\Rightarrow y_{1,2}=\left[\begin{array}{l}0\\2/3\end{array}\right..$$

Получаем две точки возможного экстремума:

$$\left[\begin{array}{l} y_1=0\Rightarrow x_1=1;z_1=0\\ y_2=2/3\Rightarrow x_2=-1/3;z_2=2/3\end{array}\right.,\ \text{или}$$

$$M_1(x_1=1;\ y_1=0;\ z_1=0);\ t_1=-\frac{4x_1+2y_1+4}{2x_1+y_1-1}=-8;$$

$$M_2(x_2=-1/3;\ y_2=2/3;\ z_2=2/3);\ t_2=-\frac{4x_2+2y_2+4}{2x_2+y_2-1}=4.$$

Переходим к достаточным условиям существования экстремума, для этого находим вторые частные производные:

$$A \equiv L''_{xx} = 4 + 2t;\ C \equiv L''_{yy} = 4 + 2t;\ B \equiv L''_{xy} = 2 + t.$$

1) Точка M_1 $A_1 = 4 - 16 = -12 < 0;\ C_1 = -12 < 0;\ B_1 = -6;$

$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 144 - 36 > 0,$ т.е. M_1 — точка условного максимума.

2) Точка M_2: $A_1 = 4 + 8 = 12 > 0;\ C_2 = 12 > 0;\ B_1 = 6;$

$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 144 - 36 > 0,$ т.е. M_2 — точка условного минимума, совпадающая с точкой пересечения поверхностей (5.9) и (5.10) и наиболее близко расположенная к заданной точке $A(0;3;3)$. Это расстояние равно

$$\rho_{\min} = AM = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 3)^2 + (z_2 - 3)^2} =$$
$$\sqrt{(-1/9)^2 + (2/3 - 3)^2 + (2/3 - 3)^2} = \sqrt{11}.$$

Отметим, что не составляет труда решить эту задачу с помощью окаймленного гессиана — данный вопрос предлагаем в качестве самостоятельной работы.

Выполните самостоятельно. 1. Найдите точку локального минимума функции $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2.$

2. Используя один из известных методов, найдите условные локальные экстремумы функции $z = x^2 y,$ если известно, что x и y связаны уравнением $x + y - 2 = 0.$

Ответ: $M_1(1;1), M_2(-1;-1)$ — точки максимума;

$M_3(1;-1)$ — точка минимума.

3. Найдите локальные условные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy$ при условии $x^2 + y^2 - 2 = 0.$

Ответ: $M_1(1;1);\ M_2(-1;-1)$ — точки максимума;

$M_3(-1;1);\ M_4(1;-1)$ — точки минимума.

4. Найдите наиболее удаленную от начала координат точку кривой, по которой пересекаются две поверхности: $x^2+y^2-z^2=0$ (конус) и $x-2z-3=0$ (плоскость).

Ответ: наименьшее расстояние $\sqrt{2}$ — до точки $A(1;0;-1)$; $\lambda_1=-1/3; \lambda_2=-4/3$;

наибольшее расстояние $3\sqrt{2}$ — до точки $B(-3;0;-3)$; $\lambda_1=-3$; $\lambda_2=-12$.

5.3. Глобальный экстремум

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего и наименьшего значений (глобального экстремума) либо в стационарной точке, либо в точке границы области.

Пример 41. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy(4-x-y)$ в треугольнике OAB, ограниченном прямыми $x=0, y=0, x+y=8$.

Решение.

1) Найдем критические точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем:

$$z'_x=4y-2xy-y^2=y(4-2x-y),\ z'_y=4x-x^2-2xy=x(4-2y-x).$$

Приравниваем обе частные производные к нулю, в результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} y(4-2x-y)=0, \\ x(4-2y-x)=0. \end{cases}$$

Учитывая, что внутри треугольника $x>0, y>0,$ приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+y=4; \\ x+2y=4, \end{cases}$$

откуда $x=\frac{4}{3}, y=\frac{4}{3}$. Полученная критическая точка $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ лежит внутри треугольника. Находим значение функции в этой точке:

$$z=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\left(4-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}.$$

2) Граница области состоит из трех участков: $[AO]: y=0$; $[OB]: x=0$ и $[AB]: x+y=8$.

На участках $[AO];[OB]$ значения функции $z=xy(4-x-y)$ равны нулю. На участке $[AB]$, где $y=8-x$ и $0\le x\le 8$ функция $z=xy(4-x-y)$ превращается в функцию одной переменной $z=4x(x-8)$. Найдем критические точки этой функции на отрезке $[0,8]$: $z'_x=4(2x-8)=0$, откуда $x=4$. Вычислим значения функции $z=4x(x-8)$ на концах отрезка $[0,8]$ и в точке $x=4: z(0)=0$, $z(4)=-64, z(8)=0$.

3) Ищем наибольшее и наименьшее значения функции z среди следующих ее значений: $z=\frac{64}{27}$ в точке $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$; $z=0$ на прямых $x=0,\ y=0$; $z=-64$ в точке (4,4). В результате

$$z_{наим}=z(4,4)=-64;\quad z_{наиб}=z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}.$$

Пример 42. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=x^2, y=4$.

Решение.

Найдем критические точки, лежащие внутри данной области:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ z'_y = 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

В результате получаем 2 стационарные точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-1;-1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области.

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции z на границе. Граница состоит из двух частей:

1) $l_1 = \{(x, y) | -2 \le x \le 2;\ y = x^2\} \Rightarrow z = z(x, y(x)) = x^4 + 4x^2$

или

$$z' = 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z(0) = 0.$$

Сравнивая значения $z(0) = 0$, $z(-2) = 32$ и $z(2) = 32$, заключаем, что на l_1 наибольшее значение $z(\pm 2) = 32$ и наименьшее значение $z(0) = 0$.

2) $l_2 = \{(x, y) | -2 \le x \le 2;\ y = 4\} \Rightarrow z = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

или

$z' = 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} x_1 &= 2/3 \\ x_2 &= -2, \end{aligned} \right.$ из которых только одна ($x_1 = 2/3$) принадлежит отрезку $[-2; 2]$, причем $z(2/3) = 16\dfrac{22}{27}$; $z(\pm 2) = 32$.

Сопоставляя наибольшее и наименьшее значения функции на двух участках границы, а также учитывая, что внутри рассматриваемой области функция не имеет стационарных точек, заключаем, что наибольшее и наименьшее значения функции равны соответственно $z_{наиб} = z(x = \pm 2; y = 4) = 32$ и $z_{наим} = z(x = 0; y = 0) = 0$.

Выполните самостоятельно. 1. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = |x - 1| + 2y^2 - 3$.

2. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2; -1 \le y \le 2$.

Ответ: наибольшее значение $z=13$ функция принимает в точке $M_1(2;-1)$, наименьшее значение $z=-1$ функция принимает в двух точках: $M_2(1;1)$ и $M_3(0;-1)$.

6. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Этот раздел содержит решения типового варианта расчетно-графического задания. Каждый вариант заданий включает шесть задач.

В первом задании требуется найти частные производные и дифференциал функции двух переменных $z=f(x,\, y)$ в указанной точке $M_0(x_0;y_0)$. Алгоритм решения рассмотрен в разделах 2.1 и 2.2 на примерах 8 и 9.

Приведем другой пример типового задания.

Пример 46. Найдите частные производные и дифференциал функции $z=\operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1;1)$.

Решение.

$$z'_x=\frac{y}{1+(xy)^2}\Rightarrow z'_x(M_0)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

$$z'_y=\frac{x}{1+(xy)^2}\Rightarrow z'_y(M_0)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

$$dz(M_0)=z'_x(M_0)dx+z'_y(M_0)dy=\frac{1}{2}(dx+dy).$$

Во втором задании нужно приближенно вычислить выражения с помощью дифференциала, заменяя приращение функции дифференциалом. Алгоритм решения рассмотрен в разделе 3.1 на примерах 10–13.

В третьем задании требуется найти производную функции в точке по заданному направлению. Алгоритм решения см. в разделе 3.1 на примерах 19, 20.

В четвертом задании требуется построить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$. Примеры решения таких задач можно найти в разделе 4.2 (примеры 29 и 30).

В пятом задании исследуется функция на наличие точек экстремума. Алгоритм решения представлен примерами 32–34 в разделе 5.1.

В последнем, шестом, задании требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции в области. Алгоритм решения подробно рассмотрен на примере 41 раздела 5.3.

Приведем еще один пример.

Пример 47. Найдите наибольшее значение функции $z=1-x+$ $+x^2+2y$ в треугольнике ОАВ, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. При этом $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$.

Решение.

1) Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем:

$$z'_x=-1+2x,\ z'_y=2\neq 0,$$

откуда следует, что стационарных точек в рассматриваемой области нет.

Граница области состоит из трех участков:

$$[AO]:\left\{(x;y)\left|\begin{matrix} y=0 \\ 0\le x\le 1\end{matrix}\right.\right\},[OB]:\left\{(x;y)\left|\begin{matrix} x=0 \\ 0\le y\le 1\end{matrix}\right.\right\},[AB]:\left\{(x;y)\left|\begin{matrix} x+y=1 \\ 0\le x\le 1\end{matrix}\right.\right\}.$$

2) На участке $[AO]$:

$z=1-x+x^2 \Rightarrow z'=-1+2x=0.$ Следовательно, искомая стационарная точка $M_1(1/2;0)$. Отмечаем значения функции в стационарной точке M_1 и на концах отрезка *AO*:

$$z(M_1)=3/4,\ z(O)=1,\ z(A)=1.$$

3) На участке [*BO*]:

$z=1+2y \Rightarrow z'=2\neq 0,$ значит, стационарных точек на границе *BO* нет. Отмечаем значения функции на концах отрезка *BO*:

$$z(B)=3,\ z(O)=1.$$

4) На участке [AB]:

$z=3-3x+x^2 \Rightarrow z'=-3+2x=0 \Rightarrow x=3/2 \notin [0;1]$, то есть стационарных точек на границе AB нет. Отмечаем значения функции на концах отрезка AB:

$$z(B)=3,\ z(A)=1.$$

Сравнивая все отмеченные значения функции z, заключаем, что $z_{\max}=z(B)=3$ и достигается в граничной точке $B(0;\ 1)$.

7. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Найдите частные производные и полный дифференциал функции двух переменных $z=f(x,y)$ в заданной точке $M_0(x_0;\ y_0)$:

1) $z=\sin^2(xy);\ M_0(1;\pi/4)$;
2) $z=yx^y;\ M_0(2;\ 1)$;
3) $z=\ln(x^2+y^2);\ M_0(-1;\ 1)$;
4) $z=x\cos(y^2+x);\ M_0(\pi/4;\ 0)$;
5) $z=2^{x^3y};\ M_0(1;\ 2)$;
6) $z=\dfrac{xy^2}{x^2+1};\ M_0(1;1)$;
7) $z=\dfrac{x^2-y}{x+y};\ M_0(1;\ 0)$;
8) $z=\sin(x/y);\ M_0(\pi/6;\ 1)$;
9) $z=\sqrt{x^2+xy+3y^2};\ M_0(1;\ -1)$;

10) $z=\dfrac{\ln(xy)}{x+y}$; $M_0(1;1)$;

11) $z=\left(x^2+3x\right)^{y^3+2y}$; $M_0(1;\,-1)$;

12) $z=y^2\sin\left(x^2y\right)$; $M_0\left(\sqrt{\pi};1\right)$;

13) $z=x^2\ln\left(x+y^2\right)$; $M_0(2;1)$;

14) $z=\ln x\sin(xy)$; $M_0(1;\,\pi/6)$;

15) $z=\operatorname{tg}(y/x)$; $M_0(2;\,\pi/2)$;

16) $z=\sin^2 x\cos^3 y$; $M_0(\pi/4;\pi/4)$.

Задание 2. Вычислите заданное выражение с помощью дифференциала:

1. $\cos 44^\circ \sin 92^\circ$;
2. $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}98)^2}$;
3. $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$;
4. $(1{,}02)^5(0{,}97)^3$;
5. $\cos 59^\circ \sin 44^\circ$;
6. $\cos 61^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;
7. $(1{,}98)^4(2{,}03)^5$;
8. $\sin 59^\circ \sin 32^\circ$;
9. $\sqrt{(3{,}02)^2+(3{,}98)^2}$;
10. $\sin 32^\circ \oplus \operatorname{ctg} 47^\circ$;
11. $\sqrt{(2{,}97)^2+(3{,}98)^2}$;
12. $\cos 32^\circ \operatorname{ctg} 44^\circ$;
13. $(2{,}05)^5(2{,}98)^3$;
14. $\sin 28^\circ \cos 58^\circ$;
15. $(3{,}02)^4(1{,}98)^5$;

16. $\operatorname{tg} 44^\circ \cos 58^\circ$.

Задание 3. Градиент функции и производная по направлению.

1) Найдите производную функции $f(x,y)=4x^4-3xy+3y^2$ в точке $M(2;-1)$ по направлению, составляющему угол $\pi/3$ с осью *ox*.

2) Найдите производную функции $f(x,y)=5x^3+2xy-3y^2$ в точке $M(-2;2)$ по направлению вектора $\vec{a}(1;4)$.

3) Найдите производную функции $f(x,y)=\cos 3x+4\sin 2y$ в точке $M(\pi/2;\pi/2)$ по направлению вектора $\vec{a}(2,-3)$.

4) Найдите производную функции $f(x,y)=4\cos 5x-2\sin 2y$ в точке $M(\pi/2;\pi/2)$ по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{3}$ с осью *ox*.

5) Найдите производную функции $f(x,y)=6x^2-xy^3+4y$ в точке $M(1;-2)$ по направлению, составляющему угол $\pi/3$ с осью *ox*.

6) Найдите производную функции $f(x,y)=\ln\left(3x^2+5y^2\right)$ в точке $M(-3;2)$ по направлению вектора $\vec{a}(4;-1)$.

7) Найдите производную функции $f(x,y)=\ln\left(5x^2+2y^2\right)$ в точке $M(1;-3)$ по направлению, составляющему угол $\pi/3$ с осью *ox*.

8) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ в точке $M(2;1)$, а также величину наибольшей скорости.

9) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$ в точке $M(5;3)$, а также величину наибольшей скорости.

10) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции $f(x,y)=xy$ в точке $M(1;\ 2)$, а также величину наибольшей скорости.

11) Найдите производную функции $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

12–16) Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T=T(x;y)$. Для примеров 12–16 найдите наибольшее значение скорости изменения температуры в точке $M_0(1;1)$ и соответствующее направление наибольшего возрастания температуры:

12) $T(x;y)=6x^2-5y$;

13) $T(x;y)=x\sin\pi y$;

14) $T(x;y)=x^2+2xy$;

15) $T(x;y)=y^2-2xy$;

16) $T(x;y)=2x^2-y^3$.

Указание. Скорость изменения температуры в точке M_0 достигает наибольшего значения, равного $\frac{\partial T(M_0)}{\partial l}\Big|_{\max}=\left|gradT(M_0)\right|$, в направлении $\vec{l}$, совпадающем с направлением вектора $gradT(M_0)$.

Задание 4. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

1) $z=\ln(x^2+y^2)$, $M_0(1;0;0)$;

2) $e^z-z+xy=3$, $M_0(2;1;0)$;

3) $x^2-y^2-z^2=1$, $M_0(3;2;2)$;

4) $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, $M_0(1;1;1)$;

5) $z=\frac{x^2}{2}-y^2$, $M_0(2;1;1)$;

6) $x(y+z)(z-xy)=8$, $M_0(2;1;3)$;

7) $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$, $M_0(1;1;2)$;

8) $x^2+y^2+z^2=14$, $M_0(1;2;3)$;

9) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(-3;4;5)$;

10) $z = x^2 + y^2$, $M_0(1;1;2)$;

11) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 12}$, $M_0(3;2;5)$.

12–16) Составьте уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x, y, z) = 0$ и параллельной заданной плоскости (π):

12) $F(x, y, z) \equiv 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21$, π: $6x - 4y - z = 0$;

13) $F(x, y, z) \equiv xy + z^2 + xz - 1$, π: $x - y + 2z = 0$;

14) $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z$, π: $2x + 4y - z - 5 = 0$;

15) $F(x, y, z) \equiv x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, π: $x - y + 2z = 0$;

16) $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - 2z$, π: $x + y - z - 1 = 0$.

Задание 5. Найдите точки локального экстремума функции:

1) $z = f(x, y) = 2xy - 2x - 4y$;

2) $z = f(x, y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$;

3) $z = f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$;

4) $z = f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$;

5) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^3$;

6) $z = f(x, y) = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$;

7) $z = f(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^3$;

8) $z = f(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^3$;

9) $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

10) $u = f(x, y, z) = 3 + 2x - y - 12z - x^2 + xy - y^2 + z^3$;

11) $z = f(x, y) = x^2 + 8\ln y - 2\ln x + y^2$;

12) $z = f(x, y) = -3x^2 + 4xy + 24x - 3y^2 - 26y + 1$;

13) $z = f(x, y) = 4x^2 - 24xy + 16x + 4y^2 - 34y + 1$;

14) $z = f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + 2x - 2y^2 - 6y + 18$;

15) $z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 10$;

16) $z = f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right).$

Задание 6. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 4$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 5$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + 2y$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y + 3 = 0$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ в области, ограниченной осями координат и прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в области, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

9. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \le 3$, $y \ge 0$, $y - x \le 0$.

10. Из всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ определите треугольник с наибольшей площадью.

11. Найдите наибольшее значение функции $f(x,y) = 2x - 2y$ при условиях $3x - 2y \ge -6$, $3x + y \ge 3$. $0 \le x \le 3$, $y \ge 0$. Сделайте рисунок.

12. Найдите наименьшее значение функции $f(x,y)=3x+y$ при условиях $x+y\geq 4,\ \ x-y\leq 0,\ \ x\geq 1,\ \ y\leq 8.$ Сделайте рисунок.

13. Найдите наибольшее значение функции $f(x,y)=3-x-y$ при условиях $3x+2y\geq 6,\ \ 2x-y\geq -3,\ \ 0\leq x\leq 4,\ \ y\geq 0.$ Сделайте рисунок.

14. Найдите наименьшее значение функции $f(x,y)=3+x+2y$ при условиях $x+y\geq 6,\ \ y-x\geq 0,\ \ x\geq 2,\ \ y\leq 10.$ Сделайте рисунок.

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=$ $=5x+4y-7$ на эллипсе $D=\left\{(x,y)\middle|\ 25x^2+16y^2=400\right\}.$

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=-xy(x+y-3)$ в замкнутой области в форме треугольника, ограниченного прямыми $x+y=6;\ x=0;\ y=0.$

ТЕСТЫ

Секция 1. Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность

Задание 1. Найдите область определения функции $z=\arcsin(x+y).$ Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-x+1$ и $y=-x-1;$

2) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-1<x<1;-1<y<1\right\};$

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-2x+1$ и $y=-2x-1;$

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-x$ и $y=-x-2;$

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-2x+2$ и $y=-2x-2.$

Задание 2. Найдите область определения функции

$z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-2<x<2;-2<y<2\right\}$;

2) множество внутренних точек на координатной плоскости *оху*, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в кольце $\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<2\right\}$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе $\left\{(x,y)\middle|-1<x<1\right\}$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

Задание 3. Найдите область определения функции:

$z=\arccos\left(x-y\right)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-2x+1$ и $y=-2x-1$;

2) множество внутренних точек на координатной плоскости *оху*, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек координатной плоскости *оху*, принадлежащих полосе, ограниченной прямыми $y=x+1$ и $y=x-1$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=x$ и $y=x-2$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y=-2x+2$ и $y=-2x-2$.

Задание 4. Найдите область определения функции $z=\arcsin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|y<x^2\right\}$;

2) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|y+1<x^2\right\}$;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|y-1<x^2\right\}$;

4) односвязная область на координатной плоскости *оху*, ограниченная двумя параболами $y=x^2$ и $y=-x^2$ и проходящая через ось *ох* с выколотой точкой в начале координат;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в области $\left\{(x,y)\middle|-1<y-x^2<1\right\}$.

Задание 5. Найдите область определения функции $z=\arccos\sqrt{x^2+y^2-1}$. Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в круге радиуса $r=1$ с центром в начале координат;

2) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в круге радиуса $r=\sqrt{2}$ с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-1<x<1;-1<y<1\right\}$;

4) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в квадрате $\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2};-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\right\}$;

5) множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями радиусов $r=1$ и $r=\sqrt{2}$ с центром в начале координат.

Задание 6. Найдите предел функции $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ в точке (0;0).

Секция 2. Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Задание 1. Найдите частные производные $z'_x(M), z'_y(M)$ функции $z(x,y)=\sin(\pi xy)$ в точке $M(1;2)$. В ответе запишите $z'_x(M)/\pi + z'_y(M)/\pi$.

Задание 2. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z(x,y)=x^2e^{-xy}$, $M_0(2;0)$. В ответе запишите $z'_x(M_0)+z'_y(M_0)$.

Задание 3. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z=y/\sqrt{x}$; $P_0(1;2)$. В ответе запишите $z'_x(P_0)+z'_y(P_0)$.

Задание 4. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z=\operatorname{arctg}(xy)$; $P_0(1;1)$. В ответе запишите $z'_x(P_0)+z'_y(P_0)$.

Задание 5. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$z=e^{(x-1)y}$; $P_0(1;1)$. В ответе запишите $z'_x(P_0)+z'_y(P_0)$.

Задание 6. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$.

Задание 7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

Задание 8. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0{,}97^{1{,}05}$.

Задание 9. Одна сторона прямоугольника $a=10$ см, а другая $b=24$ см. Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм. Найдите и запишите в см величину изменения диагонали прямоугольника:

а) приближенно с помощью дифференциала;

в) точную ее величину.

Секция 3. Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции

Задание 1. Найдите в указанной точке $M_0(1;0)$ первые частные производные неявно заданной функции $z^3+3xyz+1=0$. В ответе запишите $z'_x(M_0)+z'_y(M_0)$.

Задание 2. Найдите в указанной точке $M_0(1;1;2)$ первые частные производные неявно заданной функции $x^3+2y^3+z^3-3xyz+$ $+2y-3=0$. В ответе запишите $z'_x(M_0)+z'_y(M_0)$.

Задание 3. Найдите производную функции $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ по направлению $\vec{l}=(6;8)$ в точке $M(1;2)$.

Задание 4. Найдите производную функции $z=x^2+xy+2x+2y$, по направлению $\vec{l}=(3;4)$ в точке $M(1;1)$.

Задание 5. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T(x;y)=6x^2-5y$. Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры $J=\left|gradT(M_0)\right|$ в точке $M_0(1;1)$.

Задание 6. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T(x;y)=x\sin\pi y$. Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры $J=\left|gradT\left(M_0\right)\right|$ в точке $M_0(1;1)$. В ответе укажите значение J/π.

Задание 7. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону $T(x;y)=y^2-2xy$. Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры $J=\left|gradT\left(M_0\right)\right|$ в точке $M_0(1;1)$.

Секция 4. Элементы теории поля

Задание 1. Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$z=\ln\left(x^2+y^2\right);\ (1;\ 0;\ 0).$$

1) $x+3y-2z-2=0$;
2) $2x-y+2z+1=0$;
3) $2x+2y-z-1=0$;
4) $x+y-2z-2=0$;
5) $3x-y+2z+2=0$.

Задание 2. Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$z=\ln\left(x^2+y^2\right);\ (1;\ 0;\ 0).$$

1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$;
2) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$;
3) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$;
4) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-2}$;

5) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Задание 3. Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$x^2-y^2-z^2=1;\ (3;\ 2;\ 2).$$

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$;

2) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$;

3) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$;

4) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$;

5) $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

Задание 4. Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$x^2-y^2-z^2=1;\ (3;2;2).$$

1) $x+2y+z=2$,

2) $x+2y-3z=3$,

3) $2x+y-z=2$,

4) $x-3y+z=3$,

5) $3x-2y-2z=1$.

Задание 5. Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$z=x^2-2xy+y^2-x+2y;\ (1;\ 1;\ 1).$$

1) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$;

2) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$;

3) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$;

4) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$;

5) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-3}$.

Задание 6. Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в указанной точке:

$$z=x^2-2xy+y^2-x+2y;\ (1;\ 1;\ 1).$$

1) $x-2y+z=0$,
2) $3x-y-2z=2$,
3) $x+2y-z=2$,
4) $3x-2y-2z=0$,
5) $2x+y-z=3$.

Секция 5. Локальный и глобальный экстремумы

Задание 1. Найдите точку локального минимума $M(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)=x^2-2x+2y^2$. В ответе укажите сумму x_0+y_0.

Задание 2. Найдите точку локального минимума $M(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)=2x^2+y^2+4x-2y+5$. В ответе укажите сумму x_0+y_0.

Задание 3. Найдите точку локального максимума $M(x_0;y_0)$ функции $f(x;y)=-4x^2-y^2+4y$. В ответе укажите сумму x_0+y_0.

Задание 4. Найдите условные экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Задание 5. Найдите наибольшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в 1-й четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$.

ОТВЕТЫ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

Секция 1. Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность

Задание 1. Множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x + 1$ и $y = -x - 1$.

Задание 2. Множество внутренних точек на координатной плоскости *оху*, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат.

Задание 3. Множество точек координатной плоскости *оху*, принадлежащих полосе, ограниченной прямыми $y = x + 1$ и $y = x - 1$.

Задание 4. Односвязная область на координатной плоскости *оху*, ограниченная двумя параболами $y = x^2$ и $y = -x^2$, и проходящая через ось *ох* с выколотой точкой в начале координат.

Задание 5. Множество точек на координатной плоскости *оху*, лежащих в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями радиусов $r = 1$ и $r = \sqrt{2}$ с центром в начале координат.

Задание 6. 1.

Секция 2. Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Задание 1. 3.

Задание 2. –4.

Задание 3. 0.

Задание 4. 1.

Задание 5. 1.

Задание 6. 1,00.
Задание 7. 4,998.
Задание 8. 0,97.
Задание 9. 0,062; 0,065.

Секция 3. Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции

Задание 1. 1.
Задание 2. –23/9.
Задание 3. –0,12.
Задание 4. 5,4.
Задание 5. 13.
Задание 6. 1.
Задание 7. 2.

Секция 4. Элементы теории поля
Задание 1. $2x+2y-z-1=0.$
Задание 2. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$
Задание 3. 4) $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}.$
Задание 4. 5) $3x-2y-2z=1.$
Задание 5. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$
Задание 6. $x-2y+z=0.$

Секция 5. Локальный и глобальный экстремумы
Задание 1. 1.
Задание 2. 0.
Задание 3. 2.
Задание 4. $z_{\max}=5$ в точке $M_1(1;2)$; $z_{\min}=-5$ в точке $M_2(-1;-2)$.
Задание 5. $z_{наиб}\equiv z(0;1)=3.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карасев В.А., Левшина Г.Д.* Математический анализ: часть 1. Дифференциальное исчисление. – М.: Илекса, 2011. – 296 с.

2. *Дорофеева А.В.* Высшая математика для гуманитарных направлений: учебное пособие. – М.: Юрайт, 2012. – 400 с.

3. *Дорофеева А.В.* Высшая математика для гуманитарных направлений: сборник задач. – М.: Юрайт, 2013. – 175 с.

4. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: АЙРИС-ПРЕСС, 2017. – 603 с.

5. *Шершнев В.Г.* Математический анализ: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 287 с.

6. *Кадымов В.А.* Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие: часть 1. – М.: МГГЭУ, 2015. – 34 с.

7. *Кадымов В.А.* Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие: часть 2. – М.: МГГЭУ, 2015. – 50 с.

Содержание

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов**

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор	С.А. Бобко
Технический редактор	К.А. Антонов
Редактор/корректор	Ю.Ф. Кравчинская
Компьютерная верстка	К.А. Антонов

Подписано в печать 27.04.2018. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 5.
Тираж 31 экз. Заказ № 19.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.