

Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб,
А.В. Агапчев, А.Н. Колесникова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Москва
2018

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет

**Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб,
А.В. Агапчев, А.Н. Колесникова**

**Сборник задач по уравнениям
в частных производных**

Москва
2018

УДК 517
ББК 22.161.1
Н 90

Рецензенты:

В.А. Кадымов — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математики МГГЭУ;

Ю.В. Перепелкина — кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ВИНТИ РАН

Д.В. Нуцубидзе, Н.В. Труб, А.В. Агапчев, А.Н. Колесникова

Н 90 Сборник задач по уравнениям в частных производных. – М.: МГГЭУ, 2018.
– 80 с.

В учебном пособии рассмотрены уравнения в частных производных (уравнения математической физики). Даны основные понятия уравнений в частных производных и рассмотрены основные методы их решений. Структура пособия соответствует традиционным тематическим разделам дисциплины «Уравнения в частных производных». Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Информатика и вычислительная техника».

ISBN 978-5-9799-0114-5

© Нуцубидзе Д.В.,
Труб Н.В.,
Агапчев А.В.,
Колесникова А.Н., 2018
© МГГЭУ, 2018

Введение

Настоящая работа будет полезна для студентов факультета прикладной математики и информатики как сборник основных задач по традиционным тематическим разделам курса «Уравнения в частных производных». Вместе с тем пособие содержит темы, не вошедшие в этот курс, но представляющие интерес для студентов с учебной и с научно-исследовательской точки зрения. Пособие также может быть рекомендовано в помощь студентам при написании выпускной квалификационной работы.

Изложение ведется в естественной логической последовательности с соблюдением постепенного перехода от простого к сложному.

Пособие включает большое количество примеров, хорошо иллюстрирующих практическое применение изложенного теоретического материала.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Информатика и вычислительная техника».

Основные сведения из теории линейных уравнений в частных производных

§ 1. Типы линейных уравнений с частными производными второго порядка

Определение. Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n и частные производные от искомой функции, называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Определение. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения в частных производных.

Определение. Уравнение с частными производными называется **линейным**, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех её частных производных.

Общая запись линейных уравнений второго порядка.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au + f = 0, \quad (1)$$

где

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$a_{11} = a_{11}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, a = a(x_1, x_2, \dots, x_n), f = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Пример:

$$u_t = u_{xx}.$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}.$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}.$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (1) относятся к одному из трех типов:

- гиперболический;
- параболический;
- эллиптический.

Если:

- a) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа;
- b) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа;
- c) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа.

Задания. Найти область гиперболичности, параболичности и эллиптичности для следующих уравнений:

- 1) $\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 2) $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 3) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3(x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 4) $(\sin x + \cos y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\sin x - \cos y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin x \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 7) $(1 - \sin x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \sin x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 8) $\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$
- 9) $(1 - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \alpha = \text{const};$
- 10) $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \alpha = \text{const};$

$$11) \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\cos x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$12) 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

§ 2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

Лемма. Если функция $\varphi(x, y) = C$ является решением дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dy dx + a_{22} dx^2 = 0, \quad (2)$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11} (z_x)^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} (z_y)^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* уравнения (1).

Уравнение (2) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения:

- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ — уравнение является уравнением гиперболического типа;
- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ — уравнение является уравнением параболического типа;
- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ — уравнение является уравнением эллиптического типа.

Рассмотрим все три вышеназванных случая:

а) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ — уравнение гиперболического типа.

В этом случае решения уравнения (2) и их общие интегралы вещественны и различны:

$$\varphi(x, y) = c_1$$

$$\psi(x, y) = c_2$$

Они определяют два вещественных и различных семейства характеристик.

Положим

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) можно привести к виду:

$$u_{\xi\eta} = \varphi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1-1)$$

где $\varphi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ — некоторая функция.

Тем самым получили первую каноническую форму уравнения гиперболического типа.

С помощью замены

$$\alpha = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi + \eta}{2}$$

уравнение (1-1) можно привести к виду:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \varphi_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \quad (1-1-2)$$

Это вторая каноническая форма уравнения гиперболического типа.

б) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ — уравнение параболического типа.

Решения уравнения (2), следовательно, и их интегралы совпадают, т.е. мы получаем только одно вещественное семейство характеристик:

$$\xi = \varphi(x, y).$$

В качестве второй переменной $\eta(x, y)$ возьмем любую дважды непрерывно-дифференцируемую функцию, для которой:

$$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0.$$

Положив

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

получим:

$$u_{\eta\eta} = \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1-2)$$

где $\varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ — некоторая функция.

Получили каноническую форму уравнения параболического типа.

с) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ — уравнение эллиптического типа.

Коэффициенты решений уравнения, а следовательно, и первые интегралы уравнений — комплексные величины.

Пусть

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = c_1$$

является одним из интегралов, тогда другой интеграл будет комплексно-сопряженным с указанным:

$$\psi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) - i\varphi_2(x, y) = c_2.$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}.$$

Тогда уравнение (1) можно привести к виду:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \varphi_3(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad (1-3)$$

где $\varphi_3(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$ — некоторая функция.

Т.е. для уравнения эллиптического типа после определения первых интегралов достаточно положить:

$$\xi = \operatorname{Re}[\varphi] (= \varphi_1(x, y)); \quad \eta = \operatorname{Im}[\varphi] (= \varphi_2(x, y)).$$

Задания. Привести к каноническому виду следующие дифференциальные уравнения:

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0;$$

$$4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$5) \quad y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$6) \quad \operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$7) \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$8) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 4y \frac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0;$$

$$9) \quad (1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$10) \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$11) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \alpha = \text{const.}$$

§ 3. Метод характеристик

Данный метод рассмотрен в § 3 гл. 2 пособия.

Задания

1–6. Найти общее решение следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + xy u = 0.$$

2. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

а также его общее решение.

3. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0.$$

4. Найти решение уравнения

$$4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

5. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=\sin x} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\sin x} = \varphi_1(x).$$

6. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = f_2(x).$$

7. Найти решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{y=1} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = \varphi_1(x).$$

§ 4. Метод разделения переменных

Данный метод рассмотрен в § 4 гл. 2 пособия.

Задания

Уравнения гиперболического типа

1. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$, $x=\ell$, имеющая в начальный момент времени форму

$$U(x; 0) = \frac{16}{5}k \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right],$$

где $k > 0$ достаточно малое число, начала колебаться без начальной скорости. Найти свободные колебания струны.

2. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$, $x=\ell$, имеющая в начальный момент времени форму

$$U(x; 0) = \frac{4kx(\ell - x)}{\ell^2}, \quad k = U\left(\frac{\ell}{2}; 0\right),$$

начала колебаться без начальной скорости. Найти свободные колебания струны.

3. Решить задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0; t) &= 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения параболического типа

4. Найти решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} U(x; 0) &= x^2, \quad x \in [0; 1] \\ U(0; t) &= 0, \quad U(1; t) = 1, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

5. Найти решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, t > 0,$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0; t) &= \mathcal{U}(\ell; t) = 0, \quad t > 0; \\ \mathcal{U}(x; 0) &= \begin{cases} x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\ell}{2} \\ \ell - x, & \text{при } \frac{\ell}{2} \leq x < \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Дан тонкий однородный стержень длиной ℓ , изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна:

$$f(x) = \frac{cx(\ell - x)}{\ell^2}.$$

Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

7. Дан тоненький однородный стержень длиной ℓ , начальная температура которого равна нулю. На конце $x = \ell$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = 0$ она растет линейно со временем так, что $\mathcal{U}(0; t) = \mathcal{A}t$, где $\mathcal{A} = \text{const}$. Найти распределения температуры вдоль стержня, при $t > 0$.

Уравнения эллиптического типа

8. Решите уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

при следующих краевых условиях внутри прямоугольника:

$$\mathcal{U}|_{x=0} = \mathcal{U}_0; \quad \mathcal{U}|_{x=a} = u|_{y=0} = y|_{y=b} = 0.$$

9. Найти решение уравнения Лапласа в полуполосе $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \infty$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\mathcal{U}(0; y) = 0, \mathcal{U}(a; y) = 0, \mathcal{U}(x; 0) = A \left(1 - \frac{x}{a} \right), \mathcal{U}(x; \infty) = 0, 0 \leq x \leq a.$$

10. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области, заключенной между двумя concentрическими окружностями с радиусами R_1 и R_2 с центром в начале координат.

11. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике,

$$\mathfrak{D}: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b,$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$U(0; y) = A, \quad U(a; y) = Ay, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0.$$

12. Найти гармоническую функцию внутри кругового сектора $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \lambda$, удовлетворяющую краевым условиям

$$U(\rho; 0) = U(\rho; \lambda) = 0, \quad U(R; \varphi) = A\varphi.$$

Решение типовых задач

§ 1. Типы линейных уравнений с частными производными второго порядка

Нахождение области гиперболичности, параболичности и эллиптичности для уравнений.

1. $\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$a_{11}(x; y) = \sin x; \quad a_{12}(x; y) = \frac{3}{2}; \quad a_{22}(x; y) = \cos x.$$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = \frac{9}{4} - \sin x \cos x = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \sin 2x \right),$$

так как $\Delta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — то уравнение гиперболического типа во всей области определения.

$$2. \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = 2; \quad a_{12}(x; y) = -\frac{5}{2}; \quad a_{22}(x; y) = x + y.$$

$$\Delta = \frac{25}{4} - 2(x + y);$$

$$\frac{25}{4} - 2(x + y) > 0 \text{ или } 2(x + y) < \frac{25}{4}, \text{ или } x + y < \frac{25}{8}.$$

а) Следовательно, в области $y < \frac{25}{8} - x$ — уравнение гиперболического типа.

б) В области $y = \frac{25}{8} - x$ — уравнение параболического типа.

с) В области $y > \frac{25}{8} - x$ — уравнение эллиптического типа.

$$3. \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3(x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = x; \quad a_{12}(x; y) = \frac{3}{2}(x + y); \quad a_{22}(x; y) = y.$$

$$\Delta = \frac{9}{4}(x + y)^2 - xy = \frac{9}{4}(x^2 + 2xy + y^2) - xy = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}xy + \frac{9}{4}y^2 - xy =$$

$$= \frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{9}{4}y^2,$$

так как $\frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{9}{4}y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — то уравнение гиперболического типа во всей области определения.

$$4. \quad (\sin x + \cos y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\sin x - \cos y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = \sin x + \cos y; \quad a_{12}(x; y) = \cos y; \quad a_{22}(x; y) = \sin x - \cos y.$$

$$\Delta = \cos^2 y - (\sin x + \cos y)(\sin x - \cos y) = \cos^2 y - (\sin^2 x - \cos^2 y) = \\ = \cos^2 y - \sin^2 x + \cos^2 y = 2\cos^2 y - \sin^2 x.$$

- a) При $2\cos^2 y - \sin^2 x > 0$ или $2\cos^2 y > \sin^2 x$ — уравнение гиперболического типа.
 b) При $2\cos^2 y = \sin^2 x$ — уравнение параболического типа.
 c) При $2\cos^2 y < \sin^2 x$ — уравнение эллиптического типа.

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = \sin x \cos y; a_{22}(x; y) = \cos^2 y.$$

$$\Delta = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 y = \cos^2 y (\sin^2 x - 1).$$

- a) Так как $\cos^2 y (\sin^2 x - 1) > 0$ ни при каком $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, то уравнение не может быть уравнением гиперболического типа ни в одной точке области определения.
 b) При $\cos^2 y (\sin^2 x - 1) = 0$ — уравнение параболического типа.
 c) При $\cos^2 y (\sin^2 x - 1) < 0$, т.е. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — уравнение эллиптического типа.

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = 3x; a_{22}(x; y) = xy.$$

Следовательно, $\Delta = 9x^2 - xy = x(9x - y).$

- a) При $x(9x - y) > 0$ — уравнение гиперболического типа.
 b) При $x(9x - y) = 0$ — уравнение параболического типа.
 c) При $x(9x - y) < 0$ — уравнение эллиптического типа.

7. $(1 - \sin x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \sin x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$a_{11}(x; y) = 1 - \sin x; a_{12}(x; y) = \frac{1}{2} \cos x; a_{22}(x; y) = 1 + \sin x.$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \cos^2 x - (1 - \sin x)(1 + \sin x) = \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{4}{4} \cos^2 x = -\frac{3}{4} \cos^2 x.$$

a) Так как $-\frac{3}{4} \cos^2 x > 0$, ни при каком $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — то уравнение не может быть уравнением гиперболического типа ни в одной точке области определения.

b) При $-\frac{3}{4} \cos^2 x = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $-\frac{3}{4} \cos^2 x < 0$ — уравнение эллиптического типа.

8. $\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$a_{11}(x; y) = \sin x; a_{12}(x; y) = \cos x; a_{22}(x; y) = \sin x.$$

$$\Delta = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

a) При $\cos 2x > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $\cos 2x = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $\cos 2x < 0$ — уравнение эллиптического типа.

9. $(1 - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1 + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \alpha = \text{const.}$

$$a_{11}(x; y) = 1 - \alpha; a_{12}(x; y) = \alpha; a_{22}(x; y) = 1 + \alpha.$$

$$\alpha = \alpha^2 - 1 + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 1.$$

a) При $2\alpha^2 - 1 > 0$ — уравнение гиперболического типа.

b) При $2\alpha^2 - 1 = 0$ — уравнение параболического типа.

c) При $2\alpha^2 - 1 < 0$ — уравнение эллиптического типа.

10. $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \alpha = \text{const.}$

$$a_{11}(x; y) = \alpha; a_{12}(x; y) = 1 + \alpha; a_{22}(x; y) = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\Delta = (1 + \alpha)^2 - \frac{\alpha}{\alpha} = 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha^2 + 2\alpha.$$

a) При $\alpha^2 + 2\alpha > 0$ — уравнение гиперболического типа.

б) При $\alpha^2 + 2\alpha = 0$ — уравнение параболического типа.

с) При $\alpha^2 + 2\alpha < 0$ — уравнение эллиптического типа.

$$11. \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\cos x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = \sin x; a_{12}(x; y) = \operatorname{tg} x; a_{22}(x; y) = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Delta = \operatorname{tg}^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1)$$

а) При $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) > 0$ — уравнение гиперболического типа.

б) При $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0$ — уравнение параболического типа.

с) При $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) < 0$ — уравнение эллиптического типа.

$$12. 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$a_{11}(x; y) = 4; a_{12}(x; y) = -6; a_{22}(x; y) = 12.$$

$$\Delta = 36 - 48 = -12.$$

Так как $\Delta = -12 < 0$ — $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ уравнение эллиптического типа во всей области определения.

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка

Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения.

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = 1; a_{22}(x; y) = -3.$$

Следовательно:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 + 3 = 4;$$

Так как $\Delta > 0$ — то уравнение гиперболического типа.
Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} d^2y - 2a_{12} dx dy + a_{22} d^2x = 0.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} dy^2 - 2dx dy - 3dx^2 = 0 &\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \text{ или } \frac{dy}{dx} = 3. \end{aligned}$$

Следовательно, характеристики имеют вид:

$$y = -x + C_1 \text{ и } y = 3x + C_2.$$

Введем новые переменные: $\xi = x + y$ и $\eta = 3x - y$;

тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \\
&\quad - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 6 \frac{\partial u}{\partial \eta} + 6 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 6 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

или

$$16 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 8 \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x, y) = 1; a_{12}(x, y) = 2; a_{22}(x, y) = 5.$$

Тогда: $\Delta = 4 - 5 = -1$.

Так как $\Delta < 0$, то это уравнение эллиптического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0.$$

Следовательно:

$$dy^2 - 4 dx dy + 5 dx^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 4 \frac{\partial y}{\partial x} + 5 = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 2 - i \text{ или } \frac{\partial y}{\partial x} = 2 + i.$$

Следовательно, характеристики имеют вид:

$$y = (2 - i)x + C_1 \text{ и } y = (2 + i)x + C_2$$

или

$$C_1 = (2 + i)x - y \text{ и } C_2 = (2 - i)x - y.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{2x + ix - y + 2x - ix - y}{2} = \frac{4x - 2y}{2} = 2x - y$$

и

$$\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i} = \frac{2x + ix - y - 2x + ix + y}{2i} = \frac{2ix}{2i} = x.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) =$$

$$= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = -1; a_{22}(x; y) = 1.$$

Следовательно: $\Delta = 1 - 1 = 0.$

Так как $\Delta = 0$, то это уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0.$$

Следовательно:

$$dy^2 + 2 dx dy + dx^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(-2)}{2} = -1.$$

Характеристики имеют вид:

$$y = -x + C_1 \text{ и } y = C_2$$

или

$$C_1 = y + x \text{ и } C_2 = y.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = x + y \text{ и } \eta = y.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a + \beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0.$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = -\cos x; a_{22}(x; y) = -(3 + \sin^2 x).$$

Следовательно:

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4.$$

Так как $\Delta > 0$, то это уравнение гиперболического типа во всей области определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$dy^2 + 2 \cos x dx dy - (3 + \sin^2 x) dx^2 = 0.$$

Так как $D = 4\cos^2 x + 12 + 4\sin^2 x = 16$ то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cos x \pm 4}{2}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2 \text{ и } \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2.$$

Характеристики имеют вид:

$$y = -\sin x - 2x + C_1 \text{ и } y = -\sin x + 2x + C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \sin x + 2x + y \text{ и } \eta = 2x - \sin x - y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (\cos x + 2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (2 - \cos x) \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((\cos x + 2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (2 - \cos x) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left((\cos x + 2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((2 - \cos x) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= (\cos x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + (\cos x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\
&+ (2 - \cos x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + (2 - \cos x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\
&= (\cos x + 2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (4 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\
&+ (4 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + (2 - \cos x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\
&= (\cos x + 2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(4 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (2 - \cos x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \sin x \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right); \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\
&= (\cos x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2 - \cos x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (\cos x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - (2 - \cos x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\
&= (\cos x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (2 - \cos x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$(\cos x + 2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(4 - \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (2 - \cos x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \sin x \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) -$$

$$-2 \cos x (\cos x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \cos x (2 - \cos x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} -$$

$$-(3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - y \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\xi - \zeta}{32} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 0.$$

$$5. \quad y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = y^2; \quad a_{12}(x; y) = yx; \quad a_{22}(x; y) = 2x^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = x^2 y^2 - 2x^2 y^2 = -x^2 y^2.$$

При $\Delta = 0$, то есть при $xy = 0$, это уравнение параболического вида в своей области определения, т.е. при $x = 0$ или при $y = 0$.

При $\Delta < 0$, то есть при $xy \neq 0$, имеем $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то есть это уравнение эллиптического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$y^2 dy^2 - 2xy dx dy + 2x^2 dx^2 = 0$$

или

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + 2x^2 = 0.$$

Так как $D = 4x^2 - 8x^2 y^2 = -4x^2 y^2$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \pm 2xy}{2y^2} = \frac{x \pm ix}{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+i)}{y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2}(1+i) + C_1 \Rightarrow y^2 = x^2(1+i) + C_1 \Rightarrow C_1 = x^2(1+i) - y^2. \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x(1-i)}{y} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2}(1-i) + C_2 \Rightarrow y^2 = x^2(1-i) + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_2 = x^2(1-i) - y^2. \end{aligned}$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{x^2 + x^2 i - y^2 + x^2 - x^2 i - y^2}{2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{2} = x^2 - y^2$$

и

$$\eta = \frac{C_1 - C_2}{2i} = \frac{x^2 + x^2 i - y^2 - x^2 + x^2 i + y^2}{2i} = \frac{2x^2 i}{2i} = x^2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -2y \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-2y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-2y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} = \\
&= 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2y^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} - 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \\
- 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 8x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4x^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2y^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,
\end{aligned}$$

или

$$4y^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4y^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 4x^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Так как $x^2 = \eta$ и $y^2 = \xi - \eta$, то окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

При $x = 0$ имеем:

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

а при $y = 0$ имеем:

$$2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$
$$\operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = \operatorname{tg}^2 x; a_{12}(x; y) = -y \operatorname{tg} x; a_{22}(x; y) = y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = y^2 \operatorname{tg}^2 x - y^2 \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

Так как $\Delta = 0$ в области своего определения, то уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x dy^2 + 2y \operatorname{tg} x dx dy + y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2y \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Так как $D = 4y^2 \operatorname{tg}^2 x - 4y^2 \operatorname{tg}^2 x = 0$, то:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{y}{\operatorname{tg} x}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{y}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow y \sin x = C.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = y \sin x \text{ и } \eta = y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = y \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ &\quad - y \sin x \frac{\partial \xi}{\partial x} = y \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - y \sin x \frac{\partial \xi}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = y \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + y \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\ &\quad + \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi} = y \sin x \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x \cos^2 xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - y \operatorname{tg}^2 x \sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2y^2 \operatorname{tg} x \sin x \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \\ - 2y^2 \operatorname{tg} x \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2y \operatorname{tg} x \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi} + y^2 \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\ + 2y^2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + y \operatorname{tg}^3 x \cos x \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

или

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2y \sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Учитывая, что $\xi = y \sin x$ и $\eta = y$, окончательно имеем:

$$\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

$$6. \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = y; \quad a_{12}(x; y) = 0; \quad a_{22}(x; y) = 1.$$

Следовательно:

$$\Delta = -y.$$

Таким образом:

- а) При $y < 0$ — уравнение гиперболического вида в области своего определения.
- б) При $y = 0$ — уравнение параболического вида в области своего определения.
- в) При $y > 0$ — уравнение эллиптического вида в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$y dy^2 + dx^2 = 0,$$

или

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

или

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1.$$

а) Если $y < 0$, то $\pm\sqrt{-y}\frac{dy}{dx} = 1$.

Отсюда имеем:

$$\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = x + C_1 \text{ и } -\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = x + C_2$$

или

$$C_1 = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \text{ и } C_2 = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \text{ и } \zeta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{-y} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{-y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \sqrt{-y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \sqrt{-y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \sqrt{-y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \\
- \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

или

$$4y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{8(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{8(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Учитывая, что

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \quad \text{и} \quad \zeta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$$

или

$$\xi - \eta = -\frac{4}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \quad \text{и} \quad -3(\xi - \eta) = 4(-y)^{\frac{3}{2}},$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

b) Если $y = 0$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

c) Если $y > 0$, то $\sqrt{y} \frac{dy}{dx} = \pm i$.

Отсюда имеем:

$$-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = xi - C_1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = xi + C_2$$

или

$$C_1 = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + xi \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - xi.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + xi - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + xi}{2i} = x \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + xi + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - xi}{2} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \sqrt{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \sqrt{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$7. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 4y \frac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = x^2; \quad a_{12}(x; y) = xy; \quad a_{22}(x; y) = -3y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = x^2 y^2 + 3x^2 y^2 = 4x^2 y^2.$$

Таким образом:

- а) При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ — уравнение гиперболического вида в области своего определения.
- б) При $x = 0$ или $y = 0$ — уравнение параболического вида в области своего определения.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

- а) Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$x^2 dy^2 - 2xy dx dy - 3y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} - 3y^2 = 0.$$

Так как $D = 4x^2 y^2 + 12x^2 y^2 = 16x^2 y^2$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \pm 4xy}{2x^2} = \frac{y \pm 2y}{x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \text{ и } \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x},$$

или

$$\ln y = -\ln x + C_1 \text{ или } \ln y = \ln x^3 + C_2.$$

Отсюда имеем:

$$C_1 = \frac{x^3}{y} \text{ и } C_2 = yx.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{x^3}{y} \text{ и } \eta = yx.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3x^2}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3x^2}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x^2}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3x^2}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{3x^2}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 6 \frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{9x^4}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 6 \frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{3x^2}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{x^3}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 3 \frac{x^5}{y^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3x^2}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{x^3}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{2x^3}{y^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{x^4}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{x^6}{y^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2x^3}{y^3} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned} x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{9x^6}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 6 \frac{x^3}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \\ - 6 \frac{x^6}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2xy \frac{\partial u}{\partial \xi} - 6 \frac{x^3}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} - 3x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \\ - 3 \frac{x^6}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 6 \frac{x^3}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} + 4xy \frac{\partial u}{\partial \xi} - 4 \frac{x^3}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} + 16x^4 u = 0 \end{aligned}$$

или

$$16x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4xy \frac{\partial u}{\partial \xi} - 16 \frac{x^3}{y} \frac{\partial u}{\partial \eta} + 16x^4 u = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y}{4x^3} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{xy} \frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0.$$

Учитывая, что

$$\xi = \frac{x^3}{y} \quad \text{и} \quad \eta = yx,$$

имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0.$$

b) При $x=0$ или $y=0$ имеем:

$$-3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

или

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 16x^4 u = 0.$$

$$8. (1+x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1 + x^2; a_{12}(x; y) = 0; a_{22}(x; y) = 1 + y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = -(1+x^2)(1+y^2).$$

Так как $\Delta < 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, то это уравнение эллиптического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$(1+x^2) dy^2 + (1+y^2) dx^2 = 0,$$

или

$$(1+x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 + y^2 = 0,$$

или

$$(1+x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -(1+y^2),$$

или

$$\pm \sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = i \sqrt{1+y^2}.$$

Следовательно:

$$-i \ln \left| y + \sqrt{1+y^2} \right| = -\ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C_1$$

или

$$i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| = \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| + C_2.$$

Отсюда имеем:

$$C_1 = i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|$$

$$C_2 = -i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| - i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|}{2} =$$

$$\ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|$$

$$\eta = \frac{i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| - i \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|}{2i} =$$

$$\ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right|.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} -$$

$$- \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{1 + x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} -$$

$$- \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{1+y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{y(1+y^2)}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

$$9. \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x, y) = \sin^2 x; \quad a_{12}(x, y) = -y \sin x; \quad a_{22}(x, y) = y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = y^2 \sin^2 x - y^2 \sin^2 x = 0.$$

Так как $\Delta = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, то уравнение является уравнением параболического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$\sin^2 x dy^2 + 2y \sin x dx dy + y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$\sin^2 x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2y \sin x \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Так как $D = 4y^2 \sin^2 x - 4y^2 \sin^2 x = 0$, то имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y \sin x}{2 \sin^2 x} = -\frac{y}{\sin x}$$

или

$$y \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{ и } \eta = y.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \\ &= \frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{y \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \\ &= \frac{y^2}{4 \cos^4 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \\
&= \frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \\
&= \frac{y \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\
&\quad + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{y^2 \sin^2 x}{4 \cos^4 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y^2 \sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y^2 \sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \\
&\quad - \frac{y \sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + y^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 y^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0
\end{aligned}$$

или

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2 y \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2y \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2y \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{y^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + y^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Учитывая, что: $\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и $\eta = y$, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

10. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \alpha = \text{const.}$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = 0; a_{22}(x; y) = y.$$

Следовательно: $\Delta = -y$.

а) При $\Delta = -y > 0$, т.е. если $y < 0$ — уравнение гиперболического типа.

б) При $\Delta = -y = 0$, т.е. если $y = 0$ — уравнение параболического типа.

в) При $\Delta = -y < 0$, т.е. если $y > 0$ — уравнение эллиптического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$dy^2 + y dx^2 = 0$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -y.$$

а) Если $y < 0$, то имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{-y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = +\sqrt{-y}$$

или

$$-2\sqrt{-y} = -x + C_1 \quad \text{и} \quad -2\sqrt{-y} = x + C_2$$

или

$$C_1 = x - 2\sqrt{-y} \quad \text{или} \quad C_2 = x + 2\sqrt{-y}.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = x - 2\sqrt{-y} \quad \text{или} \quad \zeta = x + 2\sqrt{-y}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\
& = -\frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{y}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\
+ \frac{a}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{a}{\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

или

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2a-1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1-2a}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Учитывая, что

$$\xi = x - 2\sqrt{-y} \quad \text{или} \quad \zeta = x + 2\sqrt{-y}.$$

имеем

$$\xi - \eta = -4\sqrt{-y}.$$

Следовательно:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2a-1}{2(\xi-\eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{a-\frac{1}{2}}{(\xi-\eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

б) Если $y = 0$, то имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

в) Если $y > 0$ то имеем:

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -i\sqrt{y}$$

или

$$2\sqrt{y} = xi + C_1 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{y} = -xi + C_2,$$

или

$$C_1 = 2\sqrt{y} - xi \quad \text{или} \quad C_2 = 2\sqrt{y} + xi.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \frac{2\sqrt{y} - xi - 2\sqrt{y} - xi}{2i} = x;$$

$$\eta = \frac{2\sqrt{y} - xi + 2\sqrt{y} + xi}{2} = 2\sqrt{y}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{y}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{a}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{a}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{(2a-1)}{2\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{(2a-1)}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

$$11. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = x^2; \quad a_{12}(x; y) = 0; \quad a_{22}(x; y) = -y^2.$$

Следовательно: $\Delta = x^2 y^2$.

а) При $\Delta = x^2 y^2 > 0$, т.е. при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ — уравнение гиперболического типа.

б) При $\Delta = x^2 y^2 = 0$, т.е. при $x = 0$ и $y = 0$ — уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y^2,$$

или

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right) = \mp y.$$

а) При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ имеем:

$$-\ln|y| = \ln|x| + C_1 \text{ и } \ln|y| = \ln|x| + C_2$$

или

$$\ln|xy| = C_1 \text{ и } \ln \left| \frac{y}{x} \right| = C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
&= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
y^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} - y^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \\
- 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0
\end{aligned}$$

или

$$-4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Учитывая, что

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x},$$

получаем:

$$-4\xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

или

$$2\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Решим полученное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \right) = 0 \Rightarrow 2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - u = C_1(\xi) \Rightarrow 2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = C_1(\xi) + u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{C_1(\xi)}{2\xi} + \frac{u}{2\xi} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2\xi}u = C_1(\xi).$$

Отсюда имеем:

$$u = e^{\int \frac{1}{2\xi} d\xi} (C_2(\eta) + C_1(\xi)) = (C_2(\eta) + C_1(\xi)) e^{\frac{1}{2} \ln \xi} = (C_1(\xi) + C_2(\eta)) \sqrt{\xi}.$$

б) При $\Delta = x^2 y^2 = 0$, т.е. при $x = 0$ или $y = 0$ имеем:

$$-y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

§ 3. Метод характеристик

Нахождение общего решения уравнений

$$1. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x, y) = 1; \quad a_{12}(x, y) = -\sin x; \quad a_{22}(x, y) = -\cos^2 x.$$

Следовательно:

$$\Delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Так как $\Delta = 1 > 0$ — то это уравнение гиперболического типа во всей области определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$dy^2 + 2 \sin x dx dy - \cos^2 x dx^2 = 0,$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \sin x \frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0.$$

Так как $D = 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 4$, то:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \sin x - 2}{2} = -\sin x - 1 \text{ и } \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \sin x + 2}{2} = -\sin x + 1.$$

Следовательно:

$$y = \cos x - x + C_1 \text{ и } y = \cos x + x + C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \cos x - x - y \text{ и } \eta = \cos x + x - y.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (-\sin x - 1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (-\sin x + 1) \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((-\sin x - 1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (-\sin x + 1) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= (-\sin x - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + (-\sin x - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (-\cos x) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\ &+ (-\sin x + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + (-\sin x + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (-\cos x) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ &= (-\sin x - 1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (-\sin x - 1)(-\sin x + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (-\cos x) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\sin x+1)(-\sin x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + (-\sin x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (-\cos x)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \\
& = (\sin^2 x + 2\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\sin^2 x - 2\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \\
& \quad - \cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} - \cos x\frac{\partial u}{\partial \eta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\
&= (\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\sin x - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + (\sin x - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\
&= (\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sin x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\sin x - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получаем:

$$\begin{aligned}
& (\sin^2 x + 2\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\sin^2 x - 2\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \\
& - \cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} - \cos x\frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\sin x(\sin x + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \\
& \quad - 2\sin x(\sin x - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \\
& - 2\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \cos x\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

или

$$(-2 - 2\cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = C_1(\xi); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = C_2(\eta). \end{aligned}$$

Следовательно:

$$U(\xi; \eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

или

$$U(x; y) = C_1(\cos x - x - y) + C_2(\cos x + x - y).$$

Таким образом:

$$U(x; y) = \varphi(\cos x - x - y) + \psi(\cos x + x - y),$$

где φ и ψ произвольные функции.

$$2. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = x^2; \quad a_{12}(x; y) = 0; \quad a_{22}(x; y) = -y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = x^2 y^2.$$

а) При $\Delta = x^2 y^2 > 0$, т.е. при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ — уравнение гиперболического типа.

б) При $\Delta = x^2 y^2 = 0$, т.е. при $x = 0$ или $y = 0$ — уравнение параболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y^2,$$

или

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right) = \mp y.$$

а) При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ — имеем:

$$-\ln|y| = \ln|x| + C_1 \text{ и } \ln|y| = \ln|x| + C_2$$

или

$$\ln|xy| = C_1 \text{ и } \ln \left| \frac{y}{x} \right| = C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\
&= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\
&= x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
&= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
y^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} - y^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \\
- \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2xy \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{2y}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

или

$$-4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2xy \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Учитывая, что

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x},$$

получим:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Итак:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 &\Rightarrow 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2\eta} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2\eta} = C_2(\eta) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = C_2(\eta) - \frac{1}{2\eta} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = C_2(\eta) - \frac{1}{2\eta}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$U(\xi; \eta) = \int C_2(\eta) d\eta - \int \frac{1}{2\eta} d\eta + C_1(\xi) = C_1(\xi) + C_2(\eta) - \frac{1}{2} \ln \eta$$

или

$$U(\xi; \eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} C_1(\xi) + C_2(\eta).$$

Учитывая, что

$$\xi = xy \text{ и } \eta = \frac{y}{x},$$

окончательно получаем:

$$U(x; y) = \sqrt{\frac{x}{y}} C_1(xy) + C_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

b) При $x=0$ или $y=0$ имеем уравнения:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, y = 0$$

или

$$-y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, x = 0,$$

которые легко решаются.

$$3. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = x^2; \quad a_{12}(x; y) = -xy; \quad a_{22}(x; y) = y^2.$$

Следовательно:

$$\Delta = x^2 y^2 - x^2 y^2.$$

Так как $\Delta = 0$ то уравнение является уравнением параболического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$x^2 dy^2 + 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0,$$

или

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Так как

$$D = 4x^2 y^2 - 4x^2 y^2 = 0,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = xy \quad \text{и} \quad \eta = x.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = \\ &= xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \\ &= x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\begin{aligned} x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2xy \frac{\partial u}{\partial \xi} + \\ x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + xy \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta} + xy \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

или

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + x \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

или

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Учитывая, что $\xi = xy$ и $\eta = x$, получаем:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Итак:

$$\begin{aligned}\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = C_2(\xi) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{C_2(\xi)}{\eta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(\xi, \eta) = C_2(\xi) \ln \eta + C_1(\xi).\end{aligned}$$

Учитывая замену $\xi = xy$ и $\eta = x$, получаем:

$$\mathcal{U}(x; y) = \varphi(xy) \ln x + \psi(xy).$$

4.
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Введем новую функцию:

$$v = ux.$$

Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем:

$$a_{11}(x; y) = 1; a_{12}(x; y) = 0; a_{22}(x; y) = -1.$$

Так как $\Delta = 1 > 0$ — то уравнение является уравнением гиперболического типа в области своего определения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$$

или

$$dy^2 - dx^2 = 0.$$

Итак:

$$y^2 - dx^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \mp 1 \Rightarrow y = x + C_1 \text{ и } y = -x + C_2.$$

Введем новые переменные:

$$\xi = y - x \text{ и } \eta = y + x.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \\ &= -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$$

или

$$-4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Следовательно, имеем:

$$v(\xi; \eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

или

$$v(x; y) = C_1(y - x) + C_2(y + x),$$

или

$$xu(x; y) = \varphi(y - x) + \psi(y + x),$$

или

$$u(x; y) = \frac{\varphi(y - x) + \psi(y + x)}{x}.$$

5. $(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + xuy = 0.$

Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

а также его общее решение.

7. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0.$$

8. Найти решение уравнения

$$4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 - y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1 + y^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

9. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=\sin x} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\sin x} = \varphi_1(x).$$

10. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = f_2(x).$$

11. Найти решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{y=1} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = \varphi_1(x).$$

§ 4. Метод разделения переменных

Уравнения гиперболического типа

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Краевые условия:

$$U(0; t) = 0 \text{ и } U(\ell; t) = 0.$$

Начальные условия:

$$\varphi(x) = U(x; 0) = \frac{16}{5}k \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] \text{ и } \psi(x) = U_t(x; 0) = 0.$$

Решение уравнения будем искать в виде:

$$U(x; t) = X(x)T(t).$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$X T'' = X'' T$$

или

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda = \text{const.}$$

Из последнего уравнения имеем:

$$\frac{X''}{X} = \lambda \text{ или } X'' = \lambda X$$

и

$$\frac{T''}{T} = \lambda \text{ или } T'' = \lambda T.$$

Из начальных условий $U(0; t) = 0$ и $U(\ell; t) = 0$ имеем:

$$X(0) = 0 \text{ и } X(\ell) = 0.$$

Таким образом, нам надо найти ненулевое решение задачи:

$$\begin{aligned} X'' &= \lambda X \\ X(0) &= 0 \text{ и } X(\ell) = 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение уравнения $X'' - \lambda X = 0$ имеет вид:

$$k^2 - \lambda = 0.$$

При $\lambda > 0$ имеем:

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Используя начальные условия, получаем:

$$C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Следовательно, $X(x) = 0$ тождественно.

При $\lambda = 0$ имеем:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Используя начальные условия, получаем:

$$C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Следовательно, $X(x) = 0$ тождественно.

При $\lambda < 0$ имеем:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x.$$

Используя начальные условия, получим:

$$C_1 = 0.$$

Следовательно:

$$X(x) = C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x.$$

Используя начальные условия, получим:

$$C_2 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0.$$

Следовательно, так как ищем ненулевое решение, имеем:

$$\sin \sqrt{-\lambda} \ell = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \ell = \pi n \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{\pi n}{\ell} \Rightarrow -\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} \Rightarrow \lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}.$$

Таким образом, получили:

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из уравнения

$$\frac{T''}{T} = -\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$$

имеем:

$$T'' + \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} T = 0$$

или

$$T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, получили:

$$U_n(x; t) = \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или, в силу линейности данного уравнения:

$$U(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Так как

$$U'_t(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \cdot \frac{\pi n}{\ell} + b_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t \cdot \frac{\pi n}{\ell} \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x,$$

то из условия $\psi(x) = U_t(x; 0) = 0$ получаем: $b_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно:

$$U(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Так как

$$U(x;0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \frac{16}{5} k \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right],$$

то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{16}{5} k \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \\ &= -\frac{32k}{5\ell} \frac{\ell}{\pi n} \int_0^{\ell} \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] d \cos \frac{\pi n}{\ell} x = \\ &= -\frac{32k}{5\pi n} \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] \cos \frac{\pi n}{\ell} x \Big|_0^{\ell} + \frac{32k}{5\pi n} \frac{\ell}{\pi n} \int_0^{\ell} \left[4 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 - 6 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + 1 \right] d \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \\ &= \frac{32k}{5\pi^2 n^2} \frac{\ell}{\pi n} \int_0^{\ell} \left[12 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - 12 \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] d \cos \frac{\pi n}{\ell} x = \\ &= \frac{32k}{5\pi^3 n^3} \left[12 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - 12 \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] \cos \frac{\pi n}{\ell} x \Big|_0^{\ell} - \frac{32k}{5\pi^2 n^2} \frac{\ell}{\pi} \int_0^{\ell} \left[24 \left(\frac{x}{\ell} \right) - 12 \right] \frac{1}{x} d \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \\ &= -\frac{32k}{5\pi^4 n^4} \left[24 \left(\frac{x}{\ell} \right) - 12 \right] \sin \frac{\pi n}{\ell} x \Big|_0^{\ell} + \frac{32k}{5\pi^4 n^4} \int_0^{\ell} 24 \left(\frac{1}{\ell} \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} dx = \\ &= -\frac{768}{5\pi^5 n^5} \cos \frac{\pi n}{\ell} x \Big|_0^{\ell} = \frac{768}{5\pi^5 n^5} (1 - \cos \pi n) = \frac{768}{5\pi^5 n^5} (1 - \cos \pi n) = \frac{1536}{5\pi^5 (2n+1)^5}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$U(x;t) = \frac{1536}{5\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)a\pi}{\ell} t \sin \frac{(2n+1)\pi}{\ell} x}{(2n+1)^5}.$$

Уравнения параболического типа

2. Задано уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

Начальное условие:

$$U(x; 0) = \varphi(x), \quad x \in [0; \ell].$$

Краевые условия:

$$U(0; t) = 0, \quad U(\ell; t) = 0, \quad t > 0.$$

Общее решение задачи задается формулой:

$$U(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{-\pi^2 n^2 a^2}{\ell^2} t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x,$$

где

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности на бесконечности.

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

Начальное условие:

$$U(x; 0) = x^2, \quad x \in (0; 1].$$

Краевые условия:

$$U(0;t) = 0, U(1;t) = 1, t \geq 0.$$

Для решения этой задачи рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\tilde{U}(x;t) = U(x;t) - x.$$

Тогда функция $\tilde{U}(x;t)$ является решением задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, t > 0 \\ \tilde{U}(x;0) &= x^2 - x, \quad x \in (0;1] \\ \tilde{U}(0;t) &= 0, \quad \tilde{U}(1;t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда согласно формуле выше имеем:

$$\tilde{U}(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

где

$$C_n = 2 \int_0^1 (x^2 - x) \sin \pi n x \, dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k \\ \frac{-8}{\pi^3 n^3}, & \text{при } n = 2k + 1 \end{cases},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Следовательно:

$$\tilde{U}(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin \pi (2k-1)x,$$

т.е.

$$U(x;t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} e^{-\pi^2(2k-1)^2 t} \sin \pi(2k-1)x + x.$$

Итого:

$$\begin{aligned} |U(x;t) - x| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} e^{-\pi^2(2k-1)^2 t} \sin \pi(2k-1)x \right| \leq \\ &\leq e^{-\pi^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} = C e^{-\pi^2 t}, \end{aligned}$$

где:

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} \text{ — сумма сходящегося ряда.}$$

Таким образом

$$|U(x;t) - x| \leq C e^{-\pi^2 t}.$$

Из последнего неравенства следует, что:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x;t) = x,$$

т.е. решение $U(x;t)$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно стремится к функции $V(x;t) = x$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

§ 1. Типы уравнений с частными производными

1. $\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \sin 2x \right), \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \sin 2x \right) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — область гиперболичности.
2. $\Delta = \frac{25}{4} - 2(x + y)$.
 - a) $y < \frac{25}{8} - x$ — область гиперболичности.
 - b) $y = \frac{25}{8} - x$ — область параболичности.
 - c) $y > \frac{25}{8} - x$ — область эллиптичности.
3. $\Delta = \frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{9}{4}y^2$ — область гиперболичности.
4. $\Delta = 2\cos^2 y - \sin^2 x$.
 - a) $2\cos^2 y > \sin^2 x$ — область гиперболичности.
 - b) $2\cos^2 y = \sin^2 x$ — область параболичности.
 - c) $2\cos^2 y < \sin^2 x$ — область эллиптичности.
5. $\Delta = \cos^2 y (\sin^2 y - 1)$.
 - a) $\cos^2 y (\sin^2 y - 1) > 0$ — область гиперболичности.
 - b) $\cos^2 y = 0, \sin^2 y = 1$ — область параболичности.
 - c) $\cos^2 y (\sin^2 y - 1) < 0$ — область эллиптичности.
6. $\Delta = 9x^2 - xy$.
 - a) $y < 9x$ — область гиперболичности.
 - b) $y = 9x$ — область параболичности.

с) $y > 9x$ — область эллиптичности.

7. $\Delta = -\frac{3}{4}\cos^2 x$.

а) $-\frac{3}{4}\cos^2 x < 0$ — область гиперболичности.

б) $-\frac{3}{4}\cos^2 x = 0$ — область параболичности.

с) $-\frac{3}{4}\cos^2 x > 0$ — область эллиптичности.

8. $\Delta = \cos 2x$.

а) $\cos 2x > 0$ — область гиперболичности.

б) $\cos 2x = 0$ — область параболичности.

9. $\Delta = 2a^2 - 1$.

а) $2a^2 - 1 < 0$ — область гиперболичности.

б) $2a^2 - 1 = 0, a = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$ — область параболичности.

с) $2a^2 - 1 > 0$ — область эллиптичности.

10. $\Delta = a(a+2)$.

а) $a(a+2) < 0$ — область гиперболичности.

б) $a(a+2) = 0, a = 0, a = -2$ — область параболичности.

с) $a(a+2) > 0$ — область эллиптичности.

11. $\Delta = \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1)$.

а) $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0, \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = 1$ — область параболичности.

б) $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) > 0$ — область эллиптичности.

12. $\Delta = -12, -12 < 0$ — область эллиптичности.

**§ 2. Приведение к каноническому виду уравнений
с частными производными в случае двух независимых
переменных**

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \xi = x + y, \zeta = 3x - y.$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \xi = 2x - y, \zeta = x.$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} + cu = 0, \xi = x + y, \zeta = y.$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\xi - \zeta}{32} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 0, \xi = 2x + \sin x + y, \zeta = 2x - \sin x - y.$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\xi - \zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \xi = x^2 - y^2, \zeta = x^2.$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{2\xi}{\zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \xi = y \sin x, \zeta = y.$
7. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{3\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \xi = x, \zeta = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}, y > 0$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{1}{6(\xi - \zeta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 0, \xi = x - \frac{2}{3} (-y)^{\frac{3}{2}}, \zeta = x + \frac{2}{3} (-y)^{\frac{3}{2}}, y < 0.$
8. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{4\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + u = 0, \xi = xy, \zeta = \frac{x^2}{y}.$
9. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \zeta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$
10. $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \zeta = y.$
11. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\alpha - 1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 0, \xi = x - 2\sqrt{-y}, \zeta = x + 2\sqrt{-y}, y < 0.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{2\alpha - 1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad \xi = x, \quad \zeta = 2\sqrt{y}, \quad y > 0.$$

§ 3. Метод характеристик

1. $U(x; y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x)$.
2. $U(x; y) = \sqrt{\frac{x}{y}} \varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.
3. $U(x; y) = \varphi(xy) \ln x + \psi(xy)$.
4. $U(x; y) = \frac{\varphi(x - y) + \psi(x + y)}{x}$. Указание: ввести новую функцию \mathcal{V} , положив $\mathcal{V} = xi$.
5. $U(x; y) = \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{x - y}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — произвольная функция. Указание: ввести новую функцию v , положив $\mathcal{V} = (x - y)u$.
6. $U(x; y) = \ell^{\frac{x^2 + y^2}{2}} (\varphi(x) + \psi(y))$.
7. В области $1 - x^2 + y^2 > 0$ уравнения принадлежит гиперболическому типу, в области $1 - x^2 + y^2 < 0$ — эллиптическому типу. Кривая $x^2 - y^2 = 1$ — является линией параболы.

$$U(x; y) = \varphi\left(\frac{y + \sqrt{1 - x^2 + y^2}}{1 + x}\right) + \psi\left(\frac{y - \sqrt{1 - x^2 + y^2}}{1 + x}\right)$$
8. $U(x; y) = 3x^2 + y^2$. Указание: следует воспользоваться общим решением $U(x; y) = \varphi(x + y) + \psi(3x - y)$ данного уравнения.
9. $U(x; y) = \varphi_0\left(x - \frac{2}{3}y^3\right) + \frac{1}{2} \int_{x - \frac{2}{3}y^3}^{x + 2y} \varphi_1(x) dx$

$$10. \mathcal{U}(x; y) = \frac{\varphi_0(x - \sin x + y) + \varphi_0(x + \sin x - y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x + \sin x - y}^{x - \sin x + y} \varphi_1(z) dz$$

$$11. \mathcal{U}(x; y) = f_1(x + y) + \frac{5}{6} \ell^{-\frac{x+y}{6}} \left\{ \int_{x+y}^{\frac{x-y}{5}} \ell^{\frac{z}{6}} f'_1(z) dz - \int_{x+y}^{\frac{x-y}{5}} \ell^{\frac{z}{6}} f'_2(z) dz \right\}.$$

$$12. \mathcal{U}(x; y) = \frac{3}{4} \varphi_0(x \sqrt[3]{y}) + \frac{1}{4} y \varphi_0\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{16} \sqrt[4]{x^3 y} \int_{x \sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}} \varphi_0(x) x^{-\frac{7}{4}} dx$$

$$-\frac{3}{4} \sqrt[4]{x^3 y} \int_{x \sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}} \varphi_1(x) \left(-x^{-\frac{7}{4}}\right) dx.$$

§ 4. Метод разделения переменных

$$1. \mathcal{U}(x; t) = \frac{1536}{5\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell}}{(2n+1)^5}.$$

$$2. \mathcal{U}(x; t) = \frac{32k}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell}}{(2n+1)^3}.$$

$$3. \mathcal{U}(x; t) = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi\alpha t}{2\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}.$$

$$4. \mathcal{U}(x; t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2(2k-1)^2 t} \sin \pi(2k-1)x + x.$$

$$5. \mathcal{U}(x; t) = \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \ell^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{\ell^2} t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$$

$$6. \mathcal{U}(x;t) = \frac{5C}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \ell^{\frac{-(1n+1)^2 \pi^2 a^2}{\ell^2} t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell}.$$

$$7. \mathcal{U}(x;y) = \mathcal{A}t \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{\ell^2 \mathcal{A}}{6a^2} \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] + \frac{2\ell^2 \mathcal{A}}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell^{\frac{-\pi^2 a^2 n^2}{\ell^2} t}}{n^3} \sin \frac{\pi x n}{\ell}$$

Решение следует искать в виде суммы $\mathcal{U}(x;t) = \mathcal{U}_1(x;t) + \mathcal{U}_2(x;t)$, где $\mathcal{U}_1(x;t)$ есть решение уравнения $\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям $\mathcal{U}_1(0;t) = \mathcal{A}t$, $\mathcal{U}_1(\ell;t) = 0$, а $\mathcal{U}_2(x;t)$ есть решение того же уравнения при условиях $\mathcal{U}_2(0;t) = 0$, $\mathcal{U}_2(\ell;t) = 0$, $\mathcal{U}_2(x;0) = -\mathcal{U}_1(x;0)$.

$$8. \mathcal{U}(x;y) = \frac{4\mathcal{U}_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1) \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

$$9. \mathcal{U}(x;y) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ell^{\frac{-\pi n}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}.$$

$$10. \mathcal{U}(r;0) = \frac{8A}{3} \operatorname{sh} \ln r \sin \theta. \text{ Указание: ввести полярные координаты.}$$

$$11. \mathcal{U}(x;y) = A + \frac{A(b-2)}{2a} x - \frac{4Ab}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{b}} \cos \frac{(2k+1)\pi a}{b}.$$

$$12. \mathcal{U}(\rho;\varphi) = \frac{2A\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{\pi n}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi n \varphi}{\lambda}}{n}.$$

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
3. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е. – М.: ГИТТЛ, 1966. – 444 с.
4. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ГИТТЛ, 1953.
5. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Гос. изд. ф.-м. литературы, 1962. – 767 с.
6. *Нуцубидзе Д.В., Каленова А.А.* Уравнения в частных производных: учебно-методическое пособие. – М.: МГТЭИ, 2011. – 48 стр.

Содержание

Введение	3
Основные сведения из теории линейных уравнений в частных производных	
§ 1. Типы линейных уравнений с частными производными второго порядка	4
§ 2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка	6
§ 3. Метод характеристик	10
§ 4. Метод разделения переменных	12
Решение типовых задач	
§ 1. Типы линейных уравнений с частными производными второго порядка	15
§ 2. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка	19
§ 3. Метод характеристик	51
§ 4. Метод разделения переменных	63
Ответы к заданиям для самостоятельного решения	
§ 1. Типы уравнений с частными производными	71
§ 2. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными в случае двух независимых переменных	73
§ 3. Метод характеристик	74
§ 4. Метод разделения переменных	75
Литература	77

Учебное издание

Давид Вахтангович **Нуцубидзе**,
Наталья Васильевна **Труб**,
Андрей Владимирович **Агапчев**,
Анастасия Николаевна **Колесникова**

Сборник задач по уравнениям в частных производных

Ответственный редактор
Технический редактор
Редактор/корректор
Компьютерная верстка

С.А. Бобко
К.А. Антонов
Ю.Ф. Кравчинская
К.А. Антонов

Подписано в печать 30.01.2018. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 5.

Тираж 46 экз. Заказ № 7.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.

Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии СтР.