Перепелкина Ю.В., Петрунина Е.В.,
Истомина Т.В.

МЕТОДЫ оптимизации при принятии решений

Учебно-методическое пособие

Москва
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет

**Ю.В. Перепелкина, Е.В. Петрунина,
Т.В. Истомина**

Методы оптимизации при принятии решений

Учебно-методическое пособие

Москва
2020

УДК 681.3.06
ББК 32.973.018
П 27

Рецензенты:

Б.Г. Миронов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и естественных наук ВГБОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)»

А.Е. Никольский, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и прикладной математики ФГБОУИ ВО МГГЭУ.

Перепелкина Ю.В., Петрунина Е.В., Истомина Т.В.
П 27 Методы оптимизации моделей: учебно-методическое пособие. — М.: МГГЭУ, 2020. — 112 с.

В учебно-методическом пособии излагаются основы линейного программирования, включая теорию двойственности. Пособие содержит разделы «Линейное программирование», «Симплекс-метод», «Двойственные задачи линейного программирования» (методы решения задач Л.П.), «Двойственный симплекс-метод», «Транспортная задача», «Задания для практических занятий». Курс ориентирован на приобретение теоретических знаний и практических навыков решения задач по методам формулирования экономических проблем, требующих оптимизации, и моделирования мероприятий и ситуаций в виде математических моделей; прогнозирования будущих ситуаций с целью принятия оптимального решения, а также на овладение общими принципами постановки задач оптимизации и многочисленными методами решения задач оптимизации.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика» и «Информатика и вычислительная техника», изучающих дисциплины «Методы и модели системного анализа биосистем», «Математические инструментальные методы и модели систем поддержки принятия решений», «Исследование операций», «Теория принятия решений», «Методы оптимизации».

Учебно-методическое пособие также может быть рекомендовано студентам других вузов, обучающихся по близким специальностям.

ISBN 978-5-9799-0136-7

Предисловие

Для современного мира крайне актуальны задачи принятия решения, задачи выбора наиболее эффективного (оптимального) варианта, при котором достигается наилучший результат, обеспечивающий максимум или минимум (по смыслу задачи) поставленной цели. Цели могут быть самыми разнообразными. Применительно к хозяйственному объекту в качестве цели могут выступать требования обеспечить максимум выпускаемой продукции при известном объеме имеющихся ресурсов, минимум затрат на производство фиксированного набора продуктов, максимум прибыли и т.п. Разработкой и практическим применением методов оптимального управления объектами различного типа занимается научная дисциплина, называемая исследованием операций, важной и основной частью которой является линейное программирование. Математической моделью задачи называется совокупность математических соотношений в виде уравнений и неравенств, описывающих процесс, поэтому моделирование является неотъемлемой частью процесса исследования операций.

Пособие состоит из трех частей: теоретической (содержит 5 лекций по основным положениям линейного программирования и симплекс-методу), практической (содержит многочисленные примеры решения практических задач) и типового расчета (содержит задания для домашней контрольной работы).

Основная задача курса по методам оптимизации моделей в прикладных областях состоит в формировании навыков использования методов формулирования проблем, требующих оптимизации, и моделирования мероприятий и ситуаций в виде математических моделей; навыков прогнозирования будущих ситуаций с целью принятия оптимального решения; в овладении общими принципами постановки задач оптимизации, различными визуальными и аналитическими методами решения задач оптимизации; в формировании математических моделей задач экономического характера для решения прикладных задач, а также в реализации принципа непрерывного образования студентов.

Цели изучения дисциплины:

1) способствовать формированию личности студента, его интеллекта и умения логически и алгоритмически мыслить;
2) дать студентам теоретическую и практическую подготовку по применению математических методов оптимизации в различных приложениях экономики и других социальных наук;
3) обеспечить высокое качество знаний, способность к формулировке математических моделей для широкого круга прикладных задач и к их решению.

В результате изучения обучающийся должен:

знать

- методы формулирования проблем, требующих оптимизации, и описания мероприятий и ситуаций в виде математических моделей;
- методы прогнозирования будущих ситуаций с целью принятия оптимального решения;

уметь

- формулировать с помощью математического аппарата и решать прикладные задачи, требующие оптимизации;
- решать оптимизационные задачи и задачи выбора наилучших решений;

владеть

- общими принципами постановки задач оптимизации;
- графическим методом решения задач оптимизации;
- симплекс-методом;
- методом транспортной задачи.

Все разделы сопровождаются практическими примерами и контрольными вопросами. При изучении курса студентам рекомендуется в целях самопроверки, закрепления полученных знаний и в целях оценки уровня своей готовности к сдаче экзамена разобрать приведенные в книге примеры решения задач, решить расчетные задания, задания для самостоятельной работы и контрольные задания, помещенные в конце книги.

Лекция 1. Линейное программирование

1.1. Постановка задач линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования (задача Л.П.) формулируется следующим образом: найти максимум или минимум для линейной функции вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m_1}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \ i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{m_2 + 1, m}, \end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

где: x_j — управляющие переменные, a_{ij}, b_i, c_j — параметры, $f(x)$ — целевая функция. Задача содержит n переменных и m ограничений. Экономический смысл всех величин, входящих в постановку задачи Л.П. (1.1), (1.2), станет понятным ниже.

Рассмотрим два примера экономических задач, сводящихся к рассматриваемым нами линейным моделям.

Пример 1. Оптимальное планирование производства

Пусть некоторое предприятие производит n типов продукции из m видов ресурсов. Предположим, что для производства единицы j-го типа продукции требуется a_{ij} единиц i-го вида ресурса.

Матрица $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ называется *технологической матрицей*.

Пусть c_j — величина прибыли от реализации единицы j-той продукции. Обозначим посредством $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ план производства. Тогда функция

$$f(x) = f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

представляет собой величину прибыли, полученной при реализации плана X.

Пусть далее b_i обозначает количество единиц i-го ресурса, имеющегося у предприятия.

Рассмотрим следующую задачу: найти такой план производства X, который являлся бы допустимым (удовлетворял всем условиям и ограничениям задачи) и обеспечивал наибольшую прибыль из всех допустимых планов.

Математическая модель этой сугубо экономической задачи имеет вид:

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m}, \\ &x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

или в компактной матричной форме

$$\max f(X) = CX \tag{1.3'}$$

$$\left.\begin{aligned} &AX \le B, \\ &X \ge 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.4'}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — матрица-строка длины n, X — матрица-столбец высоты n, $X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A = (a_{ij})$ $m \times n$ — матрица и, наконец, B — матрица-столбец высоты m, $B^T = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, индекс T — знак транспонирования матриц.

Пример 2. Задача о минимальной потребительской продовольственной корзине (задача о диете).

Задан ассортимент продуктов, имеющихся в продаже. Каждый продукт содержит определенное количество питательных веществ. Известен требуемый человеку минимум питательных веществ каждого вида.

Необходимо определить потребительскую продовольственную корзину, имеющую минимальную стоимость.

Параметры задачи: n — число различных продуктов, имеющихся в продаже, m — число различных питательных веществ, необходимых человеку; a_{ij} — содержание i-го питательного вещества в j-ом продукте, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, b — количество i-го питательного вещества, необходимого человеку; c_j — стоимость единицы j-го продукта.

Обозначим посредством x_j — количество j-го продукта, входящего в потребительскую корзину.

Математическая модель рассматриваемой задачи записывается в следующем виде:

$$\min f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i=\overline{1,\ m}, \\ &x_j \geq 0, \qquad j=\overline{1,\ n}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

или в компактной матричной форме

$$\min f(X)=CX \tag{1.5'}$$

$$\left.\begin{aligned} &AX \geq B, \\ &X \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.6'}$$

1.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод (эффективный и наглядный) применяется для задач Л.П. следующего типа:

(а) с двумя переменными (x_1, x_2) и ограничениями в виде неравенств;

(б) со многими переменными (x_1, x_2, …, x_n), из которых не более двух свободные ($n-m=2$) и, кроме того, m ограничений заданы в виде системы уравнений.

Дело в том, что в этих случаях все наглядно изображается и эффективно решается на плоскости Ox_1x_2. Здесь уместно заметить, что ввиду наличия в ограничениях задач Л.П. *тривиальных ограничений*, а именно $x_{ij} \geq 0$, $j=\overline{1,n}$, все построения осуществляются в первом квадранте при $n = 2$ и в положительном октанте при $n > 2$.

А в общем случае приведенных постановок задач Л.П. (1.1) – (1.6), равно как и в двух приведенных только что, все базируется на нескольких основных теоремах линейного программирования, которые будут приводиться по мере необходимости. Для некоторых из них, не требующих громоздких выкладок, будут приведены доказательства. В других случаях с доказательствами теорем можно ознакомиться в монографиях по этой тематике (см. Литература).

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи Л.П. является *выпуклым множеством*.

На плоскости Ox_1x_2, например, такое множество ограничено выпуклым многоугольником (рис. 1.1. а) — все точки отрезка MN принадлежат этому же множеству. На рис. 1.1. б представлено невыпуклое множество.

Точка A называется *угловой точкой*.

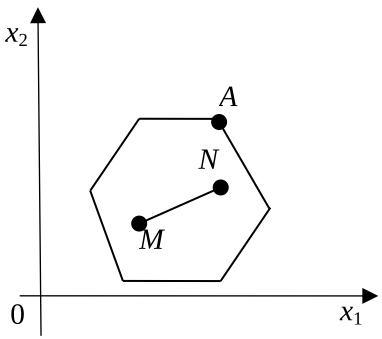


Рис. 1.1. а

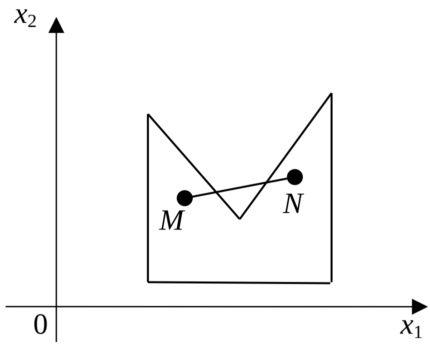


Рис. 1.1. б

Теорема 2. Если существует оптимальное решение задачи Л.П., то оно совпадает с одной из угловых точек области допустимых решений.

Вернемся к сформулированным выше двум задачам (а) и (б).

Задача (а). Для нахождения оптимального значения целевой функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{1.7}$$

при использовании графического метода решения сформулированной выше задачи (а) используют градиент функции $f(x)$, а именно

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{j} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}, \tag{1.8}$$

который, как известно, (вот пригодился!) указывает направление наибыстрейшего возрастания в данном случае целевой функции $f(x)$ и проходит перпендикулярно линиям уровня $f(x) = C (C = \text{const})$ этой функции.

Технически все происходит в следующей последовательности:

1. На плоскости Ox_1x_2 строим область допустимых решений (О.Д.Р.), используя ограничения задачи.
2. Строим вектор $\operatorname{grad} f(x) = c_1 i + c_2 j$.
3. Строим прямую $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, которая в данном случае является линией уровня целевой функции задачи $f(x) = C (C = 0)$, и она, проходя через начало координат (почему?), перпендикулярна градиенту.
4. Передвигаем эту прямую в направлении, указанном вектором $\operatorname{grad} f(x) = c_1 i + c_2 j$, в случае решения задачи Л.П. на максимум (наибыстрейшее возрастание!) до тех пор, пока она (прямая линия) не соберется покинуть О.Д.Р. через одну (а может быть и две) из угловых точек, например, через точку C на рис. 1.2 (не путать с константой C в уравнении линий уровня).
5. Координаты упомянутой угловой точки (x_{1C}, x_{2C}) обеспечат максимум целевой функции $f(C) = c_1x_{1C} + c_2x_{2C} = f_{\max}$, т.е. искомое решение задачи Л.П.

В случаях, когда задача Л.П. сформулирована на поиск минимума целевой функции, перемещение линии уровня осуществляют в направлении

$$-\operatorname{grad} f(x) = -(c_1 i + c_2 j).$$

Случай «покидания» линией уровня О.Д.Р. через две угловые точки, т.е. через отрезок CD, например (рис. 1.2), встретится в примерах и будет отмечен особо.

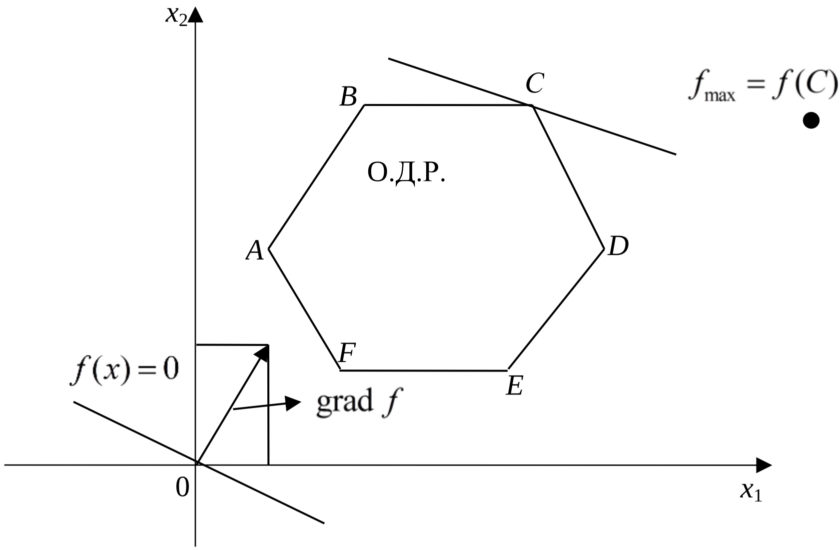


Рис. 1.2

Задача (б). Переменных всего n, но количество ограничений в виде равенств равно m, и поэтому количество свободных переменных равно ($n - m = 2$), а базисных переменных — m.

Не умаляя общности задачи, предположим, что в системе ограничений, задаваемых равенствами

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,\, m}, \tag{1.9}$$

свободными переменными будут, как и в задаче (а), x_1, x_2, а остальные m переменных, а именно, $x_3, x_4, \ldots, x_n$ — базисными.

Заметим, что здесь наблюдается некоторое отличие от терминологии высшей алгебры, когда ранг матрицы СЛАУ равен, скажем, два, то две переменных (неизвестных) называются базисными, а остальные свободными. Далее выразим наши базисные переменные через свободные. Получаем систему m равенств (фактически уравнений) вида

$$\left.\begin{aligned}
x_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \\
x_4 &= \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n
\end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

Поскольку базисные переменные $x_3, x_4,...,x_n$ по условию задач Л.П. должны быть неотрицательными, то система равенств (1.10) тут же записывается в виде системы неравенств вида

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \ge 0 \\
\alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \ge 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \ge 0
\end{aligned}\right\}. \qquad (1.11)$$

Если теперь выразить целевую функцию

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

через свободные переменные x_1, x_2 (т.е. первые два слагаемых в ней сохраняются, а вместо x_3, x_4,...,x_n подставляются их значения из системы (1.10) и осуществляется приведение подобных членов), то получим

$$f(x) = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2. \qquad (1.12)$$

Таким образом, мы свели задачу (б) к типу задачи (а), эффективный и простой графический метод решения которой мы описали выше.

Лекция 2. Симплекс-метод

2.1. Геометрические предпосылки симплекс-метода

Название метода связано с его геометрической интерпретацией. ***Симплексом*** называется обобщенный тетраэдр, заданный системой неравенств:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le 1, \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$$

При $n = 3$ имеем треугольную пирамиду — $x_1 + x_2 + \le 1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ (см. рис. 2.1).

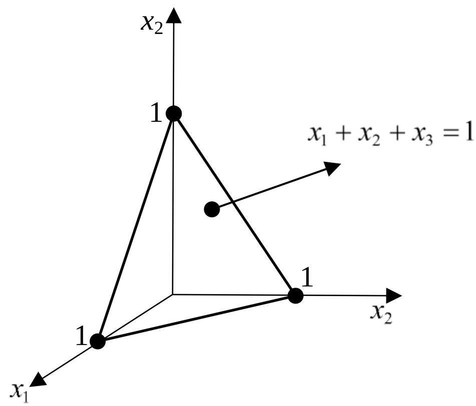


Рис. 2.1

Согласно основным теоремам линейного программирования оптимальное решение, как правило, соответствует вершине симплекса. В общем случае (при $n \ge 3$) вершин может оказаться очень много, да и находить их не так просто, как в двумерном случае. Это означает, что перебор вершин следует упорядочить с целью сокращения числа перебираемых вершин.

Одним из методов такого упорядоченного перебора и является симплекс-метод. С геометрической точки зрения симплекс-метод следует понимать как направленный перебор вершин симплекса с переходом по ребру из одной вершины в другую, соседнюю с первой. В симплекс-методе всегда выбирается то из ребер, при движении по которому целевая функция улучшается. Переход к соседней вершине симплекса соответствует замене одного базисного решения другим, которые отличаются одно от другого лишь двумя переменными

Симплекс-метод состоит из трех этапов.

1. Перевод задачи Л.П. из стандартной формы, содержащей ограничения в виде неравенств, к канонической форме, содержащей ограничения уже в виде равенств. Для этого достаточно в строчках неравенств вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$ ввести дополнительную переменную x_{n+1} так, что $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ и $x_{n+1} \ge 0$, а в строчках неравенств вида $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \ge b_j$ слева вычесть дополнительную переменную x_{n+1} так, что станет $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j$.

2. Нахождение допустимого базисного решения.

3. Последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения.

Реализацию этих этапов продемонстрируем на конкретном примере.

2.2. Пример. Задача о рекламе

2.2.1. Постановка задачи

Пусть некоторая фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех источников массовой информации: телевидения, радио, газет и расклейки объявлений.

Анализ рекламной деятельности фирмы в прошлом показал, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 5, 7 и 4 денежных единиц (ден. ед.) в расчете на 1 денежную единицу, затраченную на рекламу.

Всего на рекламу выделено 50000 ден. ед. Из них на телевидение не более 40%, на радио и газеты не более 50%.

Как следует фирме организовать рекламу, чтобы получить максимальную прибыль?

Составим математическую модель задачи.

Пусть x_j $\left(j=\overline{1,4}\right)$ — количество средств, вложенных в j-ый вид рекламы. Тогда целевая функция задачи записывается следующим образом

$$f\left(x\right)=10x_1+5x_2+7x_3+4x_4\Rightarrow \max \qquad (2.1)$$

и ограничения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & x_1+x_2+x_3+x_4\le 50000 \\ & x_1\le 20000 \\ & x_2+x_3\le 25000 \\ & x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}. \end{aligned}\right\}. \qquad (2.2)$$

2.2.2. Последовательность аналитических преобразований

1 шаг. Приведем стандартный вид задачи Л.П. к каноническому виду, прибавляя в левых частях неравенств (2.2) неотрицательные дополнительные переменные x_5, x_6, x_7.

В результате имеем систему

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=50000 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad\quad +x_6=20000 \\ \qquad x_2+x_3 \qquad +x_7=25000 \\ \qquad\quad x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,7}. \end{array}\right\}. \qquad (2.3)$$

2 шаг. На втором этапе необходимо найти допустимое базисное решение. Выберем в качестве базисных переменных переменные x_5, x_6, x_7. Это делается из следующих соображений. Первое: ранг матрицы коэффициентов левой части равен 3 (проверяется элементарно) и поэтому выбираются три переменные. Второе: переменная x_j называется базисной для системы уравнений, если она содержится только в одном уравнении системы с коэффициентом +1.

Третье: всегда удобнее взять именно дополнительные переменные, входящие в уравнения с коэффициентами +1.

Выразим выбранные базисные переменные через остальные — свободные. Получим

$$\left.\begin{aligned} x_5 &= 50000 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_6 &= 20000 - x_1 \\ x_7 &= 25000 - x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.4)$$

Положив в (2.4) свободные переменные равными нулю, т.е.

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

получим допустимое базисное решение

$$X_1 = (0,\ 0, 0,\ 0,\ 50000,\ 20000,\ 25000).$$

При этом с учетом вида целевой функции (2.1) имеем $f(X_1) = 0.$

Очевидно, что значение целевой функции $f(x) = 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4$ можно увеличивать за счет увеличения значений свободных переменных, входящих в нее с положительными коэффициентами. И наибольший вклад в это увеличение обеспечивает, конечно, переменная x_1, поскольку у нее наибольший множитель — 10.

3 шаг. Система уравнений (2.4) позволяет найти наибольшее возможное значение переменной x_1. Это делается следующим образом.

Рассматривается каждое уравнение системы, в котором присутствует переменная x_1. Если знак коэффициента перед x_1 совпадает со знаком свободного члена в этом уравнении, то в этом уравнении нет ограничений на изменение переменной x_1. Если же указанные знаки противоположны, то переменная x_1 не может принимать значения большие, чем модуль отношения свободного члена к коэффициенту при x_1, иначе при больших значениях x_1 переменные в левых частях системы уравнений (2.4) (а это переменные x_5, x_6)

станут отрицательными величинами, что невозможно в силу тривиальных ограничений $x_j \geq 0$.

Поэтому выписываются указанные отношения по всем уравнениям и среди них выбирается минимальное значение, которое и укажет «слабейшее звено», а именно ту основную переменную, которая прежде других начнет принимать отрицательные значения при увеличении переменной x_1. Основная переменная, присутствующая в том уравнении, для которого достигнут указанный минимум, и является искомой переменной. Она переводится в статус свободных переменных вместо x_1.

В этой процедуре возможна и другая ситуация, а именно: если в одном или нескольких уравнениях какая-либо переменная отсутствует (см. систему (2.4)) и третье уравнение в ней или знак коэффициента перед этой переменной совпадает со знаком свободного члена, то вместо упомянутого модуля отношений ставят знак ∞ (т.е. бесконечно большое значение, чтобы оно не оказало влияния на выбор наименьшего значения среди выписанных отношений).

С учетом сказанного, получаем

$$x_1 = \min\left\{\frac{50000}{1}; \frac{20000}{1}; \infty\right\} = 20000$$

и, следовательно, переменные x_1, x_6 во втором уравнении системы (2.4) меняются местами: $x_6 = 0$ переводится в свободные, а $x_6 > 0$ становится базисной переменной. Систему (2.4) следует переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 20000 - x_6 \\ x_5 &= 30000 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 \\ x_7 &= 25000 - x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}. \tag{2.5}$$

Новое базисное решение (все x_j в правых частях положить равными нулю!) имеет вид:

$$X_2 = \left(20000,\ 0, 0,\ 0,\ 30000,\ 0,\ 25000\right). \tag{2.6}$$

Выражая в целевой функции (2.1) основные переменные через свободные (теперь x_2, x_4, x_6, x_7), имеем

$$f\left(x\right)=200000+5x_2+7x_3+4x_4-10_6, \qquad (2.7)$$

и понятно, что $f\,(X_2) = 200000$.

4 шаг. Однако оптимальность (максимум в данном случае) еще не достигнута, поскольку значение целевой функции будет возрастать при увеличении x_2, x_3, x_4. Однако из всех трех переменных мы обратим внимание прежде всего на x_3, поскольку $+7 > +5$ и $+4$. Вспоминая алгоритм, находим

$$x_3=\min\left\{\infty;\frac{30000}{1};\frac{25000}{1}\right\}=25000.$$

Следовательно, переменная $x_3 > 0$ переводится из свободных в базисные, а $x_3 = 0$ — в свободные. Снова переписывается система уравнений, теперь (2.5), начиная с третьего уравнения, из которого было получено $x_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_3&=25000-x_2-x_7\\ x_1&=20000-x_6\\ x_5&=5000-x_4+x_6+x_7 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.8)$$

Новое базисное решение

$$X_3=\left(20000,\ 0,\ 25000,\ 0,\ 5000,0,0\right). \qquad (2.9)$$

Выражая в целевой функции (2.7) базисные переменные через свободные (теперь x_2, x_3, x_4, x_6), имеем

$$f\left(x\right)=375000-2x_2+4x_4-10x_6-7x_7, \qquad (2.10)$$

и понятно, что $f\left(X_3\right)=375000$.

5 шаг. Для достижения оптимальности целевой функции остался один шаг (в целевой функции только одна переменная имеет положительный коэффициент +4 перед переменной x_4, которую и необходимо перевести из свободных в базисную). Из системы (2.8) имеем

$$x = \min\left\{\infty; \infty; \frac{5000}{1}\right\} = 5000,$$

и переменную $x_5 = 0$ переводим в свободную.

2.2.3. Формулировка результата

Выражая в последний раз в этой задаче в целевой функции (2.10) базисные переменные через свободные (теперь x_2, x_4, x_6, x_7), имеем

$$f(x) = 395000 - 2x_2 - 4x_5 - 6x_6 - 3x_7 \tag{2.11}$$

и теперь (см. систему (2.8)) ***оптимальное***, наконец, решение имеет вид

$$X^* = (20000, 0, 25000, 5000)$$

(в выражении оптимального решения приведены значения только первоначальных базисных переменных x_1, x_2, x_3, x_4, и указанные значения дают полное представление о том, каким образом инвестировать средства на рекламу: на телевидение — 20000 ден. ед., на радио — 0 (!), на газетные объявления — 25000 ден. ед. и на расклейку объявлений — 5000 ден. ед.).

Максимальная прибыль будет при этом

$$f(X^*) = \max f(x) = 395000 \text{ ден. ед.}$$

Завершим этот раздел формулировкой ***критерия оптимальности***: если при поиске максимума целевой функции в ее выражении через свободные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при свободных переменных, то решение *оптимально*. При поиске минимума целевой функции критерием оптимальности служит отсутствие отрицательных коэффициентов.

Отметим в заключение, что описанный выше симплекс-метод значительно упрощается при использовании так называемых *симплекс-таблиц*, к изложению которых мы и переходим.

2.3. Симплекс-метод (табличный вариант)

В качестве иллюстрации способа построения симплекс-таблиц используем рассмотренный пример.

На первом шаге задача была приведена к каноническому виду

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 50000 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 20000 \\ x_2 + x_3 \qquad + x_7 &= 25000 \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,4} \right) \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Заполним первую симплекс-таблицу (табл. 1), в последней строке запишем целевую функцию с противоположными знаками у коэффициентов при x_j.

Таблица 1

$x_1 \to$ б.п.	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	б.п.
<u>1</u>	1	1	1	1	0	0	50000	x_5
$\boxed{1}$	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>20000</u>	$\underline{x_6} \to$ с.п.
<u>0</u>	1	1	0	0	0	1	25000	x_7
<u>–10</u>	–5	–7	–4	0	0	0	0	f

При этом критерием оптимальности становится отсутствие отрицательных чисел в последней строке таблицы, т.е. где справа стоит f. Начальное решение, которое у нас было и которое здесь «просматривается» (см. (2.12)) X_1 = (0, 0,0, 0, 50000, 20000, 25000) является допустимым, но не оптимальным, так как последняя f — строка таблицы содержит отрицательные числа.

Выбираем максимальное по абсолютной величине отрицательное число в последней строке, которое находится в первом столбце. Это «–10». Выделим этот первый столбец и назовем его ***разрешающим столбцом***. Он соответствует свободной переменной x_1, которая становится базисной на втором шаге. Найдем переменную, которая, наоборот, из базисных перейдет в свободные. Для этого подсчитываем отношения элементов (чисел) столбца b_i к соответствующим элементам (числам) a_{iq} разрешающего столбца и выберем наименьшее: $x_1 = \min\left\{\frac{50000}{1}; \frac{20000}{1}; \infty\right\} = 20000,$ которое соответствует второй строке. Выделяем вторую строку (подчеркиванием) и называем ее ***разрешающей строкой***.

Переменную x_6, которая являлась базисной, переводим в свободные, т.к. при $x_1 = 20000$, $x_6 = 0$.

Разрешающий элемент $a_{21} = 1$ $a_{21} = 1$ выделим: $\boxed{1}$ и переходим к составлению новой симплекс-таблицы.

Для этого все элементы разрешающей строки разделим на разрешающий элемент $a_{21} = 1$, а разрешающий столбец заполним нулями всюду, кроме 1 в разрешающей (второй) строке.

При этом переменные x_6, x_7 остаются базисными, поэтому значения элементов в пятом и седьмом столбцах не изменяются. Остальные же элементы симплекс-таблицы, включая коэффициенты целевой функции и свободные члены b_i, пересчитываются по следующей схеме:

$$\tilde{\text{O}} = \frac{\text{O} \cdot \square - \nabla \cdot \Delta}{\square}, \tag{2.13}$$

где О — изменяемый элемент, Õ — измененный элемент

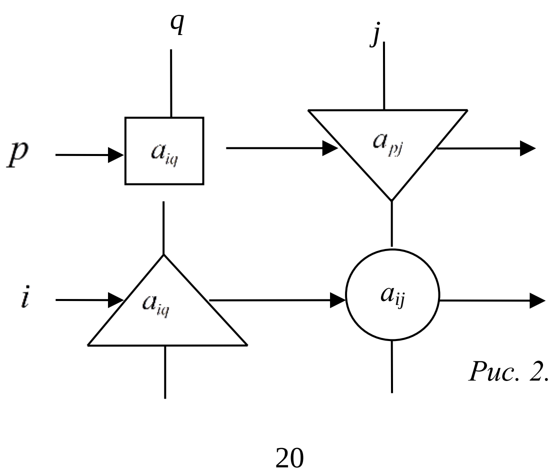


Рис. 2.2

В приведенной на рис. 2.2 схеме: p — разрешающая строка, q — разрешающий столбец. После применения описанных преобразований и непосредственных вычислений составим новую симплекс таблицу (табл. 2)

Таблица 2

		$x_3 \to$ б.п.					b_i	б.п.
0	1	$\underline{1}$	1	1	–1	0	30000	x_5
1	0	$\underline{0}$		0	1	0	20000	x_1
$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\boxed{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{25000}$	$\underline{x_7}$ $\to$ с.п.
0	–5	$\underline{–7}$	–4	0	10	0	200000	f

Новое решение: X_2 = (20000; 0;0;0;30000;0;25000), и значение целевой функции $f(X_2)$ = 200000. Решение не оптимально, поскольку последняя строка содержит отрицательные числа.

Переходим к новой симплекс-таблице, соответствующей новому базису. В качестве разрешающего выбираем третий столбец, так как ему соответствует наибольшее по абсолютной величине отрицательное число — «–7». Следовательно, свободную переменную x_3 переводим в базисные (уже показано в табл. 2). А переменная — претендентка на переход в свободные (в табл. 2 указана x_7) определяется из условия

$$x_3 = \min\left\{\frac{30000}{1}; \frac{20000}{0}; \frac{25000}{1}\right\} = 25000 \to x_7 = 0$$

Отсюда следует, что третья строка — разрешающая, и базисная переменная x_7 переводится в свободные переменные.

Разрешающий элемент теперь: a_{33} = 1. Делим элементы разрешающей строки на значение разрешающего элемента (в данном случае на 1), а разрешающий столбец заполняем нулями всюду, кроме остающейся 1 в разрешающей строке.

Первый и пятый столбец остаются базисными, поэтому они просто переписываются в новую таблицу (табл. 3). При этом остальные элементы пересчитываются по формуле (2.13), и в конце концов получается новая симплекс-таблица (табл. 3).

Таблица 3

			$x_4 \to$ б.п.				b_i	б.п.
<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	$\boxed{1}$	<u>1</u>	<u>–1</u>	<u>–1</u>	<u>5000</u>	<u>$x_5 \to$ с.п.</u>
1	0	0	0	0	1	0	20000	x_1
0	<u>1</u>	1	0	0	0	1	25000	x_3
0	2	0	<u>–4</u>	0	10	0	375000	f

Новое решение X_3 = (20000; 0;25000;0;5000;0;0) и значение целевой функции для него $f\,(X_2)$ = 375000. Решение все еще не оптимально — в последней строке имеется одно отрицательное число. Это «–4» в четвертом столбце. Переводим переменную x_4 (уже указано в табл. 3) в базисные. При этом

$$x_4 = \min\left\{\frac{5000}{1};\infty;\infty\right\} = 5000 \to x_5 = 0,$$

что соответствует первой строке таблицы 3. Таким образом, первая строка теперь разрешающая, и переменная x_5 переводится в свободные (уже отмечено в табл. 3).

Итак, приводим последнюю симплекс-таблицу (табл. 4).

Таблица 4

							b_i	б.п.
0	0	0	1	1	–1	–1	5000	x_4
1	0	0	0	0	1	0	20000	x_1
0	1	1	0	0	0	1	25000	x_3
0	2	0	0	4	6	3	395000	f

Итак, критерий максимальности выполнен (все числа в последней строке табл. 4 — положительны или нули) и соответствующее оптимальное решение суть

$$X^* = (20000;\ 0; 25000; 5000; 0; 0; 0)$$

или

$$x_1^* = 20000;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = 25000;\ \ x_4^* = 5000,$$

и значение целевой функции, представляющее наибольшую прибыль фирмы от рекламной компании, равно

$$f^* = f\left(X^*\right) = \max f = 395000 \text{ ден. ед.}$$

Заключение

В результате анализа и расчетов с использованием симплекс-метода рекламной компании фирмы оказалось, что на рекламу по телевидению необходимо выделить 20000 ден. ед., на рекламу через газеты — 25000 ден. ед. (самая большая часть всей суммы), на рекламу через расклеивание объявлений — 5000 ден. ед., а вот рекламой по радио не пользоваться вовсе.

Лекция 3. Двойственные задачи линейного программирования

3.1. Постановка взаимно-двойственных задач

Рассмотрим ситуацию, когда на предприятии к концу года остались запасы неизрасходованного сырья. Из этого сырья, с одной стороны, можно наладить производство продукции, пользующейся спросом на рынке, и получить прибыль. С другой стороны, это сырье можно продать «на сторону» (термин периода перестройки!) какой-либо нуждающейся в этом сырье фирме.

Как следует поступить руководству предприятия?

Для простоты будем считать, что имеются два вида сырья S_1, S_2, остатки которого составляют 35 ед. и 20 ед., соответственно. Из этого сырья можно наладить производство трех видов продукции P_j (j = 1,2,3). Нормы расхода сырья на производство продукции и прибыль от реализации единицы каждого вида продукции представлены в табл. 5.

Таблица 5

$P_j \rightarrow$ / S_i				Запасы сырья
S_1	1	1	5	35
S_2	2	1	2	20
Удельная прибыль	7	6	18	

При исследовании первой возможности возникает вопрос о плане выпуска продукции. Обозначим этот план посредством и составим математическую модель задачи:

$$\max f = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3 \qquad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 &\le 35 \\ 2x_{\cdot} + x_2 + 2x_3 &\le 20 \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

$$x_j \ge 0 \left(j = 1,2,3 \right).$$

Назовем полученную математическую модель **Задача I**.

Исследуем теперь вторую возможность, а именно вариант продажи сырья другой фирме. Здесь возникает вопрос: «По каким ценам продавать сырье?» Обозначим эти цены посредством y_1, y_2, т.е. y_i — цена единицы сырья S_i, = 1,2.

Разумное требование к ценам со стороны продавца состоит в следующем: выручка от продажи сырья должна быть не меньше, чем прибыль от реализации готового изделия. В противном случае, лучше изготовить из сырья продукцию и получить от ее реализации прибыль.

Это требование приводит к системе неравенств:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\ge 7 \\ y_1 + y_2 &\ge 6 \\ 5y_1 + 2y_2 &\ge 18 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

$$y_i \ge 0,\ i = 1,\ 2.$$

Что касается покупателя, то для него единственное пожелание заключается в сокращении до минимума расходов на покупку сырья, т.е.

$$\min \phi = 35y_1 + 20y_2. \qquad (3.4)$$

Назовем полученную математическую модель **Задача II.**

Задачи I и II называются ***двойственными*** одна к другой ***задачами***.

Запишем их в более общей форме и параллельно.

Задача I	Задача II
$\max f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$	$\min \phi = b_1y_1 + b_2y_2$
$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3 \end{aligned}\right\}$
$x_j \ge 0\ (j = 1,2,3)$	$y_i \ge 0,\ i = 1,2$

Введем в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, Y = (y_1, y_2), C = (c_1, c_2).$$

Тогда взаимно-двойственные задачи запишутся в следующей компактной форме

$$
\begin{array}{ll}
\text{Задача I} & \text{Задача II} \\
\max f = C \cdot X, & \min \phi = Y \cdot B, \\
A \cdot X \le B, & Y \cdot A \ge C, \\
X \ge 0, & Y \ge 0.
\end{array}
\qquad (3.5)
$$

3.2. Основные свойства, неравенства, признаки и теоремы взаимно-двойственных задач

3.2.1. Свойства

1. В одной задаче ищется максимум, а в другой минимум некоторой функции.
2. В задаче на максимум неравенства (нетривиальные ограничения) содержат знаки $\le$, а в задаче на минимум — $\ge$.
3. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными одна по отношению к другой.
4. Условия неотрицательности переменных сохраняются в обеих задачах.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным условиям, называются *симметричными*.

3.2.2. Основное неравенство

Если X — допустимое решение прямой задачи **(**задача I**)**, а Y — допустимое решение двойственной задачи **(**задача II), то

$$f(X) \le \phi(Y). \qquad (3.6)$$

Доказательство. Так как переменные в обеих задачах неотрицательны (тривиальные ограничения), принимая во внимание неравенства (3.5), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\underline{f(X)}=CX \le (YA)\cdot X = Y\cdot(AX)\underline{\le YB=\phi(Y)} \qquad (3.7)$$

Сравнивая подчеркнутые части цепочки (3.7), убеждаемся в справедливости (3.6). Основное неравенство доказано.

3.2.3. Достаточный признак оптимальности

Если X^*, Y^* — допустимые решения взаимно-двойственных задач, для которых выполняется равенство

$$f(X^*)=\phi(Y^*), \qquad (3.8)$$

то X^* — оптимальное решение исходной задачи (задача I), а Y^* — оптимальное решение двойственной задачи (задача II).

Доказательство. Пусть X — любое допустимое решение исходной задачи, тогда согласно основному неравенству (3.6) получим: $f(X)\le\phi(Y^*)$. Из равенства (3.8) следует, что $f(X)\le f(X^*)$, а это, в свою очередь, означает, что X^* — оптимальное решение исходной задачи (задача I). Теперь пусть Y — оптимальное решение двойственной задачи (задача II), тогда согласно основному неравенству (3.6) получим: $\phi(Y)\ge f(X^*)$. Из равенства (3.8) следует, что $\phi(Y)\ge\phi(Y^*)$, а это, в свою очередь, означает, что Y^* — оптимальное решение двойственной задачи (задача II). Теорема доказана.

3.2.4. Первая теорема двойственности

Теорема. Если одна из взаимно-двойственных задач (задача I) имеет оптимальное решение, то и другая задача (задача II) имеет оптимальное решение, причем

$$\max f=\min\phi \Rightarrow f(X^*)=\phi(Y^*). \qquad (3.9)$$

Отсюда следует, что максимальная прибыль, которую можно получить от изготовления из остатков сырья продукции, совпадает с выручкой от продажи сырья «на сторону».

3.2.5. Вторая теорема двойственности

Теорема. а) Если в оптимальном решении прямой задачи (задача I) какой-либо ресурс используется не полностью, то его (говорят, поскольку собирались продавать «на сторону») «теневая» цена равна нулю.

б) Если процесс производства продукции нерентабелен, то его интенсивность в оптимальном решении равна нулю (т.е. соответствующая переменная равна нулю).

Доказательство. а) Пусть X^*, Y^* — оптимальные решения прямой и двойственной задач. Согласно основному неравенству двойственности (см. его запись в форме (3.7)), имеем

$$CX^* \le Y^*B. \tag{3.10}$$

Но также имеет место следующая цепочка соотношений

$$CX^* \le \left(Y^*A\right) \cdot X^* = Y^* \cdot \left(AX^*\right) \le Y^*B, \tag{3.11}$$

откуда по первой теореме двойственности тут же следует

$$CX^* = Y^*B. \tag{3.12}$$

Логика здесь очень проста: пусть центральная часть соотношения (3.11) есть «нечто», например, □, и у нас

$$CX^* \le \square \le Y^*B. \tag{3.13}$$

Однако по условиям теоремы X^*, Y^* — оптимальные решения, т.е. предположено, что они существуют, а поэтому из последнего неравенства (3.13) может быть только один вывод: $CX^* = Y^*B$.

Далее делаем вывод, что все приведенные в данном разделе неравенства являются в действительности равенствами, т.е.

$$\underline{\underline{CX^* = \left(Y^*A\right) \cdot X^*}} = \underline{Y^* \cdot \left(AX^*\right) = Y^*B}. \tag{3.14}$$

Разбивая теперь «длинное» соотношение (3.14) на два коротких, (записываемых в порядке подчеркивания одной или двумя чертами), имеем после переноса всех слагаемых в одну сторону два равенства

$$\left.\begin{aligned} Y^*\left(B - AX^*\right) = 0 \\ X^*\left(Y^*A - C\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

А в развернутом виде эти же соотношения запишутся в форме системы

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i^*\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.16}$$

Система уравнений (3.16) позволяет очень наглядно и просто завершить доказательство части а) рассматриваемой теоремы.

Действительно, поскольку все слагаемые первой суммы (речь идет о y_i^*) неотрицательны (тривиальные ограничения) а их сумма равна нулю (чтобы первая строка системы была равна нулю), то каждое слагаемое должно быть равно нулю: $y_i^* = 0.$ По той же причине должно быть: $x_j^* = 0,$ а все вместе приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} y_i^*\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right) = 0, i = \overline{1,m} \\ x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\}. \tag{3.17}$$

Из первого уравнения системы (3.17) непосредственно следует доказательство части а) теоремы: если *i*-тое ограничение исходной задачи (задача I) выполняется как строгое неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i$

(ресурс используется не полностью), то его «теневая» цена, а это переменная y_i^* двойственной задачи, равна нулю: $y_i^* = 0$.

Аналогично, из второго уравнения системы (3.17) непосредственно следует доказательство части б) теоремы: если *j*-тое ограничение двойственной задачи (задача II) выполняется как строгое неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$ (производственный процесс нерентабелен с точки зрения «теневых» цен y_i^*), то соответствующая переменная исходной задачи (задача I) x_j^* равна нулю: $x_j^* = 0$.

Теорема доказана и в части а), и в части б).

Теперь, мы надеемся, студентам станут вполне очевидными утверждения типа: «если, например, базисная переменная не равна нулю, то соответствующая ей свободная переменная равна нулю и, наоборот».

В заключение отметим, что условия на переменные, содержащиеся в системе (3.17), называют ***условиями дополняющей нежесткости***.

Лекция 4. Двойственный симплекс-метод

4.1. Третья теорема двойственности

Теорема. Значения переменных y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение $f_{\max}$ ее целевой функции. При этом имеет место

$$y_i^* = \frac{\partial f_{\max}}{\partial b_i}, i = \overline{1,m}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для сокращения объема выкладок рассмотрим случай $m = 2$. Пусть при малом изменении какого-либо из запасов ресурсов $b_i \left(i = 1,2\right)$ вектор $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*\right)$ остается оптимальным решением двойственной задачи.

Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи имеет вид

$$\phi_{\min} = \phi^* = b_1 y_1^* + b_2 y_2^*. \tag{4.2}$$

Изменим запас первого ресурса b_1 на незначительную величину Δb_1. Тогда изменение минимальных затрат на ресурсы будет равно:

$$\Delta\phi_1^* = \phi^*\left(b_1 + \Delta b_1, b_2\right) - \phi^*\left(b_1, b_2\right) =$$
$$= \left(b_1 + \Delta b_1\right) y_1^* + b_2 y_2^* - b_1 y_1^* - b_2 y_2^* = \Delta b_1 y_1^*.$$

По первой теореме двойственности $f_{\max} = \phi_{\min}$ или

$$f^* = \phi^* \Rightarrow \Delta f_{\max} = \Delta f_1^* = \Delta\phi_1^* = \Delta b_1 y_1^*,$$

откуда $y_1^* = \dfrac{\Delta f_{\max}}{\Delta b_1}$. Аналогично, $y_2^* = \dfrac{\Delta f_{\max}}{\Delta b_2}$. Переходя к пределу при $\Delta b_i \to 0$ в этих двух выражениях, получаем $y_i^* = \dfrac{\Delta f_{\max}}{\Delta b_i}$.

Из последнего выражения следует, что величина y_i^* характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении i-го ресурса. При $\Delta b_i = 1$ имеем $y_i^* = \Delta f_{\max}$, т.е. при увеличении i-го ресурса на единицу оптимальный доход возрастает на величину y_i^*.

Компоненты оптимального плана двойственной задачи y_i^* называются двойственными оценками, или, как уже отмечалось, «теневыми» ценами ресурсов. С помощью переменных y_i^* можно решать вопрос о целесообразности включения в план новых видов продукции.

Характеристикой того или иного варианта плана служит разность

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j. \tag{4.3}$$

Учитывая экономическое содержание двойственных оценок y_i^*, выражение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

можно рассматривать как удельные затраты на j-й технологический процесс. Если эти затраты превышают прибыль от реализации единицы J-го продукта, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j, \tag{4.4}$$

то производство j-го продукта ***нерентабельно***. В этом случае $\Delta_j > 0$ и согласно второй теореме двойственности $x_j^* = 0$, следовательно, новый вид продукции включать в план производства нецелесообразно. Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции можно включать в план.

4.2. Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим еще раз две взаимно-двойственные задачи в параллельном, так сказать, формате

Задача I

$$\max f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2,3\right)$$

Задача II

$$\min \phi = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3 \end{array}\right\} \qquad (4.5)$$

$$y_i \ge 0,\ i = 1,2$$

Преобразуем эти задачи каноническому виду

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = b_2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - y_3 = c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - y_4 = c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - y_5 = c_3 \end{array}\right\}. \qquad (4.6)$$

Приняв дополнительные переменные за базисные, перепишем системы ограничений (4.6) в виде

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = b_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_5 = b_2 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{array}\right\} \ (4.7) \quad \left.\begin{array}{l} y_3 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - c_1 \\ y_4 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - c_2 \\ y_5 = a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - c_3 \end{array}\right\}. \qquad (4.8)$$

Если в системе (4.7) числа $b_1 \ge 0, b_2 \ge 0,$ то переменные x_4, x_5 образуют в ней допустимый базис. Аналогично, если во второй системе (4.8) числа $c_1 \le 0,\ c_2 \le 0, c_3 \le 0,$ то переменные y_3, y_4, y_5 образуют в ней допустимый базис.

Чтобы не связывать себя условием неотрицательности свободных членов, расширим на некоторое время понятие допустимого базиса, сняв условие неотрицательности свободных членов.

Тогда между переменными двух задач можно установить естественное соответствие.

Рассмотрим, например, переменную x_4, являющуюся базисной в системе (4.7), и первое из уравнений системы. Очевидно, что коэффициенты при свободных переменных, т.е. числа a_{11}, a_{12}, a_{13} лишь знаками отличаются от коэффициентов при переменной $y_{1.}$

Поэтому будем считать, что переменной x_4 задачи I соответствует переменная y_1 задачи II. Аналогично, если взять, например, переменную y_3, являющуюся базисной в системе (4.8), и первое из уравнений системы, то можно заметить, что в ее выражении коэффициенты перед y_1, y_2 лишь знаком отличаются от коэффициентов перед x_1 во втором столбце системы (4.7).

Поэтому будем считать, что переменной y_3 задачи II соответствует свободная переменная x_1 задачи I.

В итоге устанавливаем следующее взаимное соответствие (табл. 6).

Таблица 6

ЗАДАЧА I				
Свободные			Базисные	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_3	y_4	y_5	y_1	y_2
Базисные			Свободные	
ЗАДАЧА II				

Согласно установленному соответствию имеет место следующее:

1. Базисным переменным оптимального решения одной из взаимно-двойственных задач соответствуют свободные (т.е. нулевые) компоненты оптимального решения другой задачи.
2. Свободные члены в выражении для базисных переменных одной из задач равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих свободных переменных в целевой функции другой задачи.

Поэтому и применяется метод одновременного решения пары взаимно-двойственных задач. Перечислим последовательность операций (или шагов), используемых в процессе решения.

1 шаг. Приводим обе задачи к каноническому виду и устанавливаем соответствие между переменными обеих задач.

2 шаг. Решаем с помощью симплекс-метода ту из двух задач, у которой свободные члены в выражении для базисных переменных неотрицательны.

3 шаг. По найденному оптимальному решению выбранной задачи записываем оптимальное решение двойственной задачи, используя свойство 2 (установленного соответствия), согласно которому компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных целевой функции исходной задачи, выраженной через свободные переменные ее оптимального решения.

Описанный метод называется двойственным симплекс-методом.

Лекция 5. Транспортная задача

5.1. Постановка задачи

Имеется m поставщиков однородной продукции. Ее запасы у i-го поставщика составляют a_i единиц $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Эта продукция используется n потребителями. Запросы потребителей составляют $b_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Стоимость перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю задана и равна c_{ij}.

Требуется составить такой план перевозок, при котором полностью удовлетворились бы запросы всех потребителей, а суммарные расходы на перевозки были бы минимальными.

Обозначим через x_{ij} количество продукции, которое планируется перевезти от i-го поставщика к j-му потребителю. Суммарные расходы при перевозке по выбранному плану $X=\left(x_{ij}\right),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ выразятся двойной суммой

$$\min f\left(X\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}. \tag{5.1}$$

Суммарное количество продукции, вывозимое от i-го поставщика, не может превосходить его начальных запасов продукции:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i,\left(i=\overline{1,m}\right). \tag{5.2}$$

Суммарное количество продукции, доставляемое j-му потребителю, должно быть не меньше его запросов:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_i,\left(i=\overline{1,n}\right). \tag{5.3}$$

Перевозки, очевидно, не могут быть отрицательными:

$$x_{ij} \ge 0, \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \right). \tag{5.4}$$

Задача (5.1)–(5.4) относится к классу задач линейного программирования, но ее решение может быть найдено более эффективными способами.

5.2. Закрытая модель транспортной задачи

Рассмотрим случай, когда имеющиеся суммарные запасы продукции равны необходимым суммарным запасам:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.5}$$

Транспортная задача, в которой выполняется условие (5.5), называется ***закрытой задачей***. В этом случае

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \left(i = \overline{1,m} \right), \tag{5.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \left(j = \overline{1,n} \right). \tag{5.7}$$

Решение транспортной задачи состоит из двух этапов.

На первом этапе находят ***начальный план*** перевозок. На втором этапе этот план улучшается и конечной целью является ***получение оптимального плана*** X^*, обеспечивающего минимум функции (5.1)

$$f\left(X^* \right) = \min f\left(X \right).$$

5.3. Определение начального плана. Метод минимального элемента

Рассмотрим следующий вариант транспортной задачи.

Четыре предприятия для производства продукции используют некоторое сырье. Спрос на сырье каждого из предприятий составляет соответственно: 120, 50, 190 и 110 единиц.

Сырье сосредоточено в трех пунктах. Предложения поставщиков следующие: 160, 140 и 170 единиц. На каждое предприятие сырье может завозиться от любого поставщика. Тарифы перевозок известны и задаются следующей матрицей (в ден. ед.)

$$C = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти начальный план перевозок.

Решение. Запишем данные задачи в виде таблицы (табл. 7). Назовем элемент a_i — *строчным*, а элемент b_j — *столбцовым*.

Таблица 7

$b_j \rightarrow$ / $a_i \downarrow$	120	50	190	110
160	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\boxed{160}$	0
140	120	0	0	20
170	0	50	30	90

Согласно методу минимального элемента первой вычисляется поставка с минимальным значением тарифа c_{ij}. Анализируем.

1. $\min c_{ij} = 1 = c_{13} \rightarrow x_{13} = \min\left(\underline{a_1}, b_3\right) = \min\left(\underline{160}, 190\right) = 160.$ т.е.

наименьшим является строчный элемент, расположенный в первой строке. В матрице C вычеркиваем первую строку, а в транспортной таблице (табл. 7) заполняем клетку $x_{13} = 160,$ а остальные клетки первой строки заполняем нулями. Находим неудовлетворенный спрос третьего потребителя: $b_3^{(1)} = 190 - 160 = 30.$

2. В укороченной матрице C (ведь первую строку мы уже вычеркнули) находим минимальный элемент (это 2), тогда

$$\min c_{ij} = 2 = c_{32} \to x_{32} = \min\left(a_3, \underline{b_2}\right) = \min\left(170, \underline{50}\right) = 50,$$

т.е. наименьшим является столбцовый элемент, расположенный во втором столбце, поэтому в матрице C вычеркиваем второй столбец

$$C = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{\underline{1}} & \cancel{2} \\ 4 & \cancel{5} & \cancel{9} & 8 \\ 9 & \cancel{\underline{2}} & \cancel{3} & 6 \end{pmatrix},$$

а в таблице заполняем третий столбец. Находим остатки сырья у третьего поставщика: $a_3^{(3)} = a_3^{(2)} - b_3^{(1)} = 120 - 30 = 90.$

4. Последний шаг. В очень сокращенной матрице C выбираем наименьший элемент (это очевидно 4) и тогда

$$\min c_{ij} = 4 = c_{21} \to x_{21} = \min\left(a_2, \underline{b_1}\right) = \min\left(140, \underline{120}\right) = 120.$$

В очень укороченной матрице C вычеркиваем первый столбец

$$C = \left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{\underline{1}} & \cancel{2} \\ \cancel{\underline{4}} & \cancel{5} & \cancel{9} & 8 \\ \cancel{9} & \cancel{\underline{2}} & \cancel{\underline{3}} & 6 \end{pmatrix},$$

а в таблице заполняем клетку $x_{21} = 120$ и в оставшейся клетке (3, 1) записываем 0.

Оставшиеся две клетки таблицы (5.1) можно заполнить, исходя из условия баланса по строкам и столбцам. Очевидно, что $x_{23} = 20,$ $x_{33} = 90.$

В результате имеем стоимость перевозок по полученному лишь начальному плану перевозок (см. выражение (5.1)):

$$f\left(X_0\right) = 160 \cdot 1 + 120 \cdot 4 + 20 \cdot 80 + 50 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 90 \cdot 6 = 1530 \text{ ден. ед.}$$

5.4. Оптимальный план транспортной задачи. Метод потенциалов

После нахождения начального плана X_0 исследуем его на оптимальность. Для обоснования алгоритма проверки оптимальности плана составим задачу двойственную данной.

Для этого обозначим переменные двойственной задачи, соответствующие уравнениям (5.6), посредством u_i, а уравнениям (5.7) — посредством v_j. Тогда задача, двойственная к задаче (5.1), (5.4), (5.6), (5.7), примет вид:

$$\max \phi(u,v) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j, \tag{5.8}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n} \tag{5.9}$$

Заметим, что переменные u_i, v_j могут быть как положительными, так и отрицательными, так как мы имеем дело с так называемыми *несимметричными двойственными задачами*.

Из второй теоремы двойственности следует, что допустимые решения x_{ij} исходной задачи и допустимые решения u_i, v_j двойственной задачи будут оптимальными, если

$$u_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i\right) = 0, \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5.10}$$

$$v_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j\right) = 0, \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{5.11}$$

$$x_{ij}\left(u_i + v_j - c_{ij}\right) = 0, \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right). \tag{5.12}$$

Обозначим базисные переменные посредством $x_{ij}^{Б}$. Отметим, что для невырожденной задачи $x_{ij}^{Б} > 0$. План перевозок называется *невырожденным*, если при решении транспортной задачи число заполненных клеток матрицы $X = (x_{ij})$ равно $(m + n - 1)$.

Для базисных переменных из (5.12) следует

$$u_i + v_j - c_{ij}^{Б} = 0. \tag{5.13}$$

Свободные переменные $x_{ij}^{C} = 0$. Для них определяющим становится условие (5.9), которое перепишется в виде

$$u_i + v_j - c_{ij}^{C} \le 0. \tag{5.14}$$

Отсюда вытекает следующий алгоритм проверки решения транспортной задачи на оптимальность.

1. Ставим в соответствие каждому поставщику переменную $u_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, а каждому потребителю — переменную $v_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, которые соответственно называются *потенциалами* поставщика и потребителя.

2. Решаем систему уравнений (5.13). При этом можно положить $u_1 = 0$, так как число уравнений равно (m + n – 1), а число неизвестных равно (m + n).

3. Подставляем найденные значения u_i, v_j в (5.14). Если условие (5.14) выполняется для всех свободных переменных x_{ij}^{C}, то найденное решение X_0 является оптимальным.

4. Если для некоторых x_{ij}^{C} имеет место неравенство

$$u_i + v_j - c_{ij}^{C} > 0, \tag{5.15}$$

то решение X_0 не является оптимальным и необходимо переходить к новому базисному решению.

Рассмотренный метод проверки решения на оптимальность называется *методом потенциалов.*

Проверим полученный нами в рассмотренном примере план X_0 на оптимальность. Кстати, здесь план X_0 записывается в форме матрицы 3×4:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

План невырожденный, так как $m+n-1=3+4-1=6$ совпадает с числом базисных переменных $x_{ij}^{Б}$.

Определим потенциалы производителей и потребителей. Составим систему уравнений (5.13) для базисных переменных:

$$u_i + v_j = c_{ij}^{Б}$$

$$
\begin{array}{lll}
x_{13} > 0 \to u_1 + v_3 = 1 & u_1 = 0 & v_3 = 1 \\
x_{21} > 0 \to u_2 + v_1 = 4 & & v_1 = 0 \\
x_{24} > 0 \to u_2 + v_4 = 8 & u_2 = 4 & \\
x_{32} > 0 \to u_3 + v_2 = 2 & & v_2 = 0 \\
x_{33} > 0 \to u_3 + v_2 = 3 & u_3 = 2 & \\
x_{34} > 0 \to u_3 + v_4 = 6 & & v_4 = 4
\end{array}
$$

Выпишем свободные переменные и составим для них разности

$$\Delta_{ij}^{C} = u_i + v_j - c_{ij}^{C}$$

$$x_{11} = 0 \to \Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 7 < 0$$

$$x_{12} = 0 \to \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 0 - 8 < 0$$

$$x_{14} = 0 \to \underline{\Delta_{14}} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0 \to X_0$$ — не оптимален

$$x_{22} = 0 \to \Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 4 + 0 - 5 = -1 < 0$$

$$x_{23} = 0 \to \Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 4 + 1 - 9 = -4 < 0$$

$$x_{31} = 0 \to \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 0 - 9 = -7 < 0$$

Итак, начальный план X_0 не оптимален, так как $\Delta_{14} > 0$.

5.5. Улучшение начального плана с помощью циклов пересчета

При построении нового плана перевозок выбираем наибольшую из всех положительных оценок Δ_{ij}^{C} свободных клеток.

В нашем случае она единственная, а именно $\Delta_{14} > 0$. Для выбранной клетки строим цикл пересчета.

Определение. *Циклом*, или *прямоугольным контуром*, называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы транспортной задачи (для которых $x_{ij} > 0$), а звенья — вдоль строк и столбцов.

При этом в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое в столбце.

Если же ломаная линия, образующая цикл, содержит точки пересечения, то они не рассматриваются в качестве вершин.

Для каждой свободной клетки (для которой $x_{ij}^{C} = 0$) таблицы можно построить единственный цикл. Делается это следующим образом:

1. Вершины цикла пересчета помечаем поочередно знаками «+» или «–», начиная с выбранной свободной клетки.
2. Из объемов груза, стоящих в клетках со знаком «–», выбираем наименьшее и обозначаем его посредством θ. В нашей задаче это будет

$$\theta = \min\left\{x_{ij}^{-}\right\} = \min\{160, 90\} = 90.$$

3. Перераспределяем величину θ по циклу, прибавляя найденное значение $\theta = 90$ к соответствующим числам, стоящим в клетках со знаком «+», и вычитая из чисел со знаком «–».

В результате изложенной процедуры пересчета получаем новое базисное решение, снова в виде матрицы 3×4:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^{-\bullet}70 & 90^{+\bullet} \\ 120 & \left[{}^{+}0\right] & 0 & 20_{-\bullet} \\ 0 & {}_{-\bullet}50 & {}_{+\bullet}120 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученный план проверяем на оптимальность. Выпишем базисные переменные $x_{ij}^{Б} > 0$ и найдем новые потенциалы u_i, v_j:

$$\begin{array}{lll}
x_{13} > 0 \rightarrow u_1 + v_3 = 1 & u_1 = 0 & v_3 = 1 \\
x_{14} > 0 \rightarrow u_1 + v_4 = 2 & & v_4 = 2 \\
x_{21} > 0 \rightarrow u_2 + v_1 = 4 & & v_1 = -2 \\
x_{24} > 0 \rightarrow u_2 + v_4 = 8 & u_2 = 6 & \\
x_{32} > 0 \rightarrow u_3 + v_2 = 2 & & v_2 = 0 \\
x_{33} > 0 \rightarrow u_3 + v_3 = 3 & u_3 = 2 &
\end{array}$$

Вычисляем оценки $\Delta_{ij}^C = u_i + v_j - c_{ij}^C$ для $c_{ij}^C = 0.$ Имеем

$$\Delta_{11} = -9 < 0,\ \Delta_{12} = -8 < 0,\ \underline{\Delta_{22} = 1 > 0}(!)$$
$$\Delta_{23} = -2 < 0, \Delta_{31} = -9 < 0, \Delta_{34} = -2 < 0.$$

Итак, план X_1 также является неоптимальным из-за положительной оценки для элемента x_{22}. Поэтому строим новый цикл пересчета для $x_{22} = 0.$ Из объемов грузов, стоящих клетках со знаком «–», выбираем наименьшее: $\theta = \min\left\{x_{ij}^-\right\} = \min\left\{50, 70, 20\right\} = 20.$

В результате получаем новый план.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверяем новый план на оптимальность. Вычисления дают:

$$\begin{array}{lll}
x_{13} > 0 \rightarrow u_1 + v_3 = 1 & u_1 = 0 & v_3 = 1 \\
x_{14} > 0 \rightarrow u_1 + v_4 = 2 & & v_4 = 2 \\
x_{21} > 0 \rightarrow u_2 + v_1 = 4 & & v_1 = -1 \\
x_{22} > 0 \rightarrow u_2 + v_2 = 5 & u_2 = 5 & \\
x_{32} > 0 \rightarrow u_3 + v_2 = 2 & & v_2 = 0 \\
x_{33} > 0 \rightarrow u_3 + v_3 = 3 & u_3 = 2 &
\end{array}$$

Теперь оценки $\Delta_{ij}^C = u_i + v_j - c_{ij}^C$ для $c_{ij}^C = 0.$ Имеем

$$\Delta_{11} = -8 < 0,\ \Delta_{12} = -8 < 0,\ \Delta_{23} = -3 < 0$$
$$\Delta_{24} = -1 < 0, \Delta_{31} = -8 < 0, \Delta_{34} = 2 + 2 - 6 = -2 < 0.$$

Итак, условия оптимальности выполнены, и поэтому $X_2 = X^*$ является *оптимальным планом*. Приведем одновременно две матрицы — оптимального плана $X_2 = X^*$ и стоимостей перевозок C для удобства подсчета минимального расхода на перевозки:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В результате минимальные затраты на перевозки будут равны (см. (5.1)):

$$\min f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

или

$$\min f(X) = f(X^*) = 50 \cdot 1 + 110 \cdot 2 + 120 \cdot 4 +$$
$$+ 20 \cdot 5 + 30 \cdot 2 + 140 \cdot 3 = 1330 \text{ ден. ед.}$$

Вспомним, что по начальному плану эта величина составляла 1530 ден. ед.

Таким образом, трех циклов оказалось достаточно для получения оптимального решения транспортной задачи.

Задания для практических занятий

Практическое занятие № 1

Тема: Графический метод решения задач Л.П.

Задача 1. Для производства двух видов продукции *A* и *B* предприятие использует сырье 4-х видов. Расход сырья каждого вида на единицу продукции и удельная прибыль заданы таблицей. Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Вид продукции	**Тип сырья**				**Прибыль от ед. продукции**
	S_1	S_2	S_3	S_4	
A	2	1	2	1	3
B	3	1	1	0	2
Запас сырья	21	8	12	5	

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть $X = (x_1, x_2)$ — план производства продукции. Тогда прибыль от реализации плана равна $f = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$.

Ограничение по ресурсам:

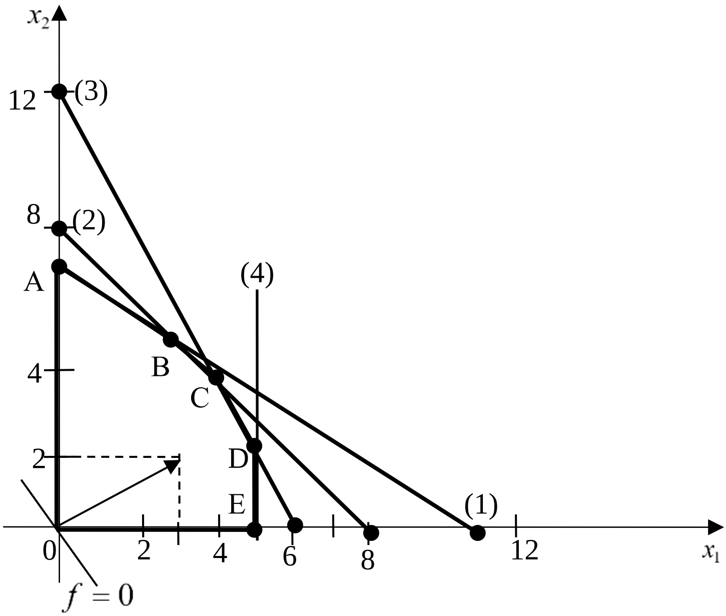
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 21 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ 2x_1 + x_2 \le 12 & (3) \\ x_1 \le 5 & (4) \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

$$\text{qrad}\, f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\} = \{3; 2\},$$

$$\max f = f(C),$$

$$C = (3) \cap (2),$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^* = 4 \\ x_2^* = 4 \end{matrix},$$

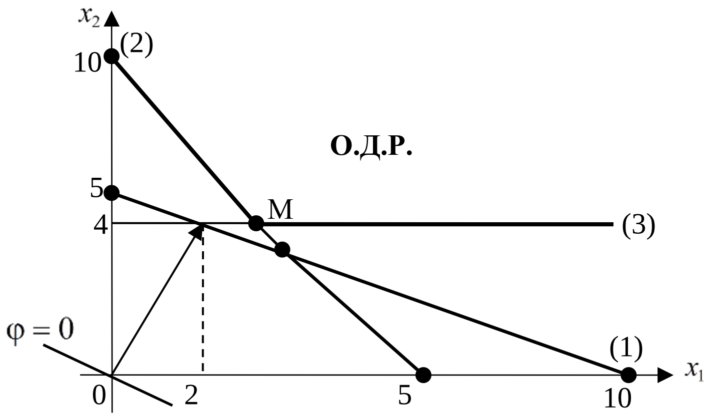
$\max f = 20.$

Ответ: $x_1^* = 4, x_2^* = 4, \max f = 20.$

Задача 2. Можно закупить корм двух видов (I и II). В каждой единице корма I вида содержится 1 единица витамина *A*, 2 единицы витамина *B* и нет витамина *C*; в каждой единице корма II вида содержится 2 единицы витамина *A*, 1 единица витамина *B* и 1 единица витамина *C*. Животному необходимо дать в сутки не менее 10 ед. витамина *A*, не менее 10 ед. витамина *B* и не менее 4 ед. витамина *C*. Составить наиболее дешевый рацион питания животного, если стоимость единицы корма I вида равна 2, а стоимость единицы корма II вида равна 4 ден. ед.

Решение. Пусть $X=(x_1,x_2)$ — рацион питания. Тогда $\phi=2x_1+4x_2 \Rightarrow \min$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2\ge 10 & (1)\\ 2x_1+x_2\ge 10 & (2)\\ 0\cdot x_1+x_2\ge 4 & (3)\end{cases}$$
$$x_{1,2}\ge 0.$$



$\text{qrad}\phi=(2;4)$,

$M=(2)\cap(3)$,

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=10\\ x_2=4\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} x_1^*=4\\ x_2^*=3\end{matrix},$$

$\min\phi=2x_1^*+4x_2^*=14.$

Ответ: $x_1^*=3; x_2^*=4; \min\phi=14.$

Задача 3. Решить графически:

$$\max f=x_1-3x_2-5x_3-x_4,$$
$$\begin{cases} x_1+4x_2+4x_3+x_4=5\\ x_1+7x_2+8x_3+2x_4=9\end{cases},$$
$$x_j\ge 0\left(j=\overline{1,4}\right).$$

Решение. Так как число неизвестных n = 4, а число уравнений системы ограничений m = 2, то $n - m$ = 2 и задача может быть решена графическим методом. Приведем систему ограничений к базисному виду, используя преобразование Жордана-Гаусса.

$$\begin{array}{ccc} x_1 \to \text{Б.П.} & \text{Б.П.} & x_4 \to \text{Б.П.} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} \boxed{1} & 4 & 4 & 1 & 5 & - \\ 1 & 7 & 8 & 2 & 9 & - \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 5 & x_1 \\ 0 & 3 & 4 & \boxed{1} & 4 & - \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 4 & x_4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_4 = 4 - 3x_2 - 4x_3 \end{cases}.$$

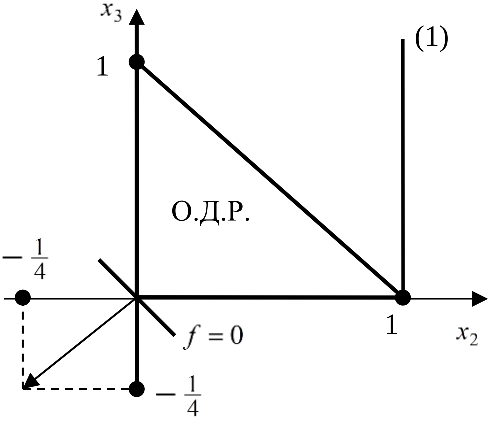
Поскольку x_1 и x_4 — базисные переменные, то $x_1 \geq 0,\ x_4 \geq 0$ или $\begin{cases} 1 - x_2 \geq 0 \\ 4 - 4x_2 - 4x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 1 & (1) \\ x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \end{cases}$

$$x_{2,3} \geq 0.$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$f = 1 - x_2 - 3\cancel{x_2} - 5\cancel{x_3} - 4 + 3x_2 + 4x_3.$$

$$\max f = -3 - x_2 - x_3 \quad (3).$$



Решаем задачу (1), (2), (3) графически.

qrad$f = (-1,1)$. Передвигая линию уровня $f = c$ по стрелке до момента выхода ее из О.Д.Р., получим

$$f_{\max} = f(0,0) = -3,$$

$$x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_1^* = 1, x_4^* = 4.$$

Ответ: $X^* = (1,0,0,4)$, $\max f = -3$.

Задание 4. Решить графически ($n - m = 2$).

$$\min f = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3 \\ \qquad x_2 - \ x_3 - \ x_4 - \ x_5 = 0, \\ x_1 + \qquad\qquad x_4 - \ x_5 = 0 \end{cases}$$

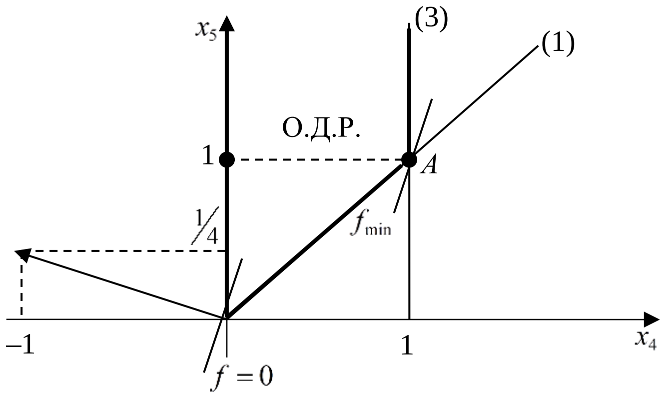
$$x_j \geq 0\left(j = \overline{1,5}\right).$$

Решение. Представим систему ограничений в базисном виде:

$$\begin{array}{c} x_1 \to \text{Б.П.} \qquad\qquad \text{Б.П.} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 & -2 & 3 & - \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & - \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_2 \to \text{Б.П.} \qquad\qquad \text{Б.П.} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 & 3 & x_1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -1 & 0 & - \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & -3 & - \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x_3 \to \text{Б.П.} \qquad\qquad \text{Б.П.} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 4 & -1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -3 & \boxed{-3} & 0 & -3 & - \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Б.П.} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_3 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_5 - x_4 \geq 0 \\ x_2 = 1 + x_5 \geq 0 \\ x_3 = 1 - x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 \geq x_4 & (1) \\ x_5 \geq -1 & (2). \\ x_4 \leq 1 & (3) \end{cases}$$



$x_{4,5} \geq 0 \qquad\qquad x_{4,5} \geq 0$

$\min f = 1 - 4x_4 + x_5$, $\text{qrad } f = (-4, 1)$.

$f_{\min} = f(A) = f(1,1) = -2$,

$x_4^* = 1$, $x_5^* = 1$, $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 0$.

Ответ: $X^* = (0;\ 2;\ 0;\ 1;\ 1)$, $\min f = -2$.

Задания для самостоятельной работы

1. С/х предприятие закупает удобрения двух видов. В единице массы удобрения № 1 содержится 3 условных единицы химического вещества *A*, 2 условных единицы вещества *B* и 1 — вещества *C*.

В единице массы удобрения № 2 содержится 1 условная единица химического вещества *A*, 1 условная единица вещества *B* и 1 — вещества *C*. На 1 га почвы необходимо внести не менее 9 условных единиц вещества *A*, 8 условных единиц вещества *B* и 6 условных единиц вещества *C*.

Составить наиболее экономный план закупки удобрений (в расчете на 1 га), если цена единицы массы удобрения № 1 составляет 3 денежных единицы, а цена единицы массы удобрения № 2 равна 2 денежным единицам.

Ответ: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ \min f = 14.$

2. Для производства продукции двух видов (*A* и *B*) предприятие использует сырье трех видов (1, 2 и 3) имеющееся в количестве соответственно 8, 6 и 9 единиц. Для производства 1 шт. продукции *A* требуется 2 ед. сырья № 1, 1 ед. сырья № 2 и 3 ед. сырья № 3, а для производства 1 шт. продукции *B* — 2, 2 и 0 единиц соответствующего сырья. Известно, что от реализации 1 шт. продукции *A* предприятие получит 1 ден. ед. прибыли, а 1 шт. продукции *B* — 3 ден. ед. Сколько единиц продукции каждого вида должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль?

Ответ: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 3,\ \max f = 9.$

3. Имеются два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины): B_1, B_2 и B_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый мини-

Витамины	**Необходимый минимум витаминов**	**Содержание витаминов в 1 кг корма**	
		I	**II**
B_1	9	3	1
B_2	8	1	2
B_3	12	1	6
Цена 1 кг корма		**4**	**6**

Ответ: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 3,\ \min f = 26.$

мум питательных веществ приведены в таблице. Составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида витаминов было бы не менее установленного предела.

4. Собственник располагает четырьмя видами ресурсов, которые необходимо распределить между шестью предприятиями. Предприятия различаются по экономическим условиям деятельности, в связи с чем имеют место разные издержки производства. Относительные уровни издержек заданы таблицей.

Предприятия	1	2	3	4	5	6
Издержки	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3

Распределение ресурсов по предприятиям заданы ограничениями:

1-й вид ресурсов: $4x_1 + x_4 = 16$,

2-й вид ресурсов: $2x_2 + x_5 = 10$,

3-й вид ресурсов: $x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 76$,

4-й вид ресурсов: $4x_1 + 3x_2 + x_6 = 24$,

где x_j — количество предприятий j-го типа $\left(j = \overline{1,6}\right)$.

Необходимо определить, какое количество предприятий каждого типа следует иметь, чтобы общие издержки были минимальными.

Ответ: $X^* = \left(4;\, 0;\, 16;\, 0;\, 10,\, 8\right)$, $\min f = 13,2$.

Практическое занятие № 2

Тема: Симплекс-метод

Задача 1. Для изготовления четырех видов продукции предприятие использует три вида сырья. На основании информации, приведенной в таблице, решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости продукции.

Тип сырья	**Нормы расхода сырья**				**Запасы сырья**
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	2	1	3	2	200
S_2	1	2	4	8	160

Продолжение табл.

Тип сырья	**Нормы расхода сырья**				**Запасы сырья**
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_3	2	4	1	1	170
Цена единицы изделия	5	7	3	8	

Решение. Пусть X = (x1, x2, x3, x4) — план производства продукции $P_j\left(j=\overline{1,4}\right)$.

Составим математическую модель задачи:

$$\max f = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 8x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 200 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 160 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \le 170 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\left(j=\overline{1,\ 4}\right).$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 200 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_6 = 160 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 170 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\left(j=\overline{1,\ 7}\right).$$

Запишем полученную систему в виде симплекс-таблицы:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad x_4 \to \text{Б.П.} \qquad\qquad b_i \ \ \text{Б.П.} \\ \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|c} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 200 & x_5 \\ \hline 1 & 2 & 4 & \boxed{8} & 0 & 1 & 0 & 160 & x_6 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 170 & x_7 \\ \hline -5 & -7 & -3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{array}\right) \nearrow \text{в С.П.} \end{array}$$

Из таблицы видно, что начальное решение $X_1 = \left(0,0,0,0,200,160,170\right)$ — базисное, допустимое, но не оптимальное, так как f — строка содержит отрицательные числа. Выбираем наибольшее из них по модулю, что соответствует выбору четвертого столбца как разрешающего и переводу свободной переменной x_4 в базисные. Находим наименьшее значение, до которого можно увеличивать x_4. Для этого найдем отношение свободных членов b_i к соответственным элементам разрешающего столбца $a_{i4}\left(i=\overline{1,3}\right)$.

Имеем $x_4 = \min\{100,\ \underline{20},\ 170\} = 20 \Rightarrow x_6 = 0 \Rightarrow$ в С.П.

Выделяем вторую строку, которая называется разрешающей. Элемент $a_{24} = 8$ является разрешающим. Переходим к новому базису, используя преобразование Жордана-Гаусса. Для этого делим разрешающую строку на разрешающий элемент $\boxed{8}$, разрешающий столбец заполняем нулями всюду, кроме разрешающей строки, а остальные элементы симплекс-таблицы преобразуем по схеме:

$$\tilde{\bigcirc} = \frac{\square \cdot \bigcirc - \nabla \cdot \triangle}{\square}$$

В результате получим новую симплекс-таблицу:

$$\begin{array}{c}
\qquad\qquad x_2 \rightarrow \text{Б.П.} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 160 & x_5 \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 20 & x_4 \\
\hdashline
\frac{15}{8} & \boxed{\frac{15}{4}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & 150 & x_7 \\
\hline
-4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 160 & f
\end{array}\right) \longrightarrow \text{в С.П.}
\end{array}$$

$x_2 = \min\{320, 80, \underline{40}\} =$
$= 40 \Rightarrow x_7 = 0 \Rightarrow$ в С.П.

Применяя аналогичные преобразования, переходим к следующим симплекс-таблицам:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 \to \text{Б.П.} & & & & & & & & & \text{Б.П.} \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
\frac{3}{2} & 0 & \frac{29}{15} & 0 & 1 & -\frac{7}{30} & -\frac{2}{15} & 140 & x_5 \\
0 & 0 & \frac{7}{15} & 1 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & 10 & x_4 \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{4}{15} & 40 & x_2 \\
\hline
-\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} & 360 & f
\end{array}\right).
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
x_1 = \min\left\{\frac{280}{3}, \infty, \underline{80}\right\} = \\
= 80 \Rightarrow \underline{x_2 = 0} \Rightarrow \text{в С.П.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{r} \text{Б.П.} \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
0 & & & & & & & 20 & x_5 \\
0 & & & & & & & 10 & x_4 \\
1 & 2 & \frac{4}{15} & 0 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} & 80 & x_1 \\
\hline
0 & 3 & \frac{31}{15} & 0 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{32}{15} & 480 & f
\end{array}\right).
\end{array}$$

Критерий оптимальности выполнен, и мы получили следующее решение:

$$x_1^* = 80,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 10,\ \max f = 480.$$

Заметим, что добавочные переменные x_5, x_6, x_7 имеют экономический смысл: они являются остатками сырья после выполнения оптимального плана $X^* = (80,\ 0,\ 0,\ 10)$.

В нашем случае $x_5^* = 20 \Rightarrow$ сырье S_1 используется не полностью, следовательно, оно недефицитное. $x_6^* = x_7^* = 0 \Rightarrow$ сырье $S_{1,}$ S_2 используется полностью $\Rightarrow$ эти два вида сырья являются дефицитными.

Задача 2. Торговая фирма для продажи товаров $P_j\ (j = 1, 2, 3)$ использует ресурсы: время и площади торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида даны в таблице.

Ресурсы	Объем ресурсов	Затраты ресурсов		
		P_1	P_2	P_3
Время (чел/час)	370	0,5	0,7	0,6
Площадь (м^2)	90	0,1	0,3	0,2
Прибыль от реализации одной партии товара		5	8	6

Определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую фирме наибольшую прибыль.

Решение. $X = (x_1, x_2, x_3)$ план продаж. Математическая модель задачи:

$$\max f = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,7x_2 + 0,6x_3 \le 370 \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 \le 90 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = 1,2,3 \right).$$

x_1 $x_2 \to$ Б.П. x_3 x_4 x_5 b_i Б.П.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 0,5 & 0,7 & 0,6 & 1 & 0 & 370 & x_4 \\ 0,1 & \boxed{0,3} & 0,2 & 0 & 1 & 90 & x_5 \\ \hline -5 & -8 & -6 & 0 & 0 & 0 & f \end{array}\right) \to \quad x_2 = \min\left\{ \frac{3700}{7}; \underline{300} \right\} = 300 \Rightarrow x_5 = 0 \Rightarrow \text{в С.П.}$$

$x_1 \to$ Б.П.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} \boxed{\frac{4}{15}} & 0 & \frac{2}{15} & 1 & -\frac{7}{3} & 160 & x_4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{10}{3} & 300 & x_2 \\ \hline -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{80}{3} & 2400 & f \end{array}\right) \quad x_1 = \min\left\{ \underline{600}, 900 \right\} = 600 \Rightarrow x_4 = 0 \Rightarrow \text{ в С.П.}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{15}{4} & -\frac{35}{4} & 600 & x_1 \\ 0 & 1 & & & & 100 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{35}{4} & \frac{25}{4} & 3800 & f \end{array}\right).$$

$$X^* = \left(600, 100, 0\right), \ \max f = 3800.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Решить задачу оптимального использования ресурсов по критерию максимума общей стоимости продукции.

Ресурсы	Запасы ресурсов	Нормы затраты ресурсов		
		P_1	P_2	P_3
S_1	200	1	4	3
S_2	80	1	1	2
S_3	140	1	1	2
Цена единицы изделия		40	60	80

Ответ: $x_1^* = 40,\ x_2^* = 40,\ x_3^* = 0,\ f^* = 4000.$

2. Для изготовления четырех видов продукции P_j предприятие использует три вида сырья S_i. На основании информации, приведенной в таблице, найти ассортимент изделий, дающий максимальную прибыль от реализации всех изделий.

Тип сырья	Запасы сырья	Нормы расхода сырья на единицу изделия			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	200	2	2	1	2
S_2	300	4	5	3	6
S_3	600	1	1	2	1
Прибыль от реализации 1 ед. изделия		6	4	7	9

Ответ: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 100,\ x_4^* = 0,\ \max f = 700.$

Практическое занятие № 3

Тема: Двойственные задачи ЛП. Теоремы двойственности

Задача 1. Составить задачу, двойственную данной. Решив двойственную задачу, найти оптимальное решение данной задачи, используя теоремы двойственности.

$$\min \phi = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array} \right. .$$

$$x_{1,2,3} \geq 0$$

Решение. Поставив в соответствие каждому ограничению исходной задачи переменную y_i двойственной задачи, запишем математическую модель двойственной задачи:

$$\max f = 4y_1 + 6y_2,$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 \leq 4 \\ 3y_1 + y_2 \leq 2 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right.$$

$$y_{1,2} \geq 0.$$

Решив эту задачу графически, получим

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = \frac{4}{5},\ \max f = \frac{24}{5}.$$

Применим вторую теорему двойственности:

$$y_2^* > 0 \Rightarrow 5x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 6 \Rightarrow 5x_1^* + 0 + 0 = 6 \Rightarrow x_1^* = \frac{6}{5}$$

$$4y_1^* + 5y_2^* = 4 = 4 \Rightarrow x_1^* > 0$$

$$3y_1^* + y_2^* = \frac{4}{5} < 2 \Rightarrow x_2^* = 0.$$

$$-y_1^* + 2y_2^* = \frac{8}{5} < 3 \Rightarrow x_3^* = 0$$

Итак, $X^* = \left(\frac{6}{5}, 0, 0\right)$. По первой теореме двойственности $\min \phi = \max f = \frac{24}{5}$.

Задача 2. $\max f = 4x_1 + 2x_2$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \qquad\ \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right. ,$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решив данную задачу графически, найти оптимальное решение двойственной задачи, используя теоремы двойственности.

Решение. Графическое решение данной задачи дает $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $\max f = 20$.

Поставим каждому ограничению исходной задачи переменную $y_i \left(i = 1, 2, 3 \right)$ двойственной задачи. Составим двойственную задачу:

$$\min \phi = 6y_1 + 4y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ y_1 \qquad + \ \ y_3 \ge 2 \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right.$$

$$y_{1,2,3} \ge 0.$$

Применим вторую теорему двойственности:

$$x_1^* > 0 \Rightarrow y_1^* + y_2^* + 2y_3^* = 4 \Rightarrow y_2^* = 2$$

$$x_2^* > 0 \Rightarrow y_1^* + y_3^* \qquad = 2 \Rightarrow y_1^* = 2$$

$$x_1^* + x_2^* = 2 + 4 = 6 = 6 \Rightarrow y_1^* > 0$$

$$x_1^* = 4 = 4 \Rightarrow y_2^* > 0$$

$$2x_1^* + x_2^* = 10 < 12 \Rightarrow y_3^* = 0.$$

Итак, $Y^* = \left(2,\ 2,\ 0\right)$, $\min \phi = \max f = 20$.

Задача 3. Некоторое предприятие располагает возможностями для производства четырех видов продукции при использовании трех видов ресурсов. Нормы расхода ресурсов, их запасы и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице.

Ресурсы	**Запасы ресурсов**	**Нормы расхода ресурсов**			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	80	7	2	2	6
S_2	480	5	8	4	3
S_3	130	2	4	1	8
Прибыль от ед. продукции		3	4	3	1

Службе маркетинга предприятия необходимо проверить, будет ли оптимальным план выпуска продукции $X = (0, 30, 10, 0)$ по критерию максимума прибыли.

Решение. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — план выпуска. Составим математическую модель задачи:

$$\max f = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80 \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4} \right).$$

Предложенный план $X = (0, 30, 10, 0)$ является допустимым, при этом $f(X) = 150$ ден. ед.

Составим двойственную задачу:

$$\min \phi = 80y_1 + 480y_2 + 130y_3,$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 5y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ 2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \ge 4 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3 \\ 6y_1 + 3y_2 + 8y_3 \ge 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right.,$$

$$y_{1,2,3} \ge 0.$$

Применим вторую теорему двойственности:

$$x_2^* > 0 \Rightarrow 2y_1^* + 8y_2^* + 4y_3^* = 4$$

$$x_3^* > 0 \Rightarrow 2y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 3$$

$$7x_1^* + 2x_2^* + 2x_3^* + 6x_4^* = 60 + 20 = 80 \Rightarrow y_1^* > 0$$
$$5x_1^* + 8x_2^* + 4x_3^* + 3x_4^* = 240 + 40 < 480 \Rightarrow y_2^* = 0$$
$$2x_1^* + 4x_2^* + x_3^* + 8x_4^* = 120 + 10 = 130 \Rightarrow y_3^* > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2y_1^* + 4y_3^* = 4 \\ 2y_1^* + y_3^* = 3 \end{cases} \Rightarrow y_3^* = \frac{1}{3},\ y_1^* = \frac{4}{3}.$$

Итак,

$$Y^* = \left(\frac{4}{3},\ 0, \frac{1}{3}\right)$$
$$\min \phi = \phi\left(Y^*\right) = 150$$
$$f\left(X\right) = \phi\left(Y^*\right) = 150.$$

Отсюда следует, что $X = \left(0,\ 30,\ 10,\ 0\right) = X^*$ является оптимальным планом по первой теореме двойственности.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти минимум функции $\phi = 10x_2 - 3x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 + 1 \le 0 \\ \ \ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, 3.$$

Составить задачу, двойственную данной, и решить ее графически. Используя теоремы двойственности, найти решение исходной задачи.

Ответ: $x_1^* = {}^1\!/_5,\ x_2^* = {}^7\!/_5,\ x_3^* = 0,\ \ \min \phi = 14,$

$$y_1^* = 2,\ y_2^* = 4,\ \max f = 14.$$

2. Найти минимум функции $f = 2x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_1 - \ \ x_2 \ge -2 \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решить данную задачу графическим методом. Составить задачу, двойственную данной, и решить ее, используя симплекс-метод.

Ответ: $x_1^* = 4,\ x_2^* = 6,\ \min f = 20,$

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = 4/3,\ y_3^* = 2/3,\ \max \phi = 20.$$

Практическое занятие № 4

Тема: Двойственный симплекс-метод

Задача 1. В дневном рационе содержание трех витаминов должно составлять не менее требуемой величины. Витамины содержатся в продуктах трех видов. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и стоимость единицы продукта. Определить дневной рацион, обеспечивающий получение дневной нормы витаминов при минимальных денежных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Содержание витаминов в продукте**			**Потребность в витаминах**
	I	**II**	**III**	
A	1	2	3	60
B	2	4	2	50
C	1	4	3	12
Стоимость продукта	9	12	10	

Решение. $X = (x_1, x_2, x_3)$ — дневной рацион, где x_j — количество единиц j-го продукта в дневном рационе ($j = 1, 2, 3$).

Составим математическую модель задачи.

$$\min f = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 50 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 12 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

$$x_{1,2,3} \ge 0.$$

Решать исходную задачу симплекс-методом нерационально, так как первое базисное решение получается недопустимым: X_1 = (0,0,0, –60, –50, –12) и для получения оптимального решения придется затратить много времени.

Применим двойственный симплекс-метод, позволяющий одновременно решать две взаимно-двойственные задачи. Составим задачу, двойственную данной:

$$\max \phi = 60y_1 + 50y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \le 9 \\ 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \le 12 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 9 \\ 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + y_5 = 12 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_6 = 10 \end{cases}$$

$$y_{1,2,3} \ge 0.$$

Решим ее с помощью симплекс-таблиц

$y_1 \Rightarrow$ Б.П. Б.П.

1	2	1	1	0	0	9	y_4
2	4	4	0	1	0	12	y_5
$\boxed{3}$	2	3	0	0	1	10	y_6
–60	–50	–12	0	0	0	0	ϕ

$$y_1 = \min\left\{9, 6, \underline{\frac{10}{3}}\right\} = \frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_6 = 0 \Rightarrow \text{С.П.}$$

$y_2 \Rightarrow$ Б.П.

0	$\frac{4}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$	y_4
0	$\boxed{\frac{8}{3}}$	2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$	y_5
1	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	y_1
0	–10	48	0	0	20	200	ϕ

$$y_2 = \min\left\{\frac{17}{4}, \underline{2}, 5\right\} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_5 = 0 \Rightarrow \text{С.П.}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c} 0 & 0 & & & & & 3 & y_4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 2 & y_2 \\ 1 & 0 & & & & & 2 & y_1 \\ \hline 0 & 0 & 53{,}5 & 0 & 7{,}5 & 17{,}5 & 200 & \phi \end{array}\right) \Rightarrow Y^* = (2, 2, 0, 3, 0, 0)$$

$$\max \phi = 200.$$

Используя соответствие между переменными взаимно-двойственных задач:

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array},$$

в последней $\phi-$строке находим $x_1^* = 0,\ x_2^* = 7{,}5,\ x_3^* = 17{,}5,$ $\min f = \max \phi = 200$ ден. ед.

Задача 2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Используя информацию, приведенную в таблице, найдите план выпуска продукции из условия максимизации ее стоимости и определите ценность каждого ресурса.

Тип сырья	**Запасы сырья**	**Нормы расхода сырья**			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	18	1	2	1	0
S_2	30	1	1	2	1
S_3	40	1	3	3	2
Цена изделия		12	7	18	10

Решение. Составим математическую модель данной задачи. Пусть $X = (x_1, x_{,2}, x_3, x_4)$ — план производства. Тогда

$$\max f = 12x_1 + 7x_2 + 18x_3 + 10x_4.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18 & \Big| \ y_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 30 & \Big| \ y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 40 & \Big| \ y_3 \end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0\left(j=\overline{1,4}\right).$$

Решим ее симплекс-методом:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & x_3 \to \text{Б.П.} & & & & & & \text{Б.П.} \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
1 & 2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 18 & x_5 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 & x_6 \\
1 & 3 & \boxed{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 40 & x_7 \\
-12 & -7 & -18 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & f
\end{array}\right)
\quad x_3=\min\left\{18, 15, \underline{\frac{40}{3}}\right\}=\frac{40}{3}\Rightarrow
$$

$$\Rightarrow x_7=0\Rightarrow \text{С.П.}$$

$$
\begin{array}{c}
x_1 \to \text{Б.П.}
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
\boxed{2/3} & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 0 & -1/3 & 14/3 & x_5 \\
1/3 & -1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 10/3 & x_6 \\
1/3 & 1 & 1 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 40/3 & x_3 \\
\hline
-6 & 11 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & 240 & f
\end{array}\right)
\quad x_1=\min\left\{\underline{7}, 10, 40\right\}=7
$$

$$\Rightarrow x_5=0\Rightarrow \text{С.П.}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_4 \to \text{Б.П.} & & & & & & & & \text{Б.П.}
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
1 & 3/2 & 0 & -1 & 3/2 & 0 & -1/2 & 7 & x_1 \\
0 & -3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 1 & x_6 \\
0 & 1/2 & 1 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 1/2 & 11 & x_3 \\
0 & 20 & 0 & -4 & 9 & 0 & 3 & 282 & f
\end{array}\right)
\quad x_4=\min\left\{\infty, \infty, \underline{11}\right\}\Rightarrow
$$

$$\Rightarrow x_3=0\Rightarrow \text{С.П.}$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
1 & & & 0 & & 0 & & 18 & x_1 \\
0 & & & 0 & & 1 & & 1 & x_6 \\
0 & 1/2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 11 & x_4 \\
\hline
0 & 22 & 4 & 0 & 7 & 0 & 5 & 326 & f
\end{array}\right)
$$

$X^*=(18,\ 0,\ 0,\ 11)$ — оптимальный план $\max f=326$.

Составим соответствие между переменными взаимно-двойственных задач

$$\begin{array}{cccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

По последней f — строке находим: $y_1^* = 7,\ \ y_2^* = 0,\ \ y_3^* = 5$

$y_1^* > 0 \Rightarrow S_1$ – дефицитный ресурс.

$y_2^* = 0 \Rightarrow S_2$ – недефицитный ресурс.

$y_3^* > 0 \Rightarrow S_3$ – дефицитный ресурс.

$y_1^* > y_3^* \Rightarrow S_1$ – более ценный ресурс.

Задача 3. На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий прибыль.

Ресурсы	**Объем ресурсов**	**Нормы затрат ресурсов**		
		P_1	P_2	P_3
S_1	18	1	2	1
S_2	16	2	1	1
S_3	8	1	1	0
S_4	6	0	1	1
Цена изделия		3	4	2

1) Определить дефицитность ресурсов.

2) Оценить целесообразность введения в план производства четвертого вида изделий с нормой затрат 1, 2, 2, 0 соответственно и с прибылью 15 ден. ед. на одно изделие.

Решение. Обозначим через $X = (x_1, x_2, x_3)$ — план производства математическая модель задачи:

$$\max f = 3x_1 + 4x_2 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 + x_3 \le 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right.$$

$$x_j \ge 0\left(j = \overline{1,3}\right).$$

Решаем данную задачу симплекс-методом:

$$\begin{array}{c}
\qquad x_2 \to \text{Б.П.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Б.П.}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 & x_4\\
2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 & x_5\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & x_6\\
\hline
0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & x_7\\
\hline
-3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x_2 = \min\left(9, 16, 8, \underline{6}\right) = 6 \Rightarrow\\
x_7 = 0 \Rightarrow \text{С.П.}
\end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{c}
x_1 \to \text{Б.П.}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & x_4\\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 10 & x_5\\
\hline
\boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & x_6\\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & x_2\\
\hline
-3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 24 & f
\end{array}\right)
\end{array}
\ \text{С.П.}
\qquad
\begin{array}{l}
x_1 = \min\left\{6, 5, \underline{2}, \infty\right\} = 2 \Rightarrow\\
x_6 = 0 \Rightarrow \text{С.П.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\qquad x_3 \to \text{Б.П.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Б.П.}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 4 & x_4\\
\hline
0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -2 & 1 & 6 & x_5\\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & x_1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & x_2\\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 30 & f
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x_3 = \min\left\{\infty, \underline{3}, \infty, 6\right\} = 3 \Rightarrow\\
x_5 = 0 \Rightarrow \text{С.П.}
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 1 & & & & 4 & x_4\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 3 & x_3\\
1 & 0 & 0 & 0 & & & & 5 & x_1\\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & 3 & x_2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 33 & f
\end{array}\right).$$

Таким образом, $x_1^* = 5,\ x_2^* = 3,\ x_3^* = 3,\ x_4^* = 4,\ x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$, $\max f = 33$.

Составим соответствие между переменными прямой и двойственной задач:

$$\begin{array}{ccc|cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4
\end{array}$$

1) $y_1^* = 0 \Rightarrow S_1$ — ресурс не дефицитен.

$y_2^* = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow S_2$ — ресурс дефицитен.

$y_3^* = 2 > 0 \Rightarrow S_3$ — ресурс дефицитен.

$y_4^* = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow S_4$ — ресурс дефицитен.

Наиболее ценный ресурс: S_3.

2) Оценим целесообразность введения в план четвертого вида продукции. Так как $\Delta_4 = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_i^* - c_4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 + 0 \cdot \frac{3}{2} - 15 = -10 < 0$, введение в план производства четвертого вида продукции целесообразно, т.к. прибыль c_4 превышает затраты $\sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_i^*$.

Задания для самостоятельной работы

1. В дневном рационе содержание витаминов A, B, C не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известно содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, удовлетворяющий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и, используя двойственный симплекс-метод, найти решение исходной задачи.

Витамины	Потребность в витаминах	Содержание витаминов в продукте		
		I	II	III
A	3	2	3	0
B	3	4	1	2
C	5	5	0	4
Стоимость единицы продукции		11	5	6

Ответ: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 5/4,\ \min f = 12{,}5.$

2. На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий прибыль.

Ресурсы	Наличие ресурсов	Затраты ресурсов на единицу продукции	
		P_1	P_2
S_1	2000	2	4
S_2	1400	4	1
S_3	800	2	1
Прибыль на единицу продукции		40	60

Провести экономический анализ задачи. В связи с этим выяснить:

1) увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно;
2) целесообразность включения в план производства нового изделия P_3 с нормой затрат 6, 2, 3 соответственно и с прибылью 80 ден. ед.

Ответ: $x_1^* = 200,\ x_2^* = 400.$

1) Оценка ресурса S_1: $y_1^* = 40/3$,

оценка ресурса S_2: $y_2^* = 0$,

оценка ресурса S_3: $y_3^* = 20/3$.

Ресурс S_2 недефицитен. Ресурсы S_1 и S_3 — дефицитны. Наиболее выгодно увеличение объемов ресурса S_1.

2) Изделие P_3 включать в план невыгодно.

Практическое занятие № 5

Тема: Транспортная задача

Задача 1. Имеются три пункта поставки однородного груза $A_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ и пять пунктов потребления этого груза $B_j\left(j=\overline{1,5}\right)$. В пунктах A_i находится груз a_i, который необходимо доставить в пункты B_j в количестве b_j. Стоимость перевозок из пункта A_i в пункт B_j задан матрицей:

$$C=\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 19 & 25 & 30 & 32 & 20 \\ 40 & 21 & 12 & 21 & 41 \\ 15 & 14 & 28 & 27 & 22 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальный план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза при условии минимизации общей стоимости перевозок, если a_1 = 210, a_2 = 450, a_3 = 290; b_1 = 200, b_2 = 220, b_3 = 170, b_4 = 210, b_5 = 150.

Решение. Запишем данные в виде таблицы:

a_i \ b_j	200	220	170	210	150
210	130	0	0	0	80
450	0	0	170	210	70
290	70	220	0	0	0

$$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{5}b_j=950\Rightarrow \text{закрытая модель } T\text{-задачи.}$$

Найдем начальный план перевозок методом минимального элемента матрицы тарифов C.

1) $\min c_{ij}=12=c_{23}\Rightarrow x_{23}=\min\left(a_2,\underline{b_3}\right)=170,$ так как $b_3=170$ — столбцовый элемент, то в матрице C вычеркиваем третий столбец, а в транспортной таблице заполняем третий столбец,

полагая $x_{23} = 170$, $x_{13} = x_{33} = 0$. Пересчитываем оставшиеся запасы груза у второго поставщика: $a_2^{(1)} = 450 - 170 = 280$.

2) $\min c_{ij} = 14 = c_{32} \Rightarrow x_{32} = \min\left(a_3, \underline{b_2}\right) = 220.$

$a_3^{(2)} = 290 - 220 = 70.$

3) $\min c_{ij} = 15 = c_{31} \Rightarrow x_{31} = \min\left(\underline{a_3^{(2)}}, b_1\right) = \min\left(\underline{70},\ 200\right) = 70.$

$b_1^{(3)} = 200 - 70 = 130.$

4) $\min c_{ij} = 19 = c_{11} \Rightarrow x_{11} = \min\left(a_1, \underline{b_1^{(3)}}\right) = \min\left(210,\ \underline{130}\right) = 130.$

$a_1^{(4)} = 210 - 130 = 80.$

5) $\min c_{ij} = 20 = c_{15} \Rightarrow x_{15} = \min\left(a_1^{(4)},\ b_5\right) = \min\left(\underline{80}, 150\right) = 80.$

Две оставшиеся клетки транспортной таблицы заполняем из условия баланса по строкам и столбцам.

Проверим на оптимальность начальный план:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 130^- & 0 & 0 & 0 & 0^+ \\ 0 & \boxed{0^+} & 170 & 210 & 70^- \\ 70^+ & 220^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число базисных переменных равно 7, $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7 \Rightarrow$ решение невырожденное.

Найдем потенциалы поставщика u_i и потребителя v_j, используя вторую теорему двойственности:

$$\begin{array}{l|c|l}
x_{11} > 0 \Rightarrow u_1 + v_1 = 19 & u_1 = 0 & v_1 = 19 \\
x_{15} > 0 \Rightarrow u_1 + v_5 = 20 & & v_5 = 20 \\
x_{23} > 0 \Rightarrow u_2 + v_3 = 12 & & v_3 = -9 \\
x_{24} > 0 \Rightarrow u_2 + v_4 = 21 & & v_4 = 0 \\
x_{25} > 0 \Rightarrow u_2 + v_5 = 41 & u_2 = 21 & \\
x_{31} > 0 \Rightarrow u_3 + v_1 = 15 & u_3 = -4 & \\
x_{32} > 0 \Rightarrow u_3 + v_2 = 14 & & v_2 = 18
\end{array}$$

Найдем оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ для свободных переменных:

$$
\left.\begin{array}{l}
x_{12} = 0 \\
x_{13} = 0 \\
x_{14} = 0 \\
x_{21} = 0 \\
x_{22} = 0 \\
x_{33} = 0 \\
x_{34} = 0 \\
x_{35} = 0
\end{array}\right. \Rightarrow
\begin{array}{l}
\Delta_{12} = 18 - 25 < 0 \\
\Delta_{13} = -9 - 30 < 0 \\
\Delta_{14} = 0 \\
\Delta_{21} = 21 + 19 - 40 = 0 \\
\underline{\Delta_{22}} = 21 + 18 - 21 = 18 \underline{> 0} \Rightarrow \text{решение не оптимально} \\
\Delta_{33} = -4 - 9 - 28 < 0 \\
\Delta_{34} = -4 + 0 - 27 < 0 \\
\Delta_{35} = -4 + 20 - 22 < 0
\end{array}
$$

Перераспределим поставки, построив цикл пересчета с начальной вершиной в клетке (2,2).

Найдем $\theta = \min\left\{x_{\bar{ij}}\right\} = \min\left\{70, 130, 220\right\} = 70.$ Получим первый план:

$$
X_1 = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 70 & 170 & 210 & 0 \\ 140 & 150 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{— невырожденное решение.}
$$

Проверим этот план на оптимальность методом потенциалов:

$$
\begin{array}{l|ll|l}
u_1 + v_1 = 19 & u_1 = 0 & v_1 = 19 & \Delta_{12} = 18 - 25 < 0 \\
u_1 + v_5 = 20 & & v_5 = 20 & \Delta_{13} = 9 - 30 < 0 \\
u_2 + v_2 = 21 & u_2 = 3 & & \Delta_{14} = 18 - 32 < 0 \\
u_2 + v_3 = 12 & & v_3 = 9 & \Delta_{21} = 3 + 19 - 40 < 0 \\
u_2 + v_4 = 21 & & v_4 = 18 & \Delta_{25} = 3 + 20 - 41 < 0 \\
u_3 + v_1 = 15 & u_3 = -4 & & \Delta_{33} = -4 + 9 - 28 < 0 \\
u_3 + v_2 = 14 & & v_2 = 18 & \Delta_{34} = -4 + 18 - 27 < 0 \\
\end{array}
$$

$$\Delta_{35} = -4 + 20 - 22 < 0$$

Итак, $X_1 = X^*$ — оптимальное решение.

Задача 2. Решить транспортную задачу:

$a_i \backslash b_j$	40	50
50		
30		
20		

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 100,\ \sum_{j=1}^{2} b_j = 90 \Rightarrow$ открытая модель. Введем фиктивного потребителя с потребностями $b_3 = 100 - 90 = 10$ и в матрице тарифов добавляем столбец из нулей.

$a_i \backslash b_j$	40	50	10
50	40^-	10^+	0
30	0	30	0
20	$\boxed{0}^+$	10^-	10

$$\left(C_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим, что при нахождении минимального элемента матрицы (C_{ij}) фиктивные нули в расчет не принимаем.

1) $x_{11} = \min\left(a_1, \underline{b_1}\right) = b_1 = 40,\ a_1^{(1)} = 50 - 40 = 10.$

2) $x_{12} = \min\left(\underline{a_1^{(1)}},\ b_2\right) = 10,\ b_2^{(2)} = 50 - 10 = 40.$

3) $x_{22} = \min\left(\underline{a_2},\ b_2^{(2)}\right) = \min\left(\underline{30}, 40\right) = 30,\ b_2^{(3)} = 10.$

Очевидно, что $x_{33} = 10,\ x_{32} = 10.$

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5.$ Решение невырожденное, т.к. число базисных переменных также равно 5.

Исследуем полученное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$
\begin{array}{llll}
x_{11} > 0 & u_1 + v_1 = 6 & u_1 = 0 & v_1 = 6 \\
x_{12} > 0 & u_1 + v_2 = 7 & & v_2 = 7 \\
x_{22} > 0 \Rightarrow & u_2 + v_2 = 8 & u_2 = 1 & \\
x_{32} > 0 & u_3 + v_2 = 9 & u_3 = 2 & \\
x_{33} > 0 & u_3 + v_3 = 0 & & v_3 = -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x_{13} = 0 & \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -2 < 0 \\
x_{21} = 0 & \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 < 0 \\
x_{23} = 0 \Rightarrow & \Delta_{23} = -1 < 0 \\
x_{31} = 0 & \underline{\Delta_{31}} = 2 + 6 - 7 = 1 > 0 \Rightarrow \text{решение не оптимально.}
\end{array}
$$

Строим цикл с начальной вершиной в клетке (3,1). Находим $\min\left\{x_{ij}^{-}\right\} = \min\{10, 40\} = \underline{10} = \theta.$ Перемещая $\theta = 10$ по циклу согласно знакам, получим новое невырожденное решение.

$$
X_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \Phi \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Проверяем на оптимальность:

$$
\begin{array}{llll}
u_1 + v_1 = 6 & u_1 = 0 & v_1 = 6 & \Delta_{13} = -1 < 0 \\
u_1 + v_2 = 7 & & v_2 = 7 & \Delta_{21} = -1 < 0 \\
u_2 + v_2 = 8 & u_2 = 1 & & \Delta_{23} = 0 \\
u_3 + v_1 = 7 & u_3 = 1 & & \Delta_{32} = -1 < 0 \\
u_3 + v_3 = 0 & & v_3 = -1 &
\end{array}
$$

Итак, $X_1 = X^* = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 0 & 30 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 3. Решить транспортную задачу:

a_i \ b_j	20	20	60
20	0	20^-	$\boxed{0^+}$
20	0	0	20
60	20	$\underline{0}^+$	40^-

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение

1) x_{12} = min ($\underline{20}$, $\underline{20}$) = 20, т.е. строчный элемент a_1 равен столбцовому элементу b_2. В этом случае в матрице C вычеркиваются и первая строка, и второй столбец, а в транспортной таблице заполняются одновременно первая строка и второй столбец. Это приводит к вырожденному решению.

2) x_{31} = min (60, $\underline{20}$) = 20.

3) Очевидно, x_{23} = 20, x_{33} = 40.

Итак, число базисных переменных равно 4, а $m+n-1=5$. Решение вырожденное. Это приводит к тому, что нам не удастся найти все потенциалы u_i и v_j

$$\begin{array}{llll}
x_{12} > 0 \Rightarrow u_1 + v_2 = 4 & u_1 = 0 & v_2 = 4 \\
x_{23} > 0 \Rightarrow u_2 + v_2 = 5 & u_2 = 0 & \\
x_{31} > 0 \Rightarrow u_3 + v_1 = 4 & & v_1 = 3 \\
x_{33} > 0 \Rightarrow u_3 + v_3 = 6 & & v_3 = 5
\end{array}.$$

Для того чтобы продолжить решение системы, будем считать один из нулей базисным. Например, $\underline{x_{32} = 0} \Rightarrow u_3 + v_2 = 5$. После этого находим все потенциалы: $u_3 = 1$ и т.д.

При подсчете $\Delta_{ij}^c = u_i + v_j - c_{ij}$ исключаем x_{32} из числа свободных переменных.

$$\begin{matrix} x_{11}=0 \\ x_{13}=0 \\ x_{21}=0 \\ x_{22}=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_{11}=-2<0 \\ \underline{\Delta_{13}}=1>0 \\ \Delta_{21}=-3<0 \\ \Delta_{22}=0 \end{matrix} \Rightarrow \text{решение не оптимально.}$$

Строим цикл пересчета, считая подчеркнутый ноль (x_{32} = 0) базисным.

$$\theta=\min\left\{x_{ij}^{-}\right\}=\min\left\{20,40\right\}=20.$$

Получаем новый план перевозок:

$$X_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 20 \\ 20 & 20 & 20 \end{pmatrix}\text{ — невырожденное решение.}$$

$$\left.\begin{matrix} u_1+v_3=4 \\ u_2+v_3=5 \\ u_3+v_1=4 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_3=6 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} u_1=0 & v_3=4 \\ u_2=1 & \\ & v_1=2 \\ & v_2 3 \\ u_3=2 & \end{matrix}\right| \begin{matrix} \Delta_{11}=-3<0 \\ \Delta_{12}=-1<0 \\ \Delta_{21}=-3<0. \\ \Delta_{22}=0 \\ \ \end{matrix}$$

Итак, $X_1=X^*$.

Задания для самостоятельной работы

1. Два торговых склада поставляют продукцию в четыре магазина. Найти распределение перевозок, позволяющее минимизировать общие транспортные издержки.

a_i \ b_j	50	100	75	75
100	4	3	5	6
200	8	2	4	7

Ответ: $X^*=\begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 75 & 25 \end{pmatrix}$.

2. Решить транспортную задачу:

a_i \ b_j	140	300	160
90	2	5	2
400	4	1	5
110	3	6	8

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Решить транспортную задачу:

Поставщики	**Мощности поставщиков**	**Потребители и их спрос**			
		1	2	3	4
		45	35	55	65
1	40	4	1	3	5
2	60	2	2	3	7
3	90	4	3	5	3

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 & 0 \\ 45 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 65 \end{pmatrix}.$

4. Решить транспортную задачу:

Поставщики	**Мощности поставщиков**	**Потребители и их спрос**		
		1	2	3
		80	20	120
1	40	4	2	3
2	60	6	5	3
3	100	1	2	5
4	20	6	4	5

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 \\ 80 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$

Контрольная работа

Вариант 1

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	60	1	2	3
B	50	2	4	2
C	12	1	4	3
Стоимость продукции		9	12	10

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	300	15	10
S_2	300	10	15
S_3	180	0	10
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются два пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i (i = 1,2)$ и потреб-

ности в нем $b_j (j = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	20	30	50
40	7	8	6
50	9	8	7

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 2

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известно содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	2	1	1	2
B	3	3	1	1
C	1	5	1	4
Стоимость продукции		15	7	12

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	120	10	0
S_2	150	10	5
S_3	150	5	10
Удельная прибыль		3	4

3. Имеется два пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза a_i(i = 1,2) и потребности в нем b_j(j = 1,2,3), а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	40	40	20
30	4	8	6
50	9	5	7

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 3

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известно содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	12	2	1	6
B	9	1	1	3
C	6	2	1	2
Стоимость продукции		14	6	24

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	300	20	10
S_2	300	10	20
S_3	180	0	15
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются два пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i(i = 1,2)$ и потребности в нем $b_j(j = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

b_j / a_i	50	30	20
40	6	8	7
50	7	8	9

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 4

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	3	2	3	0
B	3	4	1	2
C	5	5	0	4
Стоимость продукции		11	5	6

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	500	5	20
S_2	500	20	5
S_3	440	0	20
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются два пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i (i = 1,2)$ и потребности в нем $b_j (j = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	20	40	40
30	6	8	4
50	7	5	9

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 5

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	10	3	1	2
B	8	2	0	3
C	5	2	2	0
Стоимость продукции		6	4	5

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	65	0	10
S_2	30	2	4
S_3	30	4	2
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются два пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i (i = 1,2)$ и потребности в нем $b_j (j = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	35	45	20
50	9	5	5
30	8	7	9
20	6	8	4

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 6

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	8	4	0	2
B	7	0	3	3
C	6	2	3	1
Стоимость продукции		6	5	9

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	Запас ресурса	Вид продукции	
		I	II
S_1	60	2	3
S_2	60	3	2
S_3	75	5	0
Удельная прибыль		5	4

3. Имеются три пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i(i = 1,2,3)$ и потребности в нем $b_j(i = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	25	35	40
40	9	7	6
40	6	7	5
20	5	4	6

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 7

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	Потребность в витаминах	Содержание витаминов в продукте		
		I	II	III
А	4	1	2	2
В	4	0	2	1

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
C	6	2	1	0
Стоимость продукции		10	10	10

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	180	3	6
S_2	180	6	3
S_3	180	0	8
Удельная прибыль		5	4

3. Имеются три пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i(i = 1,2,3)$ и потребности в нем $b_j(i = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	20	20	60
20	5	4	4
20	6	4	5
60	4	5	6

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 8

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	4	2	1	1
B	8	1	2	1
C	6	1	1	2
Стоимость продукции		5	5	5

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	300	1	4
S_2	300	4	1
S_3	100	1,5	0
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются три пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i(i = 1,2,3)$ и потребности в нем $b_j(i = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

b_j / a_i	50	30	20
20	5	9	4
45	5	7	8
35	9	8	6

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 9

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
А	6	0	3	2
В	7	2	1	2
С	9	4	2	2
Стоимость продукции		8	7	5

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	**Запас ресурса**	**Вид продукции**	
		I	II
S_1	280	5	2
S_2	280	2	5
S_3	300	0	6
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются три пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i(i = 1,2,3)$ и потребности в нем $b_j(i = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

b_j / a_i	40	40	20
40	6	5	6
35	7	7	4
25	9	6	5

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Вариант 10

1. В дневном рационе содержание трех витаминов не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известны содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, обеспечивающий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение.

Вид витамина	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	5	3	0	2
B	9	4	4	3

Вид витамина	Потребность в витаминах	Содержание витаминов в продукте		
		I	II	III
С	4	0	1	2
Стоимость продукции		13	8	7

2. Для производства двух видов продукции предприятие использует три вида ресурсов. Используя данные, приведенные в таблице, определить план выпуска продукции, при котором общая прибыль будет наибольшей. Составить взаимно-двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

Вид ресурса	Запас ресурса	Вид продукции	
		I	II
S_1	300	5	10
S_2	300	10	5
S_3	300	12	0
Удельная прибыль		3	4

3. Имеются три пункта поставки однородного груза и три пункта потребления этого груза. Запасы груза $a_i (i = 1,2,3)$ и потребности в нем $b_j (i = 1,2,3)$, а также затраты на перевозку от поставщика A_i к потребителю B_j, представлены в таблице:

a_i \ b_j	20	20	60
60	4	5	6
20	4	4	5
20	5	6	4

Найти оптимальный план перевозок груза с наименьшими общими затратами на перевозку.

Расчетные задания по линейному программированию

Задание 1.

Для производства двух видов продукции $P_j\left(j=\overline{1,2}\right)$ предприятие использует три вида ресурсов $S_i\left(i=\overline{1,3}\right)$. Нормы расхода ресурса каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида заданы технологической матрицей $A = (a_{ij})$, элементы которой приведены в таблице. В ней же указаны оптовые цены C_j единицы продукции каждого вида и запасы ресурсов b_i необходимые предприятию. Требуется определить: план выпуска продукции из условия максимизации ее стоимости.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	15	10	10	15	0	10	300	300	180	35	45
2	10	0	10	5	5	10	120	170	250	35	45
3	12	40	5	5	15	0	480	120	330	35	45
4	20	10	5	20	30	0	280	420	300	35	45
5	10	5	5	10	5	0	500	400	225	35	45
6	5	10	14	0	20	10	300	140	350	35	45
7	10	5	0	20	5	10	400	400	250	35	45
8	10	50	50	10	0	20	300	300	110	35	45
9	5	10	40	5	30	0	300	400	240	35	45
10	20	40	40	20	0	10	600	600	120	35	45
11	1	2	2	1	0	4	30	30	48	10	20
12	2	1	1	2	3	0	12	12	15	4	5
13	2	3	1	0	2	1	21	4	10	3	2
14	2	5	8	5	5	0	20	40	20	5	4
15	2	4	4	1	2	0	2000	850	300	40	60
16	1	3	2	1	0	1	18	16	5	2	3
17	12	4	4	4	3	12	300	120	252	30	40
18	0,2	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	100	180	100	100	160
19	7	8	8	7	5	3	112	112	75	4	3

Продолжение табл.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
20	3,5	1	0,5	2	1	1	350	240	150	20	10
21	2	2	1	2	3	0	12	8	15	2	3
22	5	10	20	10	5	20	420	520	350	35	45
23	10	20	10	5	20	5	580	420	380	35	45
24	10	5	20	5	15	25	300	500	600	35	45
25	5	10	10	5	20	5	500	380	450	35	45
26	1	1	1	0	2	1	6	4	12	4	2
27	1	1	1	0	2	1	6	3	10	4	2
28	1	1	0	1	2	1	6	4	12	2	4
29	1	1	0	1	2	1	6	3	10	2	4
30	1	2	0	1	2	1	6	2,5	6	3	1

Задание 2.

Фирма реализует три типа товаров $P_j\left(j=\overline{1,3}\right)$, используя при этом три вида ресурсов в количестве «b_i» $\left(i=\overline{1,3}\right)$. Количество средств i-го вида, используемых при реализации единицы товара j-го типа, заданы матрицей (a_{ij}). Доход от продажи единицы j-го товара составляет «c_j» денежной единицы. Определить плановый объем и структуру товарооборота так, чтобы доход фирмы был максимальным.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	3	6	4	2	1	2	2	3	1	180	50	40	6	5	5
2	3	2	1	2	1	3	4	2	1	420	600	900	3	3	4
3	16	18	9	7	7	2	9	2	3	520	140	810	8	6	4
4	4	8	2	3	8	4	12	4	6	116	240	432	8	6	6
5	8	10	20	4	13	8	2	18	12	800	520	940	3	6	7

Продолжение табл.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
6	1	4	0	0	3	1	2	0	5	36	50	80	6	16	25
7	17	5	5	8	6	6	4	2	4	850	1120	1060	8	7	4
8	0,1	0,2	0,4	0,05	0,02	0,02	3	1	2	1100	120	8000	3	5	4
9	1	4,3	2,6	5	1,5	3	3	3,9	4,3	640	800	860	18	15	15
10	4	2	1	3	1	3	1	2	5	180	210	236	10	14	12
11	2	2	4	4	3	2	2	3	1	24	12	18	16	20	18
12	1	4	3	1	1	2	1	1	2	200	80	140	40	60	80
13	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	9	10	16
14	1	2	1	3	0	2	1	4	0	430	460	420	3	2	5
15	1	2	4	2	4	2	1	1	2	360	250	220	9	11	15
16	1	2	0	2	1	0	0	1	1	500	550	200	3	4	1
17	1	1	1	1	3	5	2	1	4	2	15	12	2	3	5
18	1	2	1	1	1	3	3	1	2	7	3	6	3	4	6
19	6	7	2	5	2	8	10	8	6	20	18	25	9	6	5
20	12	14	15	14	14	22	30	35	25	5000	8000	9000	2	2,8	1,4
21	12	10	9	15	18	20	6	4	4	220	400	100	30	32	30
22	5	5	2	4	0	3	0	2	4	1200	300	800	5	8	6
23	1	2	1	3	4	4	4	2	3	9	12	10	60	50	12
24	1	2	1	2	1	2	3	1	2	10	6	12	3	4	1
25	1	3	5	1	1	1	2	1	4	15	7	12	2	3	1
26	1	1	1	2	1	3	3	1	4	7	9	12	1	1	1
27	1	1	1	2	1	2	3	1	6	6	7	9	5	2	4
28	1	2	3	3	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	3	1	2	1	3	1	2	3	5	6	3	4	6
30	2	1	0	0	2	1	0	1	0	500	550	200	3	4	1

Задание 3

Известно, что содержание трех питательных веществ A_i в рационе должно быть не менее «b_i»$\left(i=\overline{1,3}\right)$ единиц. Указанные питательные вещества содержатся в продуктах $P_j\left(j=\overline{1,3}\right)$. В одном килограмме j-го продукта содержится a_{ij} единиц i-го питательного вещества. Известны цены «c_j» одного килограмма продукта P_j. Определить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	1	3	4	2	4	2	1	4	3	60	50	12	9	12	10
2	50	70	180	10	6	3	2	3	1	200	210	87	1,5	2	6
3	2	1	3	1	2	1,5	3	4	2	6	8	12	2	3	2,5
4	1	6	20	3	3	1	1	1	1	90	70	25	8	9	13
5	4	2	6	2	4	3	6	8	4	12	16	24	4	6	5
6	4	3	1	3	1	2	2	3	5	10	14	12	180	210	244
7	1	1	1	4	1	1	3	2	2	40	60	80	200	80	140
8	1	3	1	2	0	4	1	2	0	3	2	5	430	460	420
9	12	15	6	10	18	4	9	20	4	30	32	30	220	400	100
10	3	2	2	6	1	3	4	2	1	6	5	5	180	50	40
11	2	4	2	2	3	3	4	2	1	16	20	18	24	12	18
12	1	0	2	4	3	0	0	1	5	6	16	25	36	50	80
13	8	2	1	4	8	2	2	4	8	1	1	1	1	1	1
14	3	2	1	1	3	4	1	0	1	30	70	50	1	0,5	0,8
15	1	2	1	0,5	1,5	2	0,5	2	1,5	25	30	6	9	12	10
16	3	2	3	1	1	1	2	3	2	6	5	6	1	1	1
17	1	1	2	3	1	1	5	1	4	2	3	1	15	7	12
18	1	1	3	2	1	1	1	3	2	3	4	6	7	3	6
19	1	2	4	2	3	5	3	4	4	5	2	3	3	2	10
20	1	2	3	1	1	1	1	2	6	5	2	4	6	7	9
21	1	1	2	1	3	1	1	5	4	2	3	5	2	15	12
22	6	5	10	7	2	8	2	8	6	9	6	5	20	18	25
23	1	3	4	2	4	2	1	4	3	60	50	12	9	12	10
24	1	2	3	2	1	1	1	2	2	3	4	1	10	6	12
25	1	2	3	1	1	1	1	3	4	1	1	1	7	9	12
26	1	2	1	2	4	1	4	2	2	9	11	15	360	250	220

Продолжение табл.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
27	1	1	3	2	1	1	1	3	2	3	4	6	5	3	6
28	1	1	2	3	1	1	5	1	4	2	3	5	15	2	12
29	2	1	3	1	3	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1
30	0,1	0,05	3	0,2	0,02	1	0,4	0,02	2	3	5	4	1100	120	8000

Задание 4

Решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости. Запасы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в таблице.

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на 1 изделие**			**Запасы сырья**
	A	*B*	*C*	
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
III	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Цена изделия	c_1	c_2	c_3	

Требуется:

1. Определить план выпуска продукции *A*, *B*, *C* из условия максимизации ее стоимости.
2. Составить математическую модель двойственной задачи.
3. Используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального решения двойственной задачи — двойственные оценки $y_i^* \left(i = \overline{1,3}\right)$.
4. Указать наиболее дефицитный и недефицитный ресурс, если он имеется.

Значение / Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	4	2	1	3	1	3	1	2	5	180	210	244	10	14	12
2	1	4	3	1	1	2	1	1	2	200	80	140	40	60	80
3	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	9	10	16
4	1	2	1	3	0	2	1	4	0	430	460	420	3	2	5
5	2	3	4	1	4	5	3	4	2	150	180	120	8	7	6
6	15	20	25	2	3	2,5	35	60	20	1200	150	3000	300	250	450
7	10	20	23	1	1	1	5	6	6	600	30	144	35	60	63
8	5	7	4	5	2	1	2	1	1	24	10	6	18	12	8
9	6	4	3	5	3	2	4	5	4	12	25	18	1	2	3
10	2	1	6	3	3	9	2	1	2	12	27	6	14	6	22
11	4	1	2	6	1	3	6	1	1	8	18	6	24	4	8
12	0	2	5	2	4	2	1	0	1	5	4	2	20	8	30
13	1	3	0	1	0	2	1	3	2	4	7	12	3	8	5
14	1	2	1	2	1	1	1	1	0	18	16	8	3	4	2
15	17	5	5	8	6	6	4	2	4	850	1120	1060	8	7	4
16	2	1	0	0	2	1	0	1	0	500	550	200	3	4	1
17	1/6	3/7	1/4	1/4	1/7	1/4	1/6	1/7	3/8	400	250	200	120	100	150
18	1	1	1	1/2	1	5	1/2	1/2	20	6000	5000	9000	80	100	300
19	1	2	0	1	1	2	2	0	3	1	2	1	3	1	4
20	1	1	0	1	0	2	1	1	1	2	3	4	1	1	1
21	1	2	0	2	1	0	0	1	1	500	550	200	3	4	1
22	12	10	9	15	18	20	6	4	4	220	400	100	30	32	30
23	5	5	2	4	0	3	0	2	4	1200	300	800	5	8	6
24	3	6	4	2	1	2	2	3	1	180	50	40	6	5	5
25	3	2	1	2	1	3	4	2	1	420	600	900	3	3	4
26	16	18	9	7	7	2	9	2	3	520	140	810	8	6	4
27	4	8	2	3	8	4	12	4	6	116	240	432	8	6	6
28	8	10	20	4	13	8	2	18	12	800	520	940	3	6	7
29	1	4	0	0	3	1	2	0	5	36	50	80	6	16	25
30	4	2	4	8	6	6	17	5	5	1060	1120	850	4	7	4

Задание 5

Имеются три пункта поставки однородного груза $A_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ и пять пунктов потребления этого груза $B_j\left(j=\overline{1,5}\right)$. В пунктах A_i

находится груз $a_i\left(i=\overline{1,\,3}\right)$. Груз необходимо доставить в пункты B_j в количестве $b_j\left(j=\overline{1,5}\right)$. Расстояние между пунктами A_i и B_j в километрах заданы матрицей (d_{ij}), $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,5}$. Требуется найти оптимальный план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза при условии минимизации общего пробега автомобилей, используя параметры, представленные ниже.

Вариант / Значение	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a_1	200	200	250	350	300	350	200	230	200	200	150	330	150	300	300
a_2	175	450	200	330	250	200	250	250	300	350	150	270	200	350	300
a_3	225	250	200	270	200	300	200	170	250	300	200	350	100	200	250
b_1	100	100	120	210	210	170	190	140	210	270	100	220	90	145	150
b_2	130	125	130	170	170	140	100	90	150	130	70	170	150	195	140
b_3	80	325	100	220	220	200	120	160	120	190	130	210	75	200	115
b_4	190	250	160	150	150	195	110	110	135	150	110	150	60	140	225
b_5	100	100	110	200	200	145	130	150	135	110	90	200	75	170	220
d_{11}	5	5	27	3	4	22	28	40	20	24	15	10	15	18	18
d_{12}	7	8	36	12	8	14	27	19	10	50	3	12	23	30	20
d_{13}	4	7	35	9	13	16	18	25	12	45	6	11	26	35	23
d_{14}	2	10	31	1	2	28	27	26	13	27	10	20	19	25	15
d_{15}	5	3	29	7	7	30	24	35	16	15	30	40	18	40	24
d_{21}	7	4	22	2	9	19	18	42	25	20	12	14	17	12	25
d_{22}	1	2	23	4	4	17	26	25	19	32	8	8	13	14	15
d_{23}	3	2	26	11	11	26	27	27	20	40	12	9	14	22	16
d_{24}	1	5	32	2	9	36	32	15	14	35	16	11	25	20	19
d_{25}	10	6	35	10	17	36	21	38	10	30	25	15	10	35	29
d_{31}	2	7	35	7	3	37	27	46	17	22	14	6	12	10	6
d_{32}	3	3	42	14	16	30	33	27	18	16	11	6	21	28	11
d_{33}	6	5	38	12	10	31	23	36	15	18	9	12	24	23	10
d_{34}	8	9	32	5	1	39	31	40	10	28	8	14	12	19	8
d_{35}	7	2	39	8	4	41	34	45	17	20	15	20	9	30	9

Вари-ант / Зна-че-ние	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_1	350	200	100	630	150	160	100	300	300	300	200	270	210	200	300
a_2	400	250	150	710	170	90	700	350	230	250	300	450	450	250	200
a_3	400	250	200	820	110	140	980	120	320	300	250	330	290	300	200
b_1	200	80	50	400	110	90	90	110	190	130	120	190	200	100	120
b_2	280	260	200	520	120	60	180	250	150	130	140	210	220	150	150
b_3	240	100	60	480	80	80	150	140	130	150	160	200	170	200	80
b_4	220	140	100	560	50	70	120	150	180	190	180	230	210	100	160
b_5	210	120	40	540	70	90	80	120	200	250	150	220	150	200	140
d_{11}	14	7	10	7	7	5	45	80	25	17	16	37	19	20	22
d_{12}	8	9	11	9	2	3	21	120	20	21	21	30	25	27	44
d_{13}	6	15	6	15	11	2	75	180	22	24	24	15	30	33	26
d_{14}	20	4	7	4	5	4	53	150	31	32	22	20	32	25	52
d_{15}	16	18	8	18	9	8	41	50	32	24	20	35	20	34	24
d_{21}	6	13	10	13	8	7	37	60	11	23	25	16	40	22	18
d_{22}	1	25	11	12	4	6	43	70	18	10	30	20	21	36	16
d_{23}	2	8	8	8	3	5	71	50	20	15	35	12	12	34	24
d_{24}	12	15	9	15	6	3	12	65	15	20	20	17	21	28	42
d_{25}	8	5	12	5	1	1	67	90	16	26	27	21	41	26	48
d_{31}	12	5	12	5	3	8	83	30	10	20	34	10	15	26	44
d_{32}	6	11	12	14	5	9	24	80	9	25	26	26	14	29	32
d_{33}	4	6	10	6	10	4	42	120	16	22	25	20	28	27	16
d_{34}	18	20	12	20	7	5	62	140	20	24	28	25	27	26	16
d_{35}	14	12	14	12	8	2	31	90	25	25	21	29	22	28	22

Задания для самостоятельной работы

К практическому занятию №1

1. С/х предприятие закупает удобрения двух видов. В единице массы удобрения № 1 содержится 3 условные единицы химического вещества *A*, 2 условные единицы вещества *B* и 1 — вещества *C*.

В единице массы удобрения № 2 содержится 1 условная единица химического вещества *A*, 1 условная единица вещества *B* и 1 — вещества *C*. На 1 га почвы необходимо внести не менее 9 условных единиц вещества *A*, 8 условных единиц вещества *B* и 6 условных единиц вещества *C*.

Составить наиболее экономный план закупки удобрений (в расчете на 1 га), если цена единицы массы удобрения № 1 составляет 3 денежных единицы, а цена единицы массы удобрения № 2 равна 2 денежным единицам.

Ответ: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 4, \min f = 14.$

2. Для производства продукции двух видов (*A* и *B*) предприятие использует сырье трех видов (1, 2 и 3) имеющееся в количестве соответственно 8, 6 и 9 единиц. Для производства 1 шт. продукции *A* требуется 2 ед. сырья № 1, 1 ед. сырья № 2 и 3 ед. сырья № 3, а для производства 1 шт. продукции *B* — 2, 2 и 0 единиц соответствующего сырья. Известно, что от реализации 1 шт. продукции *A* предприятие получит 1 ден. ед. прибыли, а от реализации 1 шт. продукции *B* — 3 ден. ед. Сколько единиц продукции каждого вида должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль?

Ответ: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 3, \max f = 9.$

3. Имеются два вида корма I и II, содержащих питательные вещества (витамины): B_1, B_2 и B_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице. Составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида витаминов было бы не менее установленного предела.

Витамины	Необходимый минимум витаминов	Содержание витаминов в 1 кг корма	
		I	II
B_1	9	3	1
B_2	8	1	2
B_3	12	1	6
Цена 1 кг корма		4	6

Ответ: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 3, \min f = 26.$

4. Собственник располагает четырьмя видами ресурсов, которые необходимо распределить между шестью предприятиями. Предприятия различаются по экономическим условиям деятельности, в связи с чем имеют место разные издержки производства. Относительные уровни издержек заданы таблицей.

Предприятия	1	2	3	4	5	6
Издержки	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3

Распределение ресурсов по предприятиям задано ограничениями:

1-й вид ресурсов: $4x_1 + x_4 = 16$,

2-й вид ресурсов: $2x_2 + x_5 = 10$,

3-й вид ресурсов: $x_3 + x_4 + 6x_5 = 76$,

4-й вид ресурсов: $4x_1 + 3x_2 + x_6 = 24$,

где x_j — количество предприятий j-го типа $\left(j = \overline{1,6}\right)$.

Необходимо определить, какое количество предприятий каждого типа следует иметь, чтобы общие издержки были минимальными.

Ответ: $X^* = \left(4; 0; 16; 0; 10, 8\right),\ \min f = 13,2.$

К практическому занятию №2

1. Решить задачу оптимального использования ресурсов по критерию максимума общей стоимости продукции.

Ресурсы	**Запасы ресурсов**	**Нормы затраты ресурсов**		
		P_1	P_2	P_3
S_1	200	1	4	3
S_2	80	1	1	2
S_3	140	1	1	2
Цена единицы изделия		40	60	80

Ответ: $x_1^* = 40,\ x_2^* = 40,\ x_3^* = 0,\ f^* = 4000.$

2. Для изготовления четырех видов продукции P_j предприятие использует три вида сырья S_i. На основании информации, приведенной в таблице, найти ассортимент изделий, дающий максимальную прибыль от реализации всех изделий.

Тип сырья	**Запасы сырья**	**Нормы расхода сырья на единицу изделия**			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	200	2	2	1	2
S_2	300	4	5	3	6
S_3	600	1	1	2	1
Прибыль от реализации 1 ед. изделия		6	4	7	9

Ответ: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 100,\ x_4^* = 0,\ \max f = 700$.

К практическому занятию № 3

1. Найти минимум функции $\phi = 10x_2 - 3x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 1 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Составить задачу, двойственную данной, и решить ее графически. Используя теоремы двойственности, найти решение исходной задачи.

Ответ: $x_1^* = 1/5$, $x_2^* = 7/5$, $x_3^* = 0$, $\min \phi = 14$,

$y_1^* = 2$, $y_2^* = 4$, $\max f = 14$.

2. Найти минимум функции $f = 2x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_1 - \ \ x_2 \ge -2 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решить данную задачу графическим методом. Составить задачу двойственную данной, и решить ее, используя симплекс-метод.

Ответ: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 6$, $\min f = 20$,

$y_1^* = 0$, $y_2^* = 4/3$, $y_3^* = 2/3$, $\max \phi = 20$.

К практическому занятию №4

1. В дневном рационе содержание витаминов *A*, *B*, *C* не должно быть менее требуемой величины. Витамины содержатся в трех продуктах. Известно содержание витаминов в единице каждого продукта и цены продуктов. Определить дневной рацион, удовлетворяющий потребность в витаминах при минимальных затратах. Составить взаимно-двойственную задачу и, используя двойственный симплекс-метод, найти решение исходной задачи.

Витамины	**Потребность в витаминах**	**Содержание витаминов в продукте**		
		I	II	III
A	3	2	3	0
B	3	4	1	2
C	5	5	0	4
Стоимость единицы продукции		11	5	6

Ответ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 5/4$, $\min f = 12,5$.

2. На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий прибыль.

Ресурсы	**Наличие ресурсов**	**Затраты ресурсов на единицу продукции**	
		P_1	P_2
S_1	2000	2	4
S_2	1400	4	1
S_3	800	2	1
Прибыль на единицу продукции		40	60

Провести экономический анализ задачи. В связи с этим выяснить:

1) Увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно.

2) Целесообразность включения в план производства нового изделия P_3 с нормой затрат 6, 2, 3 соответственно и с прибылью 80 ден. ед.

Ответ: $x_1^* = 200,\ x_2^* = 400.$

1) Оценка ресурса S_1: $y_1^* = 40/3$,

Оценка ресурса S_2: $y_2^* = 0$,

Оценка ресурса S_3: $y_3^* = 20/3$.

Ресурс S_2 недефицитен. Ресурсы S_1 и S_3 — дефицитны. Наиболее выгодно увеличение объемов ресурса S_1.

2) Изделие P_3 включать в план невыгодно.

К практическому занятию № 5

1. Два торговых склада поставляют продукцию в четыре магазина. Найти распределение перевозок, позволяющее минимизировать общие транспортные издержки.

a_i \ b_j	50	100	75	75
100	4	3	5	6
200	8	2	4	7

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 75 & 25 \end{pmatrix}.$

2. Решить транспортную задачу:

a_i \ b_j	140	300	160
90	2	5	2
400	4	1	5
110	3	6	8

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Решить транспортную задачу:

Поставщики	**Мощности поставщиков**	**Потребители и их спрос**			
		1	2	3	4
		45	35	55	65
1	40	4	1	3	5
2	60	2	2	3	7
3	90	4	3	5	3

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 & 0 \\ 45 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 65 \end{pmatrix}.$

4. Решить транспортную задачу:

Поставщики	**Мощности поставщиков**	**Потребители и их спрос**		
		1	2	3
		80	20	120
1	40	4	2	3
2	60	6	5	3

Поставщики	**Мощности поставщиков**	**Потребители и их спрос**		
		1	2	3
		80	20	120
3	100	1	2	5
4	20	6	4	5

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 \\ 80 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альпина В.С., Бикмухаметова Д.Н.* [и др.]. Линейное программирование. Транспортная задача. Дискретная математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. — Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2017. — 84 с. — Текст: электронный. — URL: http://www.iprbookshop.ru/79316.html.
2. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. Учебное пособие. — М: Наука, 1981. — 304 с.
3. *Высоцкий Л.Л.* Симплекс-метод. Метод потенциалов. Теория игр и линейное программирование. Курс лекций. — Новосибирск: Новосиб. ин-т народ. хоз-ва, 1994. — 70 с.
4. *Глебов В.И., Криволапов С.Я.* Экономико-математические методы (исследование операций). Учебное пособие. — М.: ВГНА, 2003. – 159 с.
5. *Давыдов А.Н.* Линейное программирование: графический и аналитический методы. Учебное пособие. — Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 106 с. — Текст: электронный. URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=438318&razdel=27.
6. *Данциг Дж. В.* Линейное программирование, его применение и обобщения. — М.: Прогресс, 1966. — 600 с.
7. *Канторович Л.В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ, 1939. — 67 с. (вновь опубликовано в сб. В.С. Немчинов (ред.). Применение математики в экономических исследованиях. — Том 1. — М.: Соцэкгиз, 1959. — С. 251–309).
8. *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: АН СССР, 1959.
9. *Канторович Л.В., Залгаллер В.А.* Расчет рационального раскроя промышленных материалов. — Л.: Лениздат, 1951. — 199 с.
10. *Кузнецов В.В.* Задачи математического моделирования и численные методы. Учебное пособие. — Хабаровск: Хабаровск. гос. пед. ун-т, 2000. — 124 с.

11. *Литвин Д.Б.* Линейное программирование. Транспортная задача. Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет; Сервисшкола, 2017. — 84 с. — Текст: электронный. — URL: : https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=484993&razdel=257
12. *Мажукин В.И.* Математическое моделирование в экономике. Ч.1. Численные методы и вычислительные алгоритмы. Ч.2. Лабораторный практикум по численным методам и вычислительным алгоритмам: учебное пособие для вузов по направлению 521500 «Менеджмент» / В.И. Мажукин, О.Н. Королева, Моск. психолого-соц. ин-т (МПСИ). — 3-е изд. — М.: Флинта; Изд-во МПСИ, 2008. — 232 с.
13. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Методы оптимизации. Начальный курс. Ч.1. Основные понятия и определения. Постановка задач и примеры. Курс лекций. — М.: МИИТ, 2005. — 96 с.
14. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Методы оптимизации. Начальный курс. Ч.2. Симплекс-метод и смешанные вопросы, элементы теории двойственности, многокритериальная оптимизация. Курс лекций. — М.: МИИТ, 2006. — 104 с.
15. *Dantzig G.B.* Programming in a linear structure. Washington, Comptroller, USAF, 1948.

Содержание

Учебное издание

Юлианна Вячеславовна **Перепелкина**
Елена Валерьевна **Петрунина,**
Татьяна Викторовна **Истомина**

Методы оптимизации при принятии решений

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор	С.А. Бобко
Редактор\корректор	Ю.Ф. Кравчинская
Технический редактор	К.А. Антонов
Компьютерная верстка	К.А. Антонов

Подписано в печать 03.12.2020. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 7.
Тираж 300 экз. Заказ № 29.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.