

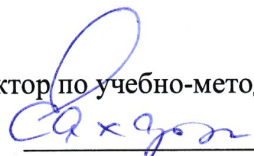
Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Богдалова Елена Вячеславовна  
Должность: Проректор по образовательной деятельности  
Дата подписания: 23.09.2025 10:30:15  
Уникальный программный ключ:  
ec85dd5a839619d48ea76b2d23dba88a9c82091a

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ИНКЛЮЗИВНОГО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО ЭКОНОМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методической работе



Е.С. Сахарчук

«27» 04 2022 г.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Уравнение в частных производных

наименование дисциплины

01.03.02 «Прикладная математика и информатика  
шифр и наименование направления подготовки

вычислительная математика и информационные технологии

направленность (профиль)

Москва 2022

Разработчик:

МГГЭУ, доцент кафедры прикладной математики  
место работы, занимаемая должность

27.03.22 Нуцубидзе Д.В. 19.03 2022 г.  
подпись Ф.И.О. Дата

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры

прикладной математики

(протокол № 4 от «24» 03 2022 г.)

на заседании Учебно-методического совета МГГЭУ

(протокол № 1 от «27» 03 2022 г.)

Согласовано:

Представитель работодателя  
или объединения работодателей

Васильев Е.В. / Васильев Е.В. /  
научный сотрудник, ФГБУ ГНЦ Федеральный медицинский биофизический центр имени  
А.И. Бурназяна ФМБА России

(должность, место работы)

«24» 03 2022 г.

Начальник учебно-методического управления

И.Г. Дмитриева  
«24» 03 2022 г.

Начальник методического отдела

Д.Е. Гапеев  
«27» 03 2022 г.

Декан факультета

Е.В. Петрунина  
«24» 03 2022 г.

## Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств.....
2. Перечень оценочных средств.....
3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций.....
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.....
5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации.....

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине «Уравнения в частных производных».

Оценочные средства составляются в соответствии с рабочей программой дисциплины и представляют собой совокупность контрольно-измерительных материалов ( типовые задачи (задания), контрольные работы, тесты и др.), предназначенных для измерения уровня достижения обучающимися установленных результатов обучения.

Оценочные средства используются при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Таблица 1 - Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения дисциплины

| Код компетенции | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-1           | Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|                 | ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.<br>ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.<br>ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.                                                                                                                                                                                                                                                     |
| ОПК-3           | Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                 | ОПК-3.1. Знает основы теории систем и системного анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимизации и исследования операций, нечетких вычислений, математического и имитационного моделирования.<br>ОПК-3.2. Умеет применять методы теории систем и системного анализа, математического, статистического и имитационного моделирования для автоматизации задач принятия решений в области профессиональной деятельности.<br>ОПК-3.3. Владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий. |
| ПК-2            | Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                 | ПК-2.1. Знает основные теоремы и формулы математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, теоретических основ информатики, численных методов, функционального анализа.<br>ПК-2.2. Умеет применять основные теоремы и формулы математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, теоретических основ информатики, численных методов.<br>ПК-2.3. Владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.                                                         |

Конечными результатами освоения дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках контактной работы, включающей различные виды занятий и самостоятельной работы, с применением различных форм и методов обучения (табл. 2).

Таблица 2 - Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины:

| Код компетенции | Уровень освоения компетенций | Индикаторы достижения компетенций                                                                                                              | Вид учебных занятий <sup>1</sup> , работы, формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенций <sup>2</sup> | Контролируемые разделы и темы дисциплины <sup>3</sup>                                                                                                                                                  | Оценочные средства, используемые для оценки уровня сформированности компетенции <sup>4</sup> |
|-----------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК – 1         |                              | Знает                                                                                                                                          |                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                              |
|                 | Недостаточный уровень        | ОПК-1.1. Студент не способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале дисциплины.<br>Не знает основ математики, физики. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                  | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                |
|                 | Базовый уровень              | ОПК-1.1. Студент усвоил основное содержание материала дисциплины, но имеет несистематизированные знания основ математики, физики.              | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                  | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                |
|                 | Средний уровень              | ОПК-1.1. Студент способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале.<br>Знает основы математики,                         | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                  | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа                                                                                  | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                |

<sup>1</sup> Лекционные занятия, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа...

<sup>2</sup> Необходимо указать активные и интерактивные методы обучения (например, интерактивная лекция, работа в малых группах, методы мозгового штурма и т.д.), способствующие развитию у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств.

<sup>3</sup> Наименование темы (раздела) берется из рабочей программы дисциплины.

<sup>4</sup> Оценочное средство должно выбираться с учетом запланированных результатов освоения дисциплины, например:

«Знать» – собеседование, коллоквиум, тест...

«Уметь», «Владеть» – индивидуальный или групповой проект, кейс-задача, деловая (ролевая) игра, портфолио.

|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                                                               |  |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--|
|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                    | физики.<br>Испытывает незначительные затруднения в решении задач.                                                  |                                                                                                                                                                                                        | Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей |  |
| Высокий уровень | ОПК-1.1. Студент знает, понимает, выделяет главные положения в изученном материале и способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук.<br>Знает основы математики, физики.                                       | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                 |  |
|                 | Умеет                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                                                               |  |
| Базовый уровень | ОПК-1.2. Студент испытывает затруднения при решении стандартных профессиональных задачи с применением естественнонаучных и инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.<br>Имеет несистематизированные знания основных разделов дисциплины. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                 |  |
| Средний уровень | ОПК-1.2. Студент умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования, но допускает незначительные ошибки.                                                       | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                 |  |
| Высокий уровень | ОПК-1.2. Студент на высоком уровне умеет решать стандартные профессиональные                                                                                                                                                                                       | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся,                                             | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.                                                                                                                              | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                 |  |

|       |                 |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|-------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
|       |                 | задачи с применением естественнонаучных и инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования. Показывает глубокое знание и понимание основных теорем и формул изученной дисциплины. | подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                        | Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей                                                                              |                                               |
|       |                 | Владеет                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|       | Базовый уровень | ОПК-1.3. Студент на базовом уровне владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.                                                        | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|       | Средний уровень | ОПК-1.3. Студент на среднем уровне владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.                                                        | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|       | Высокий уровень | ОПК-1.3. Студент на высоком уровне владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.                                                        | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
| ОПК-3 |                 | Знает                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|       | Недостаточный   | ОПК-3.1. Студент не способен                                                                                                                                                                        | Лекционные и практические                                                                                          | Раздел 1. Основные понятия.                                                                                                                                                                            | Текущий контроль –                            |

|  |                 |                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|--|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
|  | уровень         | применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности. Не знает основ дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных                         | занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                           | Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей                                | опрос, контрольная работа.                    |
|  | Базовый уровень | ОПК-3.1. Студент имеет несистематизированные знания основ дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.                                                                                         | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|  | Средний уровень | ОПК-3.1. Студент усвоил основные содержания дисциплины. Знает основы дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.                                                                              | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|  | Высокий уровень | ОПК-3.1. Студент способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности. Знает основы дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|  |                 | Умеет                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|  | Базовый уровень | ОПК-3.2. Студент имеет затруднения при применении                                                                                                                                                               | Лекционные и практические занятия, самостоятельная                                                                 | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения                                                                                                                                                     | Текущий контроль – опрос, контрольная         |



|                 |                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                     |         |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
|                 |                                                                                                                                                                                    | основных способы и методов дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.                           | работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                                                                                        | гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | работа. |
| Средний уровень | ОПК-3.2. Студент умеет применять основные способы и методы дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, но допускает незначительные ошибки.                       | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                                                       |         |
| Высокий уровень | ОПК-3.2. Студент на высоком уровне умеет применять основные способы и методы дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.                                         | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                                                       |         |
|                 | Владеет                                                                                                                                                                            |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                     |         |
| Базовый уровень | ОПК-3.3. Студент на базовом уровне владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                                                       |         |
| Средний уровень | ОПК-3.3. Студент на среднем уровне владеет навыками проведения инженерных                                                                                                          | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся,                                             | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.                                                                                                                              | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                                                       |         |

|      |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
|      |                       | расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий.                                                                                                                                                         | подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                        | Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей                                                                              |                                               |
|      | Высокий уровень       | ОПК-3.3. Студент на высоком уровне владеет навыками проведения инженерных расчетов основных показателей результативности создания и применения информационных систем и технологий.                                                                               | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
| ПК-2 |                       | Знает                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                               |
|      | Недостаточный уровень | ПК-2.1. Студент не способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат. Не знает основных теорем и формул математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|      | Базовый уровень       | ПК-2.1. Студент имеет несистематизированные знания основных теорем и формул математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных.                                                              | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |
|      | Средний уровень       | ПК-2.1. Студент усвоил основное содержание материала дисциплины. Знает основные                                                                                                                                                                                  | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся,                                             | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.                                                                                                                              | Текущий контроль – опрос, контрольная работа. |

|                 |                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                           |  |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                 |                                                                                                                                                                                                                                                              | теоремы и формулы математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. | подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                                                                                                            | Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей |  |
| Высокий уровень | ПК-2.1. Студент способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат. Знает основные теоремы и формулы математического анализа, геометрии, дискретной математики, дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                        | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |
|                 | Умеет                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                           |  |
| Базовый уровень | ПК-2.2. Студент испытывает затруднения при применении основных теорем и формул дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных.                                                                                                                  | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                        | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |
| Средний уровень | ПК-2.2. Студент умеет применять основные теоремы и формулы дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, но допускает незначительные ошибки.                                                                                                  | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                        | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |
| Высокий уровень | ПК-2.2. Студент знает, понимает, выделяет главные положения в изученном материале и способен                                                                                                                                                                 | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся,                                                                    | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.                                                                                                                              | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |

|                 |                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                           |  |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                 |                                                                                                                                                                                         | дать краткую характеристику основным идеям проработанного материала дисциплины.<br>Умеет применять основные теоремы и формулы дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. | подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                                                                                                            | Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей |  |
|                 |                                                                                                                                                                                         | Владеет                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                           |  |
| Базовый уровень | ПК-2.3. Студент на базовом уровне владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                         | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |
| Средний уровень | ПК-2.3. Студент на среднем уровне владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                         | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |
| Высокий уровень | ПК-2.3. Студент на высоком уровне владеет методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности. | Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации                                                                         | Раздел 1. Основные понятия.<br>Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.<br>Раздел 3. Уравнения параболического типа<br>Раздел 4. Уравнения эллиптического типа<br>Раздел 5. Метод конечных разностей | Текущий контроль – опрос, контрольная работа.                                                                             |  |

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Таблица 3

| № | Наименование оценочного средства | Характеристика оценочного средства                                                                                                                                         | Представление оценочного средства в ФОС   |
|---|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1 | Опрос                            | Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися. | Вопросы по темам/разделам дисциплины      |
| 2 | Контрольная работа               | Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу                                                              | Комплект контрольных заданий по вариантам |

### **3. ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ**

Оценивание результатов обучения по дисциплине Алгебра и геометрия осуществляется в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

Предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль (осуществление контроля всех видов аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающегося с целью получения первичной информации о ходе усвоения отдельных элементов содержания дисциплины) и промежуточная аттестация (оценивается уровень и качество подготовки по дисциплине в целом).

Показатели и критерии оценивания компетенций, формируемых в процессе освоения данной дисциплины, описаны в табл. 4.

Таблица 4.

| Код компетенции        | Уровень освоения компетенции                                             | Индикаторы достижения компетенции | Критерии оценивания результатов обучения                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-1<br>ОПК-3<br>ПК-2 |                                                                          | Знает                             |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                        | Недостаточный уровень<br>Оценка<br>«не зачтено»<br>«неудовлетворительно» | ОПК-1.1.<br>ОПК-3.1.<br>ПК-2.1.   | Не знает значительной части материала курса, не способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале дисциплины                                                                                                                                |
|                        | Базовый уровень<br>Оценка<br>«зачтено»<br>«удовлетворительно»            | ОПК-1.1.<br>ОПК-3.1.<br>ПК-2.1.   | Знает не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения в его применении                                                                                                                                                                      |
|                        | Средний уровень<br>Оценка<br>«зачтено»<br>«хорошо»                       | ОПК-1.1.<br>ОПК-3.1.<br>ПК-2.1.   | Знает основную часть материала курса, способен применить изученный материал на практике, испытывает незначительные затруднения в решении задач                                                                                                                     |
|                        | Высокий уровень<br>Оценка<br>«зачтено»<br>«отлично»                      | ОПК-1.1.<br>ОПК-3.1.<br>ПК-2.1.   | Показывает глубокое знание и понимание материала, способен применить изученный материал на практике                                                                                                                                                                |
|                        |                                                                          | Умеет                             |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                        | Базовый уровень                                                          | ОПК-1.2.<br>ОПК-3.2.<br>ПК-2.2.   | Умеет воспроизвести не менее 50 % основного материала курса, однако испытывает затруднения при решении практических задач                                                                                                                                          |
|                        | Средний уровень                                                          | ОПК-1.2.<br>ОПК-3.2.<br>ПК-2.2.   | Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, испытывает незначительные затруднения в решении задач                                                                                                                            |
|                        | Высокий уровень                                                          | ОПК-1.2.<br>ОПК-3.2.<br>ПК-2.2.   | Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением полученных знаний, показывает глубокое знание и понимание материала, способен решить задачу при изменении формулировки                                                                              |
|                        |                                                                          | Владеет                           |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|                        | Базовый уровень                                                          | ОПК-1.3.<br>ОПК-3.3.<br>ПК-2.3.   | Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, усвоил основное содержание материала дисциплины, но имеет пробелы в усвоении материала. Имеет несистематизированные знания основных разделов дисциплины. |
|                        | Средний уровень                                                          | ОПК-1.3.<br>ОПК-3.3.<br>ПК-2.3.   | Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, способен самостоятельно выделять главные положения в изученном материале. Испытывает незначительные затруднения в решении задач.                         |

|  |                 |                                 |                                                                                                                                                |
|--|-----------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | Высокий уровень | ОПК-1.3.<br>ОПК-3.3.<br>ПК-2.3. | <i>Свободно владеет навыками теоретического и экспериментального исследования, показывает глубокое знание и понимание изученного материала</i> |
|--|-----------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



#### **4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения**

##### **Задания в форме опроса:**

Опрос используется для текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине в качестве проверки результатов освоения терминологии. Каждому студенту выдается свой собственный, узко сформулированный вопрос. Ответ должен быть четким и кратким, содержащим все основные характеристики описываемого понятия, института, категории.

##### **Контрольная работа**

Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу

#### **5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации**

##### **Задания в форме устного опроса:**

###### **Раздел 1. Основные понятия.**

- 1 Основные понятия уравнений в частных производных.
- 2 Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка.
- 3 Приведение линейного уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду.

###### **Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.**

- 1 Уравнение малых поперечных колебаний струны.
- 2 Понятие о начальных и граничных условиях.
- 3 Теорема единственности решения.
- 4 Формула Даламбера для неограниченной прямой.
- 5 Формула Даламбера для полуограниченной прямой.
- 6 Формула Даламбера для отрезка.
- 7 Метод разделения переменных.
- 8 Метод Фурье – для уравнения колебания струны.

###### **Раздел 3. Уравнения параболического типа.**

1. Уравнение теплопроводности.
2. Краевые задачи для уравнения теплопроводности.
3. Единственность решения задачи Дирихле.
4. Единственность решения задачи Неймана.
5. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
6. Единственность решения.
7. Метод разделения переменных – Метод Фурье – для уравнения теплопроводности.
8. Распространение тепла на бесконечной прямой.

#### **Раздел 4. Уравнения эллиптического типа.**

1. Уравнение Лапласа.
2. Уравнение Пуассона.
3. Задача Дирихле.
4. Задача Неймана.
5. Гармонические функции и аналитические функции комплексной переменной.
6. Уравнение Лапласа в полярных координатах.
7. Фундаментальное решение уравнения Лапласа ( $n=2$ ;  $n=3$ ).
8. Формулы Грина.
9. Интегральное представление решения для уравнения Лапласа ( $n=2$ ;  $n=3$ ).
10. Некоторые основные свойства гармонических функций.
11. Принцип Максимиума.
12. Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.
13. Интеграл Пуассона.

#### **Раздел 5. Метод конечных разностей.**

1. Основные понятия.
2. Разностные схемы для уравнений теплопроводности.
3. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле.

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

#### **Комплект заданий для контрольной работы по дисциплине «Уравнения математической физики»**

Тема 1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными.  
Приведение к каноническому виду.

Контрольные задания по теме:

Определить тип уравнений. Привести к каноническому виду.

1.  $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - x^2 y = 0$ .
2.  $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u_y = 0$ .
3.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y = 0$ .
4.  $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0$ .
5.  $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$ .
6.  $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0$ .
7.  $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0$ .
8.  $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y + 9(x + y) = 0$ .
9.  $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y = 0$ .
10.  $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$ .
11.  $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0$ .
12.  $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y = 0$ .
13.  $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y = 0$ .
14.  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0$ .
15.  $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$ .
16.  $u_{xx} + u_{xy} - u_y + 4x = 0$ .
17.  $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y + y = 0$ .
18.  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 0$ .
19.  $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y = 0$ .

20.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y = 0$ .
21.  $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + u_y + 2x = 0$ .
22.  $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$ .
23.  $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + 2y = 0$ .
24.  $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + 2x + y = 0$ .
25.  $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y - 4e^x = 0$ .
26.  $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0$ .
27.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_x + 4e^y = 0$ .
28.  $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0$ .
29.  $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2) u_x = 0$ .
30.  $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$ .
31.  $u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2) u_y = 0$ .
32.  $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + x u_x + y u_y = 0$ .
33.  $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2y u_x = 0$ .
34.  $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$ .
35.  $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} - x u = 0$ .
36.  $u_{xx} - 2x u_{xy} = 0$ .
37.  $u_{xx} + 2\sin x \cdot u_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x) u_{yy} + \cos x \cdot u_y = 0$ .
38.  $u_{xx} - 2\cos x \cdot u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2) u_y = 0$ .
39.  $(e^{-2x}) u_{xx} - (e^{-2y}) u_{yy} - (e^{-2x}) u_x + (e^{-2y}) u_y + 8e^y = 0$ .
40.  $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - 1 + y^2 (2u_x - u_y) = 0$ .
41.  $u_{xx} + 2\cos x \cdot u_{xy} - \sin^2 x \cdot u_{yy} - \sin x \cdot u_y = 0$ .
42.  $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$ .
43.  $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - (3 + \cos^2 x) u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$ .
44.  $\operatorname{tg}^2 x u_{xx} - 2y \operatorname{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg}^3 x u_x = 0$ .
45.  $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2x u_x + 4y u_y + 16x^2 u = 0$ .
46.  $x u_{xx} + 2x u_{xy} + (x - 1) u_{yy} = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области эллиптичности.
47.  $x u_{xx} + y u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области эллиптичности.
48.  $u_{xx} + x u_{yy} = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области эллиптичности.
49.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области эллиптичности.
50.  $u_{xx} + y u_{yy} + 2u_y = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области эллиптичности.
51.  $u_{xx} + x u_{yy} = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области эллиптичности.
52.  $(1 - x^2) u_{xx} - 2x u_{xy} + (1 - y^2) u_{yy} - 2x u_x - 2y u_y = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области параболичности,  
 в) в области эллиптичности.
53.  $(1 - x^2) u_{xx} - 2x u_{xy} - (1 + y^2) u_{yy} - 2x u_x - 2y u_y = 0$ ,  
 а) в области гиперболичности,      б) в области параболичности,  
 в) в области эллиптичности.

Тема 2. Метод разделения переменных для одномерного волнового уравнения.

Контрольные задания по теме:

Задание 1. Используя метод разделения переменных, найти решение однородного волнового уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$  при следующих граничных и начальных условиях:

1.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \sin \pi x + \sin 3\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ .
2.  $u_x(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 1$ .
3.  $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \sin 2l x + \sin 3\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ .
4.  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 1$ ,  $u_t(x, 0) = 1$ .
5.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \sin 2\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 1$ .
6.  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 1 + \cos \pi x + \cos 3\pi x$ .
7.  $u_x(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = \cos 2l x + \cos 5\pi x$ .
8.  $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \sin 5\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 1$ .
9.  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = U = \text{const}$ ,  $u_t(x, 0) = V = \text{const}$ .
10.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 1$ .
11.  $u_x(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \cos 3\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 1$ .
12.  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 1$ ,  $u_t(x, 0) = 2 + \cos \pi x$ .
13.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \frac{\sin \pi x}{l}$ ,  $u_t(x, 0) = \frac{\sin \pi x}{l} + \frac{\sin 3\pi x}{l}$ .
14.  $u_x(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \cos 2l x + \cos 3\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = \cos 3\pi x$ .
15.  $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \sin 2l x$ ,  $u_t(x, 0) = \sin 2l x + \sin 3\pi x$ .
16.  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 2 + \frac{\cos \pi x}{l}$ ,  $u_t(x, 0) = 1 + \frac{\cos 2\pi x}{l}$ .
17.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \frac{\sin 2\pi x}{l}$ ,  $u_t(x, 0) = x$ .
18.  $u_x(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = \frac{\cos 3\pi x}{2l} + \frac{\cos 5\pi x}{2l}$ .
19.  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + \cos 2\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = \cos \pi x + \cos 2\pi x$ .
20.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = \frac{\sin 2\pi x}{l} + \frac{\sin 3\pi x}{l}$ ,  $u_t(x, 0) = \frac{\sin 2\pi x}{l}$ .

Задание 2. Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного волнового уравнения:

$$1. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + Ax + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = U_1, \quad u(l, t) = U_2, \\ u(x, 0) = U_1 (1 - l^{-1} x) + U_2 l^{-1} x, \quad ut(x, 0) = 0, \\ \text{a) } A = 2, B = 1, U_1 = 1, U_2 = 0, \\ \text{б) } A = 1, B = 2, U_1 = 0, U_2 = 1, \\ \text{в) } A = 1, B = 0.$$

$$2. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + Ax + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ ux(0, t) = 0, \quad u(l, t) = U, \\ u(x, 0) = U, \quad ut(x, 0) = V, \\ \text{a) } A = 2, B = 1, U = 1, V = 0 \\ \text{б) } A = 3, B = 1, U = 2, V = 1 \\ \text{в) } A = 1, B = 0, U = 1, V = 2.$$

$$3. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + Ax + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = U, \quad ux(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = U, \quad ut(x, 0) = V, \\ \text{a) } A = 2, B = 1, U = 1, V = 0 \\ \text{б) } A = 4, B = 1, U = 2, V = 1 \\ \text{в) } A = 1, B = 0, U = 1, V = 2.$$

$$4. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + Ax + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ ux(0, t) = ux(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = U, \quad ut(x, 0) = V, \\ \text{a) } A = 2, B = 1, U = 1, V = 0 \\ \text{б) } A = 1, B = 1, U = 2, V = 1 \\ \text{в) } A = 1, B = 0, U = 1, V = 2.$$

$$5. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + A \sin x + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = U_1, \quad u(l, t) = U_2, \\ u(x, 0) = U_1 (1 - l^{-1} x) + U_2 l^{-1} x, \quad ut(x, 0) = V, \\ \text{a) } A = 2, B = 1, U_1 = 1, U_2 = 0, \\ \text{б) } A = 1, B = 2, U_1 = 0, U_2 = 1, \\ \text{в) } A = 1, B = 0.$$

$$6. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + A \cos x + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ ux(0, t) = 0, \quad u(l, t) = U, \\ u(x, 0) = U, \quad ut(x, 0) = V, \\ \text{a) } A = 3, B = 1, U = 1, V = 0 \\ \text{б) } A = 1, B = 2, U = 2, V = 3 \\ \text{в) } A = 1, B = 0, U = 1, V = 2.$$

$$7. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + A \sin x + B, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = U, \quad ux(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = U, \quad ut(x, 0) = V, \\ \text{a) } A = 1, B = 3, U = 1, V = 0 \\ \text{б) } A = 2, B = 1, U = 2, V = 1 \\ \text{в) } A = 1, B = 0, U = 1, V = 2.$$

8.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \cos x + B$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = U$ ,  $u_t(x, 0) = V$ ,  
 а)  $A = 3$ ,  $B = 1$ ,  $U = 1$ ,  $V = 0$   
 б)  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $U = 2$ ,  $V = 3$   
 в)  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $U = 1$ ,  $V = 2$ .

9.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B) \sin t + Cx + D$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = U_1(t)$ ,  $u(l, t) = U_2(t)$ ,  
 $u(x, 0) = l^{-1} (U_2(0) - U_1(0))x + U_1(0)$ ,  $u_t(x, 0) = V$ ,  
 а)  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 4$ ,  $D = 3$ ,  $U_1, U_2 = \text{const}$ ,  
 б)  $A = 0$ ,  $B = 2$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$ ,  $U_1 = \sin t$ ,  $U_2 = 1$ ,  
 в)  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $U_1 = \sin t$ ,  $U_2 = \cos t$ ,  
 г)  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$ ,  $U_1 = \sin t$ ,  $U_2 = 2$ ,  
 д)  $A = 0$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$ ,  $U_1 = \cos t$ ,  $U_2 = l \sin t$ .

10.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B) \sin t + Cx + D$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = U(t)$ ,  
 $u(x, 0) = U(0)$ ,  $u_t(x, 0) = V$ ,  
 а)  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 4$ ,  $D = 0$ ,  $U = \text{const}$ ,  
 б)  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$ ,  $U = \sin t$ ,  
 в)  $A = 2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$ ,  $U = \sin t + 1$ ,  
 г)  $A = 4$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ ,  $U = \sin^2 t - 1$ ,  
 д)  $A = 2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $U = \sin^2 t$ .

11.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B) \sin t + Cx + D$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = U(t)$ ,  $u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = U(0)$ ,  $u_t(x, 0) = V$ ,  
 а)  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 3$ ,  $D = 1$ ,  $U = \text{const}$ ,  
 б)  $A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $U = 2 \sin t$ ,  
 в)  $A = 4$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$ ,  $U = 2 \sin t + 1$ ,  
 г)  $A = 3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ ,  $U = \sin^2 t + 1$ ,  
 д)  $A = 2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $U = \sin^2 t$ .

12.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B) \sin t + (Cx + D) \cos 2t$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = V$ ,  
 а)  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  
 б)  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$ ,  
 в)  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 2$ ,  
 г)  $A = 3$ ,  $B = 1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$ ,  
 д)  $A = 2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 1$ .

13.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B) \cos t + C \sin x + D$ ,  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = U_1(t)$ ,  $u(l, t) = U_2(t)$ ,  
 $u(x, 0) = l^{-1} (U_2(0) - U_1(0))x + U_1(0)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  
 а)  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 3$ ,  $D = 0$ ,  $U_1, U_2 = \text{const}$ ,  
 б)  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 4$ ,  $D = 1$ ,  $U_1 = \cos t$ ,  $U_2 = 2$ ,  
 в)  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ ,  $U_1 = \sin t$ ,  $U_2 = \cos t$ ,  
 г)  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$ ,  $U_1 = \cos t$ ,  $U_2 = 1$ ,  
 д)  $A = -1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$ ,  $U_1 = \sin t$ ,  $U_2 = l \cos t$ .

$$14. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + (Ax + B)\cos t + C\sin x + D, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$\text{ux}(0, t) = 0, \text{u}(l, t) = U(t),$$

$$\text{u}(x, 0) = U(0), \text{ut}(x, 0) = 0,$$

а)  $A = 2, B = 1, C = 3, D = 1, U = \text{const},$   
б)  $A = 1, B = 0, C = 4, D = 1, U = \cos t,$   
в)  $A = 3, B = 0, C = 1, D = 0, U = 2\cos t + 1,$   
г)  $A = 2, B = 1, C = 0, D = 0, U = \cos 2t,$   
д)  $A = 2, B = 0, C = 1, D = 0, U = \cos 2t - 1.$

$$15. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + (Ax + B)\cos t + C\cos x + D, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$\text{u}(0, t) = U(t), \text{ux}(l, t) = 0,$$

$$\text{u}(x, 0) = U(0), \text{ut}(x, 0) = 0,$$

а)  $A = 1, B = 1, C = 4, D = 0, U = \text{const},$   
б)  $A = 1, B = 2, C = 2, D = 1, U = \cos t,$   
в)  $A = 1, B = 0, C = 1, D = 0, U = 2\cos t - 1,$   
г)  $A = 3, B = 0, C = 0, D = 1, U = \cos 2t,$   
д)  $A = 0, B = 1, C = 2, D = 0, U = \cos 2t - 1.$

$$16. \text{utt} = a^2 \text{uxx} + (Ax + B)\sin 2t + (Cx + D)\cos t, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$\text{ux}(0, t) = \text{ux}(l, t) = 0,$$

$$\text{u}(x, 0) = 0, \text{ut}(x, 0) = V,$$

а)  $A = 2, B = 1, C = 0, D = 1,$   
б)  $A = 1, B = 2, C = 1, D = 0,$   
в)  $A = 1, B = 0, C = 0, D = 3,$   
г)  $A = 4, B = 1, C = 2, D = 1,$   
д)  $A = 2, B = 0, C = 1, D = 1.$

Примечание. В задачах 9 - 16 предполагается, что частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот струны.

Указание 1. В задачах 1 - 16 рекомендуется искать решение в виде суммы двух функций  $v(x, t)$  и  $w(x, t)$ , где  $v(x, t)$  - частное решение неоднородного волнового уравнения, а  $w(x, t)$  - общее решение однородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

Указание 2. В задачах 1 - 8, когда вынуждающая сила не зависит от переменной  $t$ , частное решение неоднородного волнового уравнения удобно искать как функцию зависящую только от переменной  $x$ . То есть  $v = v(x)$ .

Указание 3. В задачах 9 - 16 для неоднородного дифференциального уравнения вида

$$\text{utt} = a^2 \text{uxx} + F(x) + \Phi(x)\sin \omega t$$

или

$$\text{utt} = a^2 \text{uxx} + F(x) + \Phi(x)\cos \omega t,$$

Частное решение можно искать в виде суммы двух функций  $v_1(x, t)$  и  $v_2(x, t)$ , где  $v_1(x, t)$  -

частное решение неоднородного волнового уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + F(x),$$

а  $v_2(x, t)$  - частное решение неоднородного уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \Phi(x)\sin \omega t,$$

или

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \Phi(x)\cos\omega t.$$

Функцию  $v_1$  удобно искать как функцию зависящую только от переменной  $x$ , а функцию

$$v_2 \text{ можно искать в виде } v_2(x, t) = X(x)\sin\omega t \text{ или } v_2(x, t) = X(x)\cos\omega t.$$

Указание 4. В задачах с ненулевыми граничными условиями часто бывает полезно пред-

варительно представить решение  $u(x, t)$  как сумму двух функций  $v(x, t)$  и  $w(x, t)$ , где функ-

ция  $v(x, t)$  удовлетворяет на границе тем же условиям, что и функция  $u(x, t)$ . Таким образом,

задача сводится к нахождению решения  $w(x, t)$  некоторого волнового уравнения с нулевы-

ми граничными условиями. Функцию  $v(x, t)$  можно искать в виде  $v(x, t) = A(t)x + B(t)$ .

Тема 3. Метод разделения переменных для одномерного уравнения теплопроводности.

Контрольные задания по теме:

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности:

1.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u(0, t) = 1, u(1, t) = 2,$$

$$u(x, 0) = x + 1.$$

2.  $u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u_x(0, t) = 1, u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = x - 1.$$

3.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u(0, t) = 1, u_x(1, t) = 2,$$

$$u(x, 0) = 2x + 1.$$

4.  $u_t = a^2 u_{xx} + x + 1, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x.$$

5.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u_x(0, t) = 2, u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = 2x - 1.$$

6.  $u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x.$$

7.  $u_t = a^2 u_{xx} + t, 0 < x < 1, t > 0,$

$$u(0, t) = 2t, u(1, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x - 3\sin 2\pi x.$$



8.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2xt$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = -1$ ,  $u(1, t) = t$ ,  
 $u(x, 0) = 1 - x - \cos 7\pi x$ .
9.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2t^3$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = 1$ ,  $u_x(1, t) = 2t$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + \sin 5\pi x$ .
10.  $u_t = u_{xx} + t^2 - 1$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 5$ ,  $u_x(1, t) = -1$ ,  
 $u(x, 0) = 2 + 5x - 3x^2$ .
11.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2t^2$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = t$ ,  $u(1, t) = 2t$ ,  
 $u(x, 0) = 2\sin\pi x - \sin 3\pi x$ .
12.  $u_t = a^2 u_{xx} + t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 2t$ ,  $u(1, t) = 1$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + 2\cos 5\pi x$ .
13.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2xt$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = 2t$ ,  $u_x(1, t) = 1$ ,  
 $u(x, 0) = x - 2\sin 3\pi x$ .
14.  $u_t = u_{xx} + 3t - 1$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 2$ ,  $u_x(1, t) = 2$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + 2x - 2\cos 3\pi x$ .
15.  $u_t = a^2 u_{xx} + 3t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = 1$ ,  $u(1, t) = t$ ,  
 $u(x, 0) = 1 - x + \sin 4\pi x$ .
16.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2xt$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 2t$ ,  $u(1, t) = t$ ,  
 $u(x, 0) = 4\cos 3\pi x$ .
17.  $u_t = a^2 u_{xx} + t^2$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = t$ ,  $u_x(1, t) = 2t$ ,  
 $u(x, 0) = 4\sin 9\pi x$ .
18.  $u_t = u_{xx} + 2t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 3$ ,  $u_x(1, t) = 1$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + 3x - x^2$ .
19.  $u_t = a^2 u_{xx} + 2t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u(0, t) = t^2$ ,  $u(1, t) = 1$ ,  
 $u(x, 0) = x - \sin\pi x + 2\sin 5\pi x$ .
20.  $u_t = a^2 u_{xx} + t$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ ,  
 $u_x(0, t) = 2$ ,  $u(1, t) = t^2$ ,

$$u(x, 0) = 2x - 2 + \cos 5\pi x.$$

$$\begin{aligned} 21. \quad & ut = a^2 u_{xx} + x + t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 2t^2, \quad u_x(1, t) = t, \\ & u(x, 0) = \sin \pi x - 3\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \quad & ut = u_{xx} + t - 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 2, \\ & u(x, 0) = 1 + x^2 - \cos 3\pi x + 2\cos 4\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \quad & ut = a^2 u_{xx} - 2x + 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 2t, \quad u(1, t) = t^2, \\ & u(x, 0) = \sin 2\pi x - 2\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \quad & ut = a^2 u_{xx} + tx - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = t^2, \quad u(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = 1 - \cos \pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \quad & ut = a^2 u_{xx} + 5xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = 2t^2, \\ & u(x, 0) = 1 + \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad & ut = u_{xx} + 2t^2 + 3, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 2, \quad u_x(1, t) = 0, \\ & u(x, 0) = 2 + 2x - x^2 - 4\cos 2\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27. \quad & ut = a^2 u_{xx} + 4xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 3, \quad u(1, t) = t^2, \\ & u(x, 0) = 3 - 3x + 2\sin \pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. \quad & ut = a^2 u_{xx} + 4xt + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 2t^2, \quad u(1, t) = t, \\ & u(x, 0) = \cos 5\pi x - \cos 7\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29. \quad & ut = a^2 u_{xx} + 6t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 4t^2, \quad u_x(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = x + 4\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} 30. \quad & ut = u_{xx} + t - 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = 3, \\ & u(x, 0) = 3 + x + x^2 - 2\cos 4\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31. \quad & ut = a^2 u_{xx} - 2x(t - 2), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = t^2, \quad u(1, t) = 4t, \\ & u(x, 0) = 4\sin 3\pi x - 3\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 32. \quad & ut = a^2 u_{xx} + x - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = t, \quad u(1, t) = 2t^2, \\ & u(x, 0) = 2\cos 3\pi x - \cos 9\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 33. \quad & ut = a^2 u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = t^2, \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = 3\sin \pi x - \sin 11\pi x.$$

$$\begin{aligned} 34. \quad & u_t = u_{xx} + 2xt^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = 1 + x - 3\cos 2\pi x + \cos 5\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 35. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + xt^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 2, \quad u(1, t) = t^3, \\ & u(x, 0) = 2 - 2x - \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 6xt^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 2t^3, \quad u(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = 1 + \cos 3\pi x + \cos 7\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 37. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 2t, \quad u_x(1, t) = t^3, \\ & u(x, 0) = \sin 3\pi x - 2\sin 7\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38. \quad & u_t = u_{xx} + t + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = -1, \quad u_x(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = 2 - x + x^2 - 3\cos 4\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 3t^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = t^3, \quad u(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = x - 2\sin \pi x + 3\sin 2\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 3(x - 1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 3t, \quad u(1, t) = 2t^3, \\ & u(x, 0) = \cos \pi x - \cos 3\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 4xt^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 2, \quad u_x(1, t) = 2t^3, \\ & u(x, 0) = 2 - \sin 9\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42. \quad & u_t = u_{xx} + t + 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = -1, \\ & u(x, 0) = 1 + x - x^2 + \cos 2\pi x - \cos 3\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 43. \quad & u_t = a^2 u_{xx} - 3xt^2 + 2x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = t^3, \quad u(1, t) = 2t, \\ & u(x, 0) = 3\sin 2\pi x - \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + t^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 1, \quad u(1, t) = t^3, \\ & u(x, 0) = x - 1 + \cos 7\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 4x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = t^3, \quad u_x(1, t) = 4t, \\ & u(x, 0) = 3\sin \pi x - \sin 7\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 46. \quad & u_t = u_{xx} + t^2 - 3, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 4, \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = 1 + 2x^2 + 3\cos 5\pi x.$$

$$\begin{aligned} 47. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 4(1 - x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 4t, \quad u(1, t) = t^3, \\ & u(x, 0) = \sin 2\pi x - 2\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 3xt^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = t^3, \quad u(1, t) = 2t, \\ & u(x, 0) = 5\cos \pi x - 2\cos 5\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49. \quad & u_t = a^2 u_{xx} + 2t^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u(0, t) = 2t^3, \quad u_x(1, t) = 1, \\ & u(x, 0) = x - 2\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50. \quad & u_t = u_{xx} + 2t - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ & u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = 5, \\ & u(x, 0) = 3 + x + 2x^2 + 2\cos \pi x - \cos 3\pi x. \end{aligned}$$

Указание 1. В задачах 1 - 8, когда источники тепла не зависят от переменной  $t$ , общее решение неоднородного уравнения теплопроводности удобно искать в виде суммы двух функций:  $v(x)$  и  $w(x, t)$ , где  $v(x)$  - частное решение неоднородного уравнения теплопроводности, а  $w(x, t)$  - общее решение однородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

Указание 2. В задачах с ненулевыми граничными условиями часто бывает полезно предварительно представить решение  $u(x, t)$  как сумму двух функций  $v(x, t)$  и  $w(x, t)$ , где функция  $v(x, t)$  удовлетворяет на границе тем же условиям, что и функция  $u(x, t)$ .

Таким образом, задача сводится к нахождению решения  $w(x, t)$  некоторого уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями. Функцию  $v(x, t)$  можно искать в виде

$$v(x, t) = A(t)x + B(t), \text{ либо } v(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x.$$

Тема 4. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в областях с круговыми границами.

Контрольные задания по теме:

Задание 1. Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Пуассона в кольце  $0 < a < \rho < b$ , при  $m = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} 1. \quad & \Delta u(\rho, \phi) = 2, \\ & u(a, \phi) = 0, \quad u(b, \phi) = \cos m\phi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \Delta u(\rho, \phi) = 2, \\ & u(a, \phi) = \sin m\phi, \quad u_\rho(b, \phi) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \Delta u(\rho, \phi) = 2, \\ & u_\rho(a, \phi) = 0, \quad u(b, \phi) = 3\cos 2m\phi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \Delta u(\rho, \phi) = 12\rho^2, \\ & u(a, \phi) = 2\cos m\phi, \quad u(b, \phi) = 0. \end{aligned}$$

$$5. \quad \Delta u(\rho, \phi) = 12\rho^2,$$

$$u(a, \phi) = 0, u_r(b, \phi) = 2\sin 2m\phi.$$

$$6. \Delta u(\rho, \phi) = 12\rho^2, \\ u_r(a, \phi) = \sin(m+1)\phi, u(b, \phi) = 0.$$

$$7. \Delta u(\rho, \phi) = 4 + 12\rho^2, \\ u(a, \phi) = 1 + \sin 3m\phi, u(b, \phi) = 0.$$

$$8. \Delta u(\rho, \phi) = 4 + 12\rho^2, \\ u(a, \phi) = 0, u_r(b, \phi) = 3\cos(m+1)\phi.$$

$$9. \Delta u(\rho, \phi) = 4 + 12\rho^2, \\ u_r(a, \phi) = 1 + 2\cos 3m\phi, u(b, \phi) = 0.$$

$$10. \Delta u(\rho, \phi) = 4 + 12\rho^2, \\ u(a, \phi) = m, u(b, \phi) = 2m.$$

$$11. \Delta u(\rho, \phi) = 4 + 12\rho^2, \\ u(a, \phi) = \cos(m-1)\phi, u_r(b, \phi) = 3\cos 2m\phi.$$

$$12. \Delta u(\rho, \phi) = 4 + 12\rho^2, \\ u_r(a, \phi) = 4\sin 2m\phi, u(b, \phi) = 2\cos(m+1)\phi.$$

$$13. \Delta u(\rho, \phi) = 0, \\ u_r(a, \phi) = 2\sin m\phi + \cos 2m\phi, u_r(b, \phi) = 0.$$

$$14. \Delta u(\rho, \phi) = 0, \\ u_r(a, \phi) = 0, u_r(b, \phi) = 2\cos m\phi - \sin \phi.$$

$$15. \Delta u(\rho, \phi) = 0, \\ u_r(a, \phi) = \sin m\phi, u_r(b, \phi) = 2\cos(m+1)\phi.$$

$$16. \Delta u(\rho, \phi) = 0, \\ u_r(a, \phi) = \cos 2m\phi - \sin \phi, u_r(b, \phi) = 4\sin m\phi.$$

Указание 1. В краевых задачах 1 – 12 для неоднородного уравнения Лапласа (уравнения Пуассона) общее решение удобно искать в виде суммы двух функций:  $v(\rho)$  и  $w(\rho, \phi)$ , где  $v(\rho)$  - частное решение уравнения Пуассона (ищется как функция, зависящая только от  $\rho$ ), а  $w(\rho, \phi)$  - общее решение уравнения Лапласа.

Задание 2. Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения

$\pi$   
Лапласа в кольцевом секторе  $0 < a < \rho < b, 0 < \phi < \alpha$  при  $\alpha = 1, 2, 3, 4$

$$1. \Delta u(\rho, \phi) = 0, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, \\ u(a, \phi) = 3\sin \alpha \phi - \sin 2\alpha \phi, u(b, \phi) = 0.$$

$$2. \Delta u(\rho, \phi) = 0, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, \\ u_r(a, \phi) = 0, u_r(b, \phi) = 2\sin \alpha \phi - 3\sin 4\alpha \phi.$$

$$\begin{aligned} 3. \Delta u(\rho, \phi) &= 0, \\ u(\rho, 0) &= u(\rho, \alpha) = 0, \\ u(a, \phi) &= \sin \alpha \phi, \quad u(b, \phi) = 4 \sin 2 \alpha \phi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \Delta u(\rho, \phi) &= 0, \\ u(\rho, 0) &= u(\rho, \alpha) = 0, \\ u(a, \phi) &= 3 \sin 2 \alpha \phi, \quad u(b, \phi) = 5 \sin \alpha \phi. \end{aligned}$$

Тема 5. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в областях с плоскими границами

Контрольные задания по теме:

Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике  $0 < x < a, 0 < y < b$

$$\begin{aligned} 1. \Delta u(x, y) &= 2, \\ u(0, y) &= 2y^2, \quad u(a, y) = 2y^2 + 2a^2, \\ u(x, 0) &= 2x^2, \quad u(x, b) = 2x^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \Delta u(x, y) &= 4, \\ u(0, y) &= y^2, \quad u(a, y) = y^2 + a^2, \\ u(x, 0) &= x^2, \quad u(x, b) = x^2 + b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \Delta u(x, y) &= 4 + 6x, \\ u(0, y) &= 3y^2, \quad u(a, y) = 3y^2 + a^2 + a^3, \\ u(x, 0) &= x^2 + x^3, \quad u(x, b) = x^2 + x^3 + 3b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \Delta u(x, y) &= 2 + 6y, \\ u(0, y) &= 2y^2 + y^3, \quad u(a, y) = 2y^2 + y^3 + 3a^2, \\ u(x, 0) &= 3x^2, \quad u(x, b) = 3x^2 + 2b^2 + b^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \Delta u(x, y) &= 2 + 12x^2, \\ u(0, y) &= 3y^2, \quad u(a, y) = 3y^2 + 2a^2 + a^4, \\ u(x, 0) &= 2x^2 + x^4, \quad u(x, b) = 2x^2 + x^4 + 3b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \Delta u(x, y) &= 4 + 12y^2, \\ u(0, y) &= y^2 + y^4, \quad u(a, y) = y^2 + y^4 + 3a^2, \\ u(x, 0) &= 3x^2, \quad u(x, b) = 3x^2 + b^2 + b^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \Delta u(x, y) &= 2 + 6x + 12x^2, \\ u(0, y) &= 2y^2, \quad u(a, y) = 2y^2 + 3a^2 + a^3 + a^4, \\ u(x, 0) &= 3x^2 + x^3 + x^4, \quad u(x, b) = 3x^2 + x^3 + x^4 + 2b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \Delta u(x, y) &= 4 + 6y + 12y^2, \\ u(0, y) &= y^2 + y^3 + y^4, \quad u(a, y) = y^2 + y^3 + y^4 + a^2, \\ u(x, 0) &= x^2, \quad u(x, b) = x^2 + b^2 + b^3 + b^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \Delta u(x, y) &= 6 + 6y + 12x^2, \\ u(0, y) &= 2y^2 + y^3, \quad u(a, y) = 2y^2 + y^3 + a^2 + a^4, \\ u(x, 0) &= x^2 + x^4, \quad u(x, b) = x^2 + x^4 + 2b^2 + b^3. \end{aligned}$$

10.  $\Delta u(x, y) = 2 + 6x + 12y^2$ ,  
 $u(0, y) = 3y^2 + y^4$ ,  $u(a, y) = 3y^2 + y^4 + 2a^2 + a^3$ ,  
 $u(x, 0) = 2x^2 + x^3$ ,  $u(x, b) = 2x^2 + x^3 + 3b^2 + b^4$ .
11.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u_x(0, y) = 1$ ,  $u(a, y) = 1 + y + y^2$ ,  
 $u(x, 0) = 1 - 2a + 2x$ ,  $u(x, b) = 1 + b + b^2$ .
12.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u_x(0, y) = y$ ,  $u(a, y) = 1 + 2y + a^2$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + x^2$ ,  $u(x, b) = 1 - a + 2b + x + x^2$ .
13.  $\Delta u(x, y) = 2 + 6y$ ,  
 $u_x(0, y) = 3y$ ,  $u(a, y) = 2 + y + y^2 + y^3$ ,  
 $u(x, 0) = 2 - a + x$ ,  $u(x, b) = 2 + b + b^2 + b^3$ .
14.  $\Delta u(x, y) = 2 + 6x$ ,  
 $u_x(0, y) = 1$ ,  $u(a, y) = 1 + 3y + a^2 + a^3$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + x^2 + x^3$ ,  $u(x, b) = 1 - 3a + 3b + 3x + x^2 + x^3$ .
15.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = 1 - b + y + y^2$ ,  $u(a, y) = 1 + a + y^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 1$ ,  $u(x, b) = 1 + x + b^2$ .
16.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = 1 + y^2$ ,  $u(a, y) = 1 + a - b + y + y^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 2x$ ,  $u(x, b) = 1 + x + b^2$ .
17.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = 1 - 2b + 2y$ ,  $u(a, y) = 1 + a + a^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 1$ ,  $u(x, b) = 1 + x + x^2$ .
18.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = 1$ ,  $u(a, y) = 1 + a + a^2 - b + y$ ,  
 $u_y(x, 0) = x$ ,  $u(x, b) = 1 + x + x^2$ .
19.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = y^2$ ,  $u(a, y) = 1 + y^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 2$ ,  $u_y(x, b) = 2b$ .
20.  $\Delta u(x, y) = 4$ ,  
 $u(0, y) = y + 2y^2$ ,  $u(a, y) = 1 + 2y^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 0$ ,  $u_y(x, b) = 2$ .
21.  $\Delta u(x, y) = 2 + 6y$ ,  
 $u(0, y) = 2y + y^2 + y^3$ ,  $u(a, y) = y^2 + y^3$ ,  
 $u_y(x, 0) = 0$ ,  $u_y(x, b) = 2x + 2b + 3b^2$ .
22.  $\Delta u(x, y) = 4 + 12y^2$ ,  
 $u(0, y) = 2y^2 + y^4$ ,  $u(a, y) = 3y + 2y^2 + y^4$ ,  
 $u_y(x, 0) = 1$ ,  $u_y(x, b) = 4b + 4b^3$ .

23.  $\Delta u(x, y) = 4$ ,  
 $u_x(0, y) = 1$ ,  $u_x(a, y) = 4a$ ,  
 $u(x, 0) = 2x^2$ ,  $u(x, b) = x + 2x^2$ .
24.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u_x(0, y) = 0$ ,  $u_x(a, y) = 3y + 2a$ ,  
 $u(x, 0) = 2x + x^2$ ,  $u(x, b) = x^2$ .
25.  $\Delta u(x, y) = 4 + 6x$ ,  
 $u_x(0, y) = 2$ ,  $u_x(a, y) = 4a + 3a^2$ ,  
 $u(x, 0) = 2x^2 + x^3$ ,  $u(x, b) = 3 + 2x^2 + x^3$ .
26.  $\Delta u(x, y) = 2 + 12x^2$ ,  
 $u_x(0, y) = 0$ ,  $u_x(a, y) = y + 2a + 4a^3$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + x^2 + x^4$ ,  $u(x, b) = x^2 + x^4$ .
27.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = y + y^2$ ,  $u_x(a, y) = 1$ ,  
 $u_y(x, 0) = 0$ ,  $u_y(x, b) = 2b$ .
28.  $\Delta u(x, y) = 4$ ,  
 $u_x(0, y) = 2y$ ,  $u(a, y) = 2a^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 2x^2$ ,  $u_y(x, b) = 1 + 2x^2$ .
29.  $\Delta u(x, y) = 2 + 6y$ ,  
 $u_x(0, y) = 0$ ,  $u_x(a, y) = 1$ ,  
 $u(x, 0) = 3x$ ,  $u_y(x, b) = 2b + 3b^2$ .
30.  $\Delta u(x, y) = 2 + 12x^2$ ,  
 $u_x(0, y) = 0$ ,  $u_x(a, y) = 2a + 4a^3$ ,  
 $u_y(x, 0) = 2x$ ,  $u(x, b) = 1 + x^2 + x^4$ .
31.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u_x(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = y + a^2$ ,  
 $u_y(x, 0) = 1$ ,  $u(x, b) = x^2 + b$ .
32.  $\Delta u(x, y) = 4 + 6y$ ,  
 $u_x(0, y) = 2$ ,  $u(a, y) = 2y^2 + y^3 + a$ ,  
 $u_y(x, 0) = 0$ ,  $u(x, b) = x + 2b^2 + b^3$ .
33.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u(0, y) = 1 + 2y + y^2$ ,  $u_x(a, y) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = 1$ ,  $u_y(x, b) = 1 + 2b$ .
34.  $\Delta u(x, y) = 4 + 6x$ ,  
 $u(0, y) = 2$ ,  $u_x(a, y) = 2 + 4a + 3a^2$ ,  
 $u(x, 0) = 2 + x + 2x^2 + x^3$ ,  $u_y(x, b) = 0$ .
35.  $\Delta u(x, y) = 2$ ,  
 $u_x(0, y) = 1$ ,  $u(a, y) = 1 + y + a^2$ ,  
 $u(x, 0) = 1 + x^2$ ,  $u_y(x, b) = 0$ .
36.  $\Delta u(x, y) = 2 + 6y$ ,



$$u_x(0, y) = 2y, u(a, y) = 3 + y^2 + y^3, \\ u(x, 0) = 3, u_y(x, b) = 1 + 2b + 3b^2.$$

$$37. \Delta u(x, y) = 2 + 12x^2, \\ u(0, y) = 1, u_x(a, y) = 3y + 2a + 4a^3, \\ u_y(x, 0) = 2, u(x, b) = 1 + x^2 + x^4.$$

$$38. \Delta u(x, y) = 2, \\ u(0, y) = 1, u_x(a, y) = 1 + 2a, \\ u_y(x, 0) = 0, u(x, b) = 1 + 3x + x^2.$$

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

### Критерии оценки (в баллах):

- 5- выставляется студенту, если он выполнил от 85% до 100% всей работы;
- 4- баллов выставляется студенту, если он выполнил от 70% до 85% всей работы;
- 3- баллов выставляется студенту, если он выполнил от 50% до 70% всей работы;
- 2- баллов выставляется студенту, если он выполнил менее 50% всей работы.

### Вопросы к зачету

Тема 1. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка.

1. Понятия уравнения в частных производных.
2. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка.

Тема 2. Уравнения гиперболического типа.

3. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Понятие о начальных и граничных условиях. Задача Коши. Теорема единственности.
4. Формула Даламбера для неограниченной прямой.
5. Формула Даламбера для полуограниченной прямой.
6. Метод разделения переменных – Метод Фурье – для уравнения колебания струны.
7. Метод разделения переменных – Метод Фурье – для уравнения колебания струны для неоднородного уравнения.

### 9.5. Вопросы к экзамену:

Тема 3. Уравнения параболического типа.

8. Уравнение теплопроводности. Краевые задачи для уравнения теплопроводности.
  9. Принцип Максимиума для уравнения теплопроводности.
  10. Единственность решения задачи Дирихле.
  11. Единственность решения задачи Неймана.
  12. Метод разделения переменных – Метод Фурье для однородного уравнения теплопроводности.
  13. Метод разделения переменных – Метод Фурье для неоднородного уравнения теплопроводности.
  14. Распространение тепла на бесконечной прямой.
- Тема 4. Уравнения эллиптического типа.

15. Уравнение Лапласа. Уравнение Пуассона. Задача Дирихле. Задача Неймана.
  16. Гармонические функции и аналитические функции комплексной переменной.
  17. Уравнение Лапласа в полярных координатах.
  18. Фундаментальное решение уравнения Лапласа ( $n=2$ ;  $n=3$ ).
  19. Формулы Грина.
- Интегральное представление решения для уравнения Лапласа ( $n=2$ ;  $n=3$ ).  
Некоторые основные свойства гармонических функций. Принцип Максимиума.  
Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных. Интеграл Пуассона.
- Тема 5. Уравнения гиперболического типа.
20. Разностные схемы для уравнений теплопроводности. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле.

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3, ПК-2

*Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.*