

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Богдалова Елена Владимировна
Должность: Проректор по образовательной деятельности
Дата подписания: 23.05.2025 11:37:45
Уникальный программный ключ:
ec85dd5a839619d48ea76b2d23dba88a9c82091a

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение инклюзивного высшего образования**
**«Российский государственный
университет социальных технологий»
(ФГБОУ ИВО «РГУ СоцТех»)**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Б1.О.04 Математический анализ

наименование дисциплины

09.03.04 «Программная инженерия»

шифр и наименование направления подготовки

Управление разработкой программных проектов

направленность (профиль)

Москва 2025

Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств.....
2. Перечень оценочных средств.....
3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций.....
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.....
5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации.....

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине «Математический анализ»

Оценочные средства составляются в соответствии с рабочей программой дисциплины и представляют собой совокупность контрольно-измерительных материалов (типовые задачи (задания), контрольные работы, тесты и др.), предназначенных для измерения уровня достижения обучающимися установленных результатов обучения.

Оценочные средства используются при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Таблица 1 - Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения дисциплины

Код и содержание компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования. ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования. ОПК-1.3. Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.

Конечными результатами освоения дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках контактной работы, включающей различные виды занятий и самостоятельной работы, с применением различных форм и методов обучения (табл. 2).

Таблица 2 - Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины:
1 семестр

Код компетенции	Уровень освоения компетенций	Индикаторы достижения компетенций	Вид учебных занятий ¹ , работы, формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенций ²	Контролируемые разделы и темы дисциплины ³	Оценочные средства, используемые для оценки уровня сформированности компетенции ⁴
ОПК-1		Знает			
	Недостаточный уровень	ОПК-1.1 Не знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 1. Множества и функции. Аксиоматика множества действительных чисел Раздел 2. Числовые последовательности Раздел 3. Предел и непрерывность функций Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одного переменного Раздел 5. Общее исследование функции и построение её графика	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Базовый уровень	ОПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
	Средний уровень	ОПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной		

¹ Лекционные занятия, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа...

² Необходимо указать активные и интерактивные методы обучения (например, интерактивная лекция, работа в малых группах, методы мозгового штурма и т.д.), способствующие развитию у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств.

³ Наименование темы (раздела) берется из рабочей программы дисциплины.

⁴ Оценочное средство должно выбираться с учетом запланированных результатов освоения дисциплины, например:

«Знать» – собеседование, коллоквиум, тест...

«Уметь», «Владеть» – индивидуальный или групповой проект, кейс-задача, деловая (ролевая) игра, портфолио...

			аттестации.		
	Высокий уровень	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
		Умеет			
	Базовый уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 1. Множества и функции. Аксиоматика множеств действительных чисел Раздел 2. Числовые последовательности Раздел 3. Предел и непрерывность функций Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одного переменного Раздел 5. Общее исследование функции и построение её графика	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Средний уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
	Высокий уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		

		Владеет			
Базовый уровень	ОПК-1.3. Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 1. Множества и функции. Аксиоматика множества действительных чисел Раздел 2. Числовые последовательности Раздел 3. Предел и непрерывность функций Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одного переменного Раздел 5. Общее исследование функции и построение её графика	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.	
Средний уровень	ОПК-1.3. Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.			
Высокий уровень	ОПК-1.3. Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.			

2 семестр

Код компетенции	Уровень освоения компетенций	Индикаторы достижения компетенций	Вид учебных занятий ⁵ , работы, формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенций ⁶	Контролируемые разделы и темы дисциплины ⁷	Оценочные средства, используемые для оценки уровня сформированности компетенций ⁸
ОПК-1		Знает			
	Недостаточный уровень	ОПК-1.1. Не знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Предел, непрерывность и частные производные. Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Экстремумы функций.	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Базовый уровень	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 8. Интегральное исчисление функций одной переменной. Неопределённый интеграл	
	Средний уровень	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 9. Интегральное исчисление функций одной переменной. Определённый интеграл. Несобственные интегралы.	
	Высокий	ОПК-1.1. Знает основы	Лекционные и		

⁵ Лекционные занятия, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа...

⁶ Необходимо указать активные и интерактивные методы обучения (например, интерактивная лекция, работа в малых группах, методы мозгового штурма и т.д.), способствующие развитию у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств.

⁷ Наименование темы (раздела) берется из рабочей программы дисциплины.

⁸ Оценочное средство должно выбираться с учетом запланированных результатов освоения дисциплины, например:

«Знать» – собеседование, коллоквиум, тест...

«Уметь», «Владеть» – индивидуальный или групповой проект, кейс-задача, деловая (ролевая)

игра, портфолио...

	уровень	математики, физики, вычислительной техники и программирования.	практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 10. Интегральное исчисление функций одной переменной. Приложения определённого интеграла.	
		Умеет			
	Базовый уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Предел, непрерывность и частные производные. Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Экстремумы функций.	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Средний уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 8. Интегральное исчисление функций одной переменной. Неопределённый интеграл Раздел 9. Интегральное исчисление функций одной переменной. Определённый интеграл. Несобственные интегралы.	
	Высокий уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 10. Интегральное исчисление функций одной переменной. Приложения определённого интеграла.	

		Владеет			
	Базовый уровень	ОПК-1.3. Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Предел, непрерывность и частные производные. Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Экстремумы функций. Раздел 8. Интегральное исчисление функций одной переменной. Неопределённый интеграл	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Средний уровень	ОПК-1.3. Владеет Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 9. Интегральное исчисление функций одной переменной. Определённый интеграл. Несобственные интегралы.	
	Высокий уровень	ОПК-1.3. Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 10. Интегральное исчисление функций одной переменной. Приложения определённого интеграла.	

3 семестр

Код компетенции	Уровень освоения компетенций	Индикаторы достижения компетенций	Вид учебных занятий ⁹ , работы, формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенций ¹⁰	Контролируемые разделы и темы дисциплины ¹¹	Оценочные средства, используемые для оценки уровня сформированности компетенции ¹²
ОПК-1		Знает			
	Недостаточный уровень	ОПК-1.1 Не знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 11. Числовые ряды Раздел 12. Функциональные ряды Раздел 13. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Двойные интегралы Раздел 14. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Тройные интегралы Раздел 15. Элементы математической теории поля	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Базовый уровень	ОПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
	Средний уровень	ОПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
	Высокий	ОПК-1.1.	Лекционные и		

⁹ Лекционные занятия, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа...

¹⁰ Необходимо указать активные и интерактивные методы обучения (например, интерактивная лекция, работа в малых группах, методы мозгового штурма и т.д.), способствующие развитию у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств.

¹¹ Наименование темы (раздела) берется из рабочей программы дисциплины.

¹² Оценочное средство должно выбираться с учетом запланированных результатов освоения дисциплины, например:

«Знать» – собеседование, коллоквиум, тест...

«Уметь», «Владеть» – индивидуальный или групповой проект, кейс-задача, деловая (ролевая)

игра, портфолио...

	уровень	Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования.	практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
		Умеет			
	Базовый уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 11. Числовые ряды Раздел 12. Функциональные ряды Раздел 13. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Двойные интегралы Раздел 14. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Тройные интегралы Раздел 15. Элементы математической теории поля	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Средний уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
	Высокий уровень	ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и обще-инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		

		Владеет			
	Базовый уровень	<i>ОПК-1.3.</i> Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.	Раздел 11. Числовые ряды Раздел 12. Функциональные ряды Раздел 13. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Двойные интегралы Раздел 14. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Тройные интегралы Раздел 15. Элементы математической теории поля	Текущий контроль – устный опрос, разноуровневые задачи, коллоквиум.
	Средний уровень	<i>ОПК-1.3.</i> Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		
	Высокий уровень	<i>ОПК-1.3.</i> Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Лекционные и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, подготовка и сдача промежуточной аттестации.		

2. ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ¹³

Таблица 3
1-3 семестры

№	Наименование оценочного средства	Характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1.	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2	Решение разноуровневых задач (заданий)	Различают задачи и задания: а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; в) творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.	Комплект разноуровневых задач (заданий)
3	Тест	Средство, позволяющее оценить уровень знаний обучающегося путем выбора им одного из нескольких вариантов ответов на поставленный вопрос. Возможно использование тестовых вопросов, предусматривающих ввод обучающимся короткого и однозначного ответа на поставленный вопрос.	Тестовые задания

¹³ Указываются оценочные средства, применяемые в ходе реализации рабочей программы данной дисциплины.

3. ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценивание результатов обучения по дисциплине «Математический анализ» осуществляется в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

Предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль (осуществление контроля всех видов аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающегося с целью получения первичной информации о ходе усвоения отдельных элементов содержания дисциплины) и промежуточная аттестация (оценивается уровень и качество подготовки по дисциплине в целом).

Показатели и критерии оценивания компетенций, формируемых в процессе освоения данной дисциплины, описаны в табл. 4.

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения
ОПК-1, ПК-2		Знает	
	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-1.1, ПК-2.1	Не знает больше половины формулировок определений и теорем, не умеет их применять на практике
	Базовый уровень Оценка, «удовлетворительно»	ОПК-1.1, ПК-2.1	Знает 50% основного материала курса, однако испытывает затруднения при их применении
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-1.1, ПК-2.1	Знает основную часть материала, умеет применять его на практике
	Высокий уровень Оценка «зачтено», «отлично»	ОПК-1.1, ПК-2.1	Свободно владеет основным материалом курса и умеет применять его на практике
		Умеет	
	Базовый уровень	ОПК-1.2, ПК-2.2	Умеет частично применять формулировки, определения и теоремы при решении практических задач
	Средний уровень	ОПК-1.2, ПК-2.2	Умеет по образцу применять формулировки, определения и теоремы при решении практических задач
	Высокий уровень	ОПК-1.2, ПК-2.2	Умеет самостоятельно применять формулировки, определения и теоремы при решении практических задач

		Владеет	
	Базовый уровень	<i>ОПК-1.3, ПК-2.3</i>	<i>Владеет в целом навыками и методами теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.</i>
	Средний уровень	<i>ОПК-1.3, ПК-2.3</i>	<i>Владеет большей частью материала, методами теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.</i>
	Высокий уровень	<i>ОПК-1.3, ПК-2.3</i>	<i>В совершенстве владеет основными навыками и методами теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.</i>

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения

По видам заданий приводится описание того, каким образом необходимо выполнить данное задание, способы и механизмы его выполнения, выбор номера варианта и др. Примеры методических материалов, определяющих процедуру оценивания результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций:

- Методические указания по разработке оценочных средств
- Иные методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения в ходе реализации рабочей программы дисциплины

5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации

Вопросы для коллоквиума

1 семестр

Тема: Понятие числовой последовательности.

Задание. Можно ли $\{c_n\}$ назвать числовой последовательностью, если

1. $c_n = \sqrt{n}$.

2. $c_n = \frac{1}{2n-3}$.

3. $c_n = \frac{n}{2n-4}$.

4. $c_n = \cos n$.

5. $c_n = \sin n$.

6. $c_n = \frac{n+1}{n-1}$

7. $c_n = \frac{n-1}{n+1}$

8. $c_n = 2e^{-3n}$.

9. $c_n = -e^{5n-4}$.

10. $c_n = \sqrt{3n-5}$.

11. $c_n = \sqrt{5-3n}$.

12. $c_n = 3e^{\frac{1}{n-4}}$.

13. $c_n = 2^{3n}$.

14. $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$15. c_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.$$

Тема: Предел функции.

Задание. Найти $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если

$$1. f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}, \quad a = -1.$$

$$2. f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}, \quad a = -3.$$

$$3. f(x) = \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}, \quad a = 0, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0.$$

$$4. f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 5x}, \quad a = 0.$$

$$5. f(x) = \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}, \quad a = 0.$$

$$6. f(x) = \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}, \quad a = 0.$$

$$7. f(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}, \quad a = 0.$$

$$8. f(x) = x^x, \quad a = 0.$$

$$9. f(x) = \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}, \quad a = 0.$$

$$10. f(x) = \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10} \right)^{x+2}, \quad a = 0.$$

$$11. f(x) = (1 + 5x)^{2/x}, \quad a = 0.$$

$$12. f(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{x} \right)^{2+x}, \quad a = 0.$$

$$13. f(x) = \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^{\cos x}, \quad a = 0.$$

$$14. f(x) = (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x)^{x^2+x+1}, \quad a = 0.$$

$$15. f(x) = (\arcsin x + \arccos x)^{1/x}, \quad a = 1/2.$$

Тема: Непрерывные и разрывные функции.

Задание . Определите точку разрыва, характер разрыва и скачок функции f в точке разрыва.

$$1. f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}.$$

$$7. f(x) = \frac{\sin 2x}{x^2}.$$

$$8. f(x) = \frac{1 - \cos 3x}{5x^2}.$$

$$9. f(x) = \frac{|2x+1|}{2x+1}.$$

$$10. f(x) = \frac{2x+1}{|2x+1|}.$$

$$11. f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, & x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3}, & x < -3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \frac{\cos 3x - 1}{x^3}.$$

$$15. f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Тема . Правила Лопиталя.

Задание. Вычислить предел функции f в точке a с помощью правил Лопиталя.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{1-6x}-1+2x}{x^2}, \quad a=0.$$

$$2. f(x) = \frac{e^{x/2} - 2 - x}{x^2}, \quad a=0.$$

$$3. f(x) = \frac{6\sin 2x - 12x}{x^3}, \quad a=0.$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}, \quad a=0.$$

$$5. f(x) = \frac{3\operatorname{tg} 2x - 6x}{x^3}, \quad a=0.$$

$$6. f(x) = \frac{\ln(1-3x) + 3x}{x^2}, \quad a=0.$$

$$7. f(x) = \frac{e^{-5x} - 1 + 5x}{x^2}, \quad a=0.$$

$$8. f(x) = \frac{\arcsin 4x - 4x}{x^3}, \quad a=0.$$

$$9. f(x) = \frac{2\sin 3x - 6x}{x^3}, \quad a=0.$$

$$10. f(x) = \frac{2\ln(1+0,5x) - x}{x^2}, \quad a=0.$$

$$11. f(x) = \frac{x-1}{\ln x}, \quad a=1.$$

$$12. f(x) = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, \quad a=0.$$

$$13. f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x+2}, \quad a=-2.$$

$$14. f(x) = \frac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}, \quad a=-2.$$

$$15. f(x) = \frac{4^{\sin x} - 1}{\sin 2x}, \quad a=0.$$

Тема : Локальные и глобальные экстремумы функции.

Задание. Исследовать функцию f на локальный и глобальный экстремумы на заданном отрезке $[a; b]$.

$$1. f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad [1; 4].$$

2. $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2} - 16$, $[1; 4]$.
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 4]$.
4. $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5$, $[1; 9]$.
5. $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}$, $[0; 3]$.
6. $f(x) = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$, $[2; 4]$.
7. $f(x) = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$, $[-1; 2]$.
8. $f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, $[-1; 7]$.
9. $f(x) = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}$, $[1; 4]$.
10. $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$, $[-4; 2]$.
11. $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$, $[-4; -1]$.
12. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 16}{x - 1} - 13$, $[2; 5]$.
13. $f(x) = 8x + \frac{4}{x^2} - 15$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.
14. $f(x) = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$, $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.
15. $f(x) = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$, $[-1; 2]$.

Тема: Выпуклость и вогнутость, точки перегиба функции.

Задание 7. Исследовать функцию f на выпуклость и вогнутость, найти точку перегиба её графика.

1. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.
2. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 10x + 1$.
3. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 25$.
5. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$.
6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
7. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 7$.
8. $f(x) = x^3 - x^2 - 15x - 3$.
9. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$.

$$10. f(x) = x^3 - 12x^2 + 9x - 8.$$

$$11. f(x) = x^3 - x^2 - x - 1.$$

$$12. f(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$$

$$13. f(x) = x^3 - 7x^2 + 6x - 1.$$

$$14. f(x) = x^3 - x^2 - 10x + 9.$$

$$15. f(x) = -x^3 - x^2 - x + 5.$$

Тема: Асимптоты графика функции f .

Задание. Найти асимптоты графика функции f .

$$1. f(x) = \frac{1 - x^2}{x + 1}.$$

$$2. f(x) = \frac{2 - x^2}{4x - 1}.$$

$$3. f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 5}.$$

$$4. f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}.$$

$$5. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

$$6. f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}.$$

$$7. f(x) = \frac{x^2 + 5}{5 - 3x}.$$

$$9. f(x) = \frac{1 - x^2}{x + 2}.$$

$$10. f(x) = \frac{7 - x^2}{x - 5}.$$

$$11. f(x) = \frac{9 + x^2}{x - 9}.$$

$$12. f(x) = \frac{x^2 - 8}{x + 1}.$$

$$13. f(x) = \frac{8 - x^2}{x - 3}.$$

$$14. f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}.$$

$$15. f(x) = \frac{21 - x^2}{7x + 9}.$$

2 семестр

Тема: Локальный экстремум функции двух переменных.

Задание. Функцию f исследуйте на локальный экстремум.

- 1) $f(x, y) = 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 6.$
- 2) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4.$
- 3) $f(x, y) = 3x^2 + 3xy + 5y^2 + 9.$
- 4) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 4.$
- 5) $f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 7y^2 - 8.$
- 6) $f(x, y) = -7x^2 + 6xy - 5y^2 + 1.$
- 7) $f(x, y) = 10x^2 + 5xy + 3y^2 - 7.$
- 8) $f(x, y) = 6x^2 - xy + 5y^2 + 3.$
- 9) $f(x, y) = 9x^2 + 12xy + 13y^2 + 10.$
- 10) $f(x, y) = -13x^2 + 4xy - y^2 - 7.$
- 11) $f(x, y) = 15x^2 - 4xy + 8y^2 + 9.$
- 12) $f(x, y) = 20x^2 + 11xy + 7y^2 + 10.$
- 13) $f(x, y) = -15x^2 + 9xy - 8y^2 + 13.$
- 14) $f(x, y) = 7x^2 + 8xy + 10y^2 + 1.$
- 15) $f(x, y) = 4x^2 - 13xy + 11y^2 + 12.$

Тема: Несобственные интегралы.

Задание. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы.

1) $\int_{-3}^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}} dx.$

2) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

3) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

4) $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}.$

5) $\int_0^1 \frac{x dx}{x-1}.$

6) $\int_{-\pi/2}^0 \operatorname{tg} x dx.$

7) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

$$9) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$10) \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$11) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^4 + 1}.$$

$$13) \int_0^8 \frac{(3x+2)dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$14) \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx.$$

$$15) \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx.$$

3 семестр

Тема: Ряд Тейлора.

Задание. Функцию f разложите в ряд Тейлора по степеням x и определите интервал сходимости полученного ряда.

$$1) f(x) = e^{-2x}.$$

$$2) f(x) = (1+x)^{1/3}.$$

$$3) f(x) = \cos \frac{x}{2}.$$

$$4) f(x) = \sin \frac{x}{2}.$$

$$5) f(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$

$$6) f(x) = e^{-3x}.$$

$$7) f(x) = e^{5x}.$$

$$8) f(x) = \cos \frac{x}{3}.$$

$$9) f(x) = \sin \frac{x}{3}.$$

$$10) f(x) = \frac{3}{2+x}.$$

$$11) f(x) = \frac{2}{5+x}.$$

$$12) f(x) = e^{-5x}.$$

$$13) f(x) = \cos \frac{x}{7}.$$

$$14) f(x) = \sin \frac{x}{7}.$$

$$15) f(x) = \frac{5}{4+x}.$$

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ПК-2.

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей

Разноуровневые задачи:

1 семестр

1 Задания репродуктивного уровня

Тема: Понятие числовой последовательности.

Задание . Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$, если

$$1. c_n = \frac{(n+3)^2 + (n-3)^2}{(n+1)^2 + (n-1)^2}.$$

$$2. c_n = \frac{n^3 \sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{5n^8 - 2}}{(n + 2\sqrt{n}) \sqrt{3 - n + 5n^2}}.$$

$$3. c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

$$4. c_n = \sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}.$$

$$5. c_n = \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{5n^4+3}}.$$

$$6. c_n = \frac{1+3+\dots+(2n+1)}{1+2+\dots+n}.$$

$$7. c_n = \frac{n! + 3(n+2)!}{(n-1)! + 5(n+2)!}.$$

$$8. c_n = \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^n.$$

$$9. c_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3} \right)^{n^2-1}.$$

$$10. c_n = \frac{2+4+\dots+2n}{n^2+2n+3}.$$

$$11. c_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$12. c_n = \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

$$13. c_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 5} \right)^{3n^2 - 1}.$$

$$14. c_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

$$15. c_n = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}.$$

2 Задания реконструктивного уровня

Тема: Исследование функции и построение её графика.

Задание. Проведите полное исследование функции и постройте её график.

$$1. f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

$$3. f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x}.$$

$$4. f(x) = \frac{4x^2}{3 + x^2}.$$

$$5. f(x) = \frac{12x}{9 + x^2}.$$

$$6. f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}.$$

$$7. f(x) = \frac{4 - x^3}{x^2}.$$

$$8. f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$$

$$9. f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}.$$

$$10. f(x) = \frac{(x-1)}{x^2}.$$

$$11. f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

$$12. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2.$$

$$13. f(x) = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}.$$

$$14. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

$$15. f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}.$$

3 Задания творческого уровня

Тема: Понятие числовой последовательности.

Задание. Докажите по определению, что данные последовательности являются бесконечно малыми.

1. $a_n = \frac{1}{n+1}$.

2. $a_n = \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}$.

3. $a_n = \frac{2n-1}{2n+1} - 1$.

4. $a_n = \frac{5}{2n+1}$.

5. $a_n = \frac{2}{3n-1}$.

6. $a_n = \frac{n}{n^2+1}$.

7. $a_n = \frac{n}{n^2+2}$.

8. $a_n = \frac{5}{4n-3}$.

9. $a_n = \frac{9}{n+10}$.

10. $a_n = \frac{2}{5n-4}$.

11. $a_n = \frac{8}{1+9n}$.

12. $a_n = \frac{2}{-5+6n}$.

13. $a_n = \frac{7}{-9+10n}$.

14. $a_n = \frac{n-1}{n+1} - 1$.

15. $a_n = \frac{2n-1}{n+1} - 2$.

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ПК-2.

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

2 семестр

1 Задания репродуктивного уровня

Тема: Функции многих переменных

Задание . Найдите частные производные f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} и полный дифференциал $d^2 f$ функции $f(x, y)$.

- 1) $f(x, y) = 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 6.$
- 2) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4.$
- 3) $f(x, y) = 3x^2 + 3xy + 5y^2 + 9.$
- 4) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 4.$
- 5) $f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 7y^2 - 8.$
- 6) $f(x, y) = -7x^2 + 6xy - 5y^2 + 1.$
- 7) $f(x, y) = 10x^2 + 5xy + 3y^2 - 7.$
- 8) $f(x, y) = 6x^2 - xy + 5y^2 + 3.$
- 9) $f(x, y) = 9x^2 + 12xy + 13y^2 + 10.$
- 10) $f(x, y) = -13x^2 + 4xy - y^2 - 7.$
- 11) $f(x, y) = 15x^2 - 4xy + 8y^2 + 9.$
- 12) $f(x, y) = 20x^2 + 11xy + 7y^2 + 10.$
- 13) $f(x, y) = -15x^2 + 9xy - 8y^2 + 13.$
- 14) $f(x, y) = 7x^2 + 8xy + 10y^2 + 1.$
- 15) $f(x, y) = 4x^2 - 13xy + 11y^2 + 12.$

2 Задания реконструктивного уровня

Тема 16. Геометрические применения определённого интеграла.

Задание. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделайте чертёж области.

- 1) $3x^2 - 4y = 0, 2x - 4y + 1 = 0.$
- 2) $3x^2 - 4y = 0, 2x - 4y - 1 = 0.$
- 3) $2x - 3y^2 = 0, 2x + 2y + 1 = 0.$
- 4) $3x^2 - 4y = 0, 2x + 2y - 1 = 0.$
- 5) $x^2 - y = 0, x + y = 1.$
- 6) $2x - 3y^2 = 0, 2x + 2y - 1 = 0.$
- 7) $x^2 - y = 0, x - y = -1.$
- 8) $x^2 - 1 + y = 0, y - 1/2 = 0.$
- 9) $y = x^3 + 3, x = 0, y = x - 2, x = 2.$
- 10) $y = x^3 + 2, x = 0, y = x - 2, x = 2.$
- 11) $y = x^3 + 1, x = 0, y = x - 3, x = 2.$
- 12) $y = x^3 - 1, x = 0, y = x - 5, x = 2.$
- 13) $y = x^3 - 2, x = 0, y = x - 6, x = 2.$
- 14) $y = x^3 + 3, x = 0, y = x + 7, x = -2.$
- 15) $y = x^3 - 1, x = 0, y = x + 3, x = -2.$

3 Задания творческого уровня

Тема: Неопределённый интеграл

Задание. Применяя методы интегрирования и табличные интегралы, найдите заданные неопределённые интегралы.

1) $\int \frac{x dx}{7 + x^2}.$

2) $\int \frac{(x + 18) dx}{x^2 - 4x - 12}.$

3) $\int (3 - x) \cos x dx.$

4) $\int \frac{(x + 4) dx}{x^2 - 2x - 8}.$

5) $\int x \ln(1 - 3x) dx.$

6) $\int \frac{dx}{5 - x^2}.$

7) $\int x e^{-5x}.$

8) $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$

9) $\int \arcsin 3x dx.$

10) $\int x \sin 5x dx.$

11) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx.$

12) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{3x+1}}.$

13) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{1 + \sqrt{x}}.$

14) $\int x e^{-x^2} dx.$

15) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ПК-2.

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

3 семестр

1 Задания репродуктивного уровня

Тема: Степенные ряды.

Задание. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследуйте сходимость ряда на концах интервала сходимости.

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 4}{3^n} (x + 3)^n.$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 6}{6^n} (x - 6)^n.$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{n^2 - 4}{3^n} (x - 4)^n.$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2}{2^n} (x + 2)^n.$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 6}{6^n} (x + 6)^n.$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 5}{5^n} (x - 5)^n.$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 2}{2^n} (x - 2)^n.$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 4}{4^n} (x + 4)^n.$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{5^n} (x + 5)^n.$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 3}{3^n} (x - 3)^n.$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 4)^n}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x + 3)^n}{3^n}.$$

$$13) \sum_{n=1}^{+\infty} (2n^2 - 1)(x - 2)^n.$$

$$14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x + 1)^n}{5^n}.$$

$$15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 3)^n}{2^n}.$$

2 Задания реконструктивного уровня

Тема: Двойной интеграл.

Задание . Измените порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделайте чертёж области интегрирования.

$$1) \int_{-1}^0 dx \int_{-8x^3}^{6-3x} f(x, y) dy.$$

$$2) \int_0^1 dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x, y) dx.$$

$$3) \int_0^1 dx \int_{\frac{4x+4}{8x^3}}^{\frac{4x+4}{8x^3}} f(x, y) dy.$$

$$4) \int_{-1}^0 dy \int_{\frac{8y^3}{2y-6}}^{\frac{8y^3}{2y-6}} f(x, y) dx.$$

$$5) \int_{-1}^0 dx \int_{\frac{8x^3}{4x-4}}^{\frac{8x^3}{4x-4}} f(x, y) dy.$$

$$6) \int_0^1 dy \int_{\frac{8y^3}{2y+6}}^{\frac{8y^3}{2y+6}} f(x, y) dx.$$

$$7) \int_0^1 dx \int_{\frac{-8x^3}{-2x-6}}^{\frac{-8x^3}{-2x-6}} f(x, y) dy.$$

$$8) \int_{-1}^0 dy \int_{\frac{-4y+4}{-8y^3}}^{\frac{-4y+4}{-8y^3}} f(x, y) dx.$$

$$9) \int_0^1 dx \int_{\frac{-8x^3}{-4x-4}}^{\frac{-8x^3}{-4x-4}} f(x, y) dy.$$

$$10) \int_{-1}^0 dy \int_{\frac{8y^3}{4y-4}}^{\frac{8y^3}{4y-4}} f(x, y) dx.$$

$$11) \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$12) \int_{-5}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$13) \int_3^5 dx \int_{-\sqrt{8x-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$14) \int_{-3}^{-1} dy \int_{-\sqrt{-4y-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

$$15) \int_{-3}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{-4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

3 Задания творческого уровня

Тема: Числовые ряды.

Задание . Найдите сумму ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}.$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{9n^2 - 6nn - 8}.$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}.$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}.$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}.$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{49n^2 - 7n - 12}.$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}.$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}.$$

$$12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}.$$

$$13) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{16n^2 - 8n - 15}.$$

$$14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}.$$

$$15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}.$$

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ПК-2.

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

ТЕСТЫ

1 семестр.

Предел последовательности и предел функции.

1. Укажите последовательности, сходящиеся к числу 3:

$$1): \frac{3n - 2}{n + 5};$$

$$2): \frac{3n}{n + 5} \sin\left(\frac{2}{n + 5}\right);$$

$$3): \frac{3n}{n + 6} \cos\left(\frac{2}{n + 5}\right);$$

$$4): n(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n}).$$

2. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5} \right)^{2n}.$$

3. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7 - 3 \cos 7n}{\sqrt{n+2}} \right).$$

4. Укажите значение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \sin 2n}{n^2}.$$

5. Укажите значение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n}.$$

6. Найдите значение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

7. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n^2}.$$

8. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 \cos \pi x).$$

9. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x}{x-1} \right).$$

10. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}.$$

11. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\cos \pi x} \right).$$

12. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{2x}.$$

13. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\pi x \operatorname{ctg} 2\pi x).$$

14. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin 2n \cdot \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right).$$

15. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{\cos 2\pi x} \right).$$

Непрерывность. Классификация точек разрыва.

1. Отметьте функции, непрерывные в точке $x = 2$:

1): $y = \operatorname{tg} \pi x$;

2): $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$;

3): $y = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$;

4): $y = \operatorname{ctg} 2\pi x$.

2. Укажите функции, которые имеют разрыв в точке $x = 2$:

1): $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$;

2): $y = \operatorname{tg} \pi x$;

3): $y = \frac{x+2}{\cos(x-2)}$;

4): $y = \begin{cases} \frac{\sin(x-2)}{x-2}, & x > 2 \\ 2, & x \leq 2 \end{cases}$.

3. Укажите величину скачка функции $y = \frac{5|x-1|}{x-1}$ в точке разрыва $x = 1$.

4. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1): $y = x + \operatorname{arcctg} x$;

2): $y = 5 \ln(x-2)$;

3): $y = \sqrt{5 \sin 2x + 3}$;

4): $y = \sqrt{5 - 3 \cos x}$.

5. Запишите величину скачка функции $y = \frac{|x-3|}{2(x-3)}$ в точке разрыва $x = 3$.

6. Запишите величину скачка функции $y = \begin{cases} 3^x, & x \geq 0 \\ 2 \cos x, & x < 0 \end{cases}$ в точке разрыва.

7. Запишите величину скачка функции $y = \begin{cases} \ln(x+1), & x > 0 \\ x^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

8. Укажите функции, которые имеют разрыв в точке $x = 0$:

1): $y = \frac{\sin x}{|\cos x|}$;

$$2): y = \frac{\sin 2x}{x+2};$$

$$3): y = \frac{\sin x}{|x|};$$

$$4): y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

9. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

$$1): y = \ln(x^2 + 1);$$

$$2): y = \sqrt{2 - \sin 3x};$$

$$3): y = \sqrt{2 + 3\cos x};$$

$$4): y = \ln(x+1).$$

$$10. \text{ Укажите величину скачка функции } y = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4}, x > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{4}, x < 1 \end{cases} \text{ в точке } x = 1.$$

$$11. \text{ Укажите величину скачка функции } y = 2|x|\operatorname{ctg} x \text{ в точке } x = 0.$$

$$12. \text{ Укажите величину скачка функции } y = \begin{cases} 3x^2, x > 1 \\ \sin \pi x, x < 1 \end{cases} \text{ в точке } x = 1.$$

13. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

$$1): y = \frac{\sin x}{2^x};$$

$$2): y = \sqrt{2 - 2^x};$$

$$3): y = \frac{\cos x}{\ln(x^2 + 2)};$$

$$4): y = \frac{\operatorname{ctg} \pi(x^2 + 2)}{x^2 + 2}.$$

$$14. \text{ Укажите величину скачка функции } y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x} \text{ в точке } x = 0.$$

$$15. \text{ Укажите величину скачка функции } y = 2\operatorname{arcctg} \frac{3}{x} \text{ в точке } x = 0.$$

Производная. Монотонность и выпуклость.

$$1. \text{ Найдите абсциссу точки максимума функции } y = x^5 - 15x^3 + 5.$$

$$2. \text{ Найдите производную функции } y = \cos \frac{\pi x}{4} \ln(1+x) \text{ в точке } x = 0.$$

$$3. \text{ Под каким углом кривая } y = e^{x-1} - 1 \text{ пересекает ось абсцисс?}$$

4. Проволоку длиной 12 см согнули в виде прямоугольника . Укажите наибольшую возможную площадь прямоугольника (в см²).
5. Укажите точки экстремума функции, если известно, что ее производная имеет вид $y'(x) = 5(x-2)(x+1)^2 x^3$.
6. Найдите точки перегиба функции $y = f(x)$, если ее вторая производная имеет вид $f''(x) = -3(x-1)^2 x^3 (x+2)$.
7. Укажите наибольшее значение функции $y = 3|x-3|$ на отрезке $[2;5]$.
8. Найдите вторую производную от функции в точке $x=1$, если $y(x) = x^2 \ln x$.
9. Найдите первую производную от функции $y(x) = e^{\operatorname{tg} \pi x}$ в точке $x=0$.
10. Найдите точки экстремума функции $y(x) = |x|x^2$.
11. Найдите первую производную от функции $y(x) = \sin(\pi x^2)$ в точке $x=1$.
12. Найдите первую производную от функции $y(x) = (x^2 - 3x)^5$ в точке $x=1$.
13. Найдите вторую производную от функции $y(x) = \sin(\pi x^2)$ в точке $x=1$.
14. Найдите точку максимума функции $y(x) = x^3 e^{-x}$.
15. Найдите точку минимума функции $y(x) = (x^2 - 4x)^5$.

Асимптоты графика функции.

1. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{x}{x-2}$.

1): $y = x$

2): $x=2$; $y=1$

3): $y=1$

4): $x=2$; $y=0$.

2. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 1}{x-2}$.

1): $y = x-2$

2): $x=2$; $y = x+2$

3): $y=1$

4): $x=2$; $y=0$.

3. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{x+2}{x^2-1}$.

1): $y = x$;

2): $x = \pm 1$; $y = 0$;

3): $y = \pm 1$;

4): $x = 2$; $y = 0$.

4. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$.

1): $x = -1$;

2): $x = -1$; $y = x - 1$;

3): $x = -1$; $y = 1$;

4): $x = -1$; $y = 0$.

5. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$.

1): $x = \pm 2$;

2): $x = \pm 2$; $y = 0$;

3): $x = \pm 2$; $y = 1$;

4): $x = \pm 2$; $y = x$.

6. Выберите асимптоты графика функции $y = 2^x - 1$ из перечисленных ниже:

1): $y = 1$;

2): $x = -1$;

3): $y = -1$;

4): $x = -1$; $y = 1$.

7. Выберите асимптоты графика функции $y = 3^{-x} + 1$ из перечисленных ниже:

1): $x = 1$;

2): $y = 1$;

3): $y = -1$;

4): $x = -1$.

8. Выберите асимптоты графика функции $y = 2^{-x} + 2$ из перечисленных ниже:

1): $y = -2$;

2): $y = 2$;

3): $x = 0$;

4): $x = -1$.

9. Выберите асимптоты графика функции $y = 3^x - 4$ из перечисленных ниже:

1): $y = -4$;

2): $y = 0$;

3): $x = 1$;

4): $x = \log_3 4$.

10. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{e^{-2x}}{x+1}$ из перечисленных ниже:

1): $x = -1$;

2): $x = -1$; $y = 1$;

3): $x = -1$; $y = 0$;

4): $x = -1$; $y = -1$.

11. Запишите асимптоты графика функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

1): $y = x$;

2): $x = 1$;

3): $x = 1$; $y = 1$;

4): $x = 1$; $y = 0$.

12. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

1): $x = 1$;

2): $x = 1$; $y = x + 1$;

3): $x = 1$; $y = 1$;

4): $x = 1$; $y = 0$.

13. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

1): $x = \pm 2$;

2): $x = \pm 2$; $y = x$;

3): $x = \pm 2$; $y = 1$;

4): $x = \pm 2$; $y = 0$.

14. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.

1): $x = \pm 1$;

2): $x = \pm 1$; $y = 2x$;

3): $x = \pm 1$; $y = 1$;

4): $x = \pm 1$; $y = 0$.

15. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{-3x^3}{x^2 - 1}$.

1): $x = \pm 1$;

2): $x = \pm 1; \quad y = -3x;$

3): $x = \pm 1; \quad y = 3;$

4): $x = \pm 1; \quad y = x.$

2 семестр

Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции.

Непрерывность

1. Найдите область определения функции $z = \arcsin(x + y)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x + 1$ и $y = -x - 1$;

2) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в квадрате

$$\{(x, y) | -1 < x < 1; -1 < y < 1\};$$

3) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 1$ и $y = -2x - 1$;

4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x$ и $y = -x - 2$;

5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 2$ и $y = -2x - 2$.

2. Найдите область определения функции $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в квадрате

$$\{(x, y) | -2 < x < 2; -2 < y < 2\};$$

2) множество внутренних точек на координатной плоскости Oxy , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в кольце

$$\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\};$$

4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе

$$\{(x, y) | -1 < x < 1\};$$

5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

3. Найдите область определения функции $z = \arccos(x - y)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 1$ и $y = -2x - 1$;
- 2) множество внутренних точек на координатной плоскости Oxy , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;
- 3) множество точек координатной плоскости Oxy , принадлежащих полосе, ограниченной прямыми $y = x + 1$ и $y = x - 1$;
- 4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = x$ и $y = x - 2$;
- 5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 2$ и $y = -2x - 2$.

4. Найдите область определения функции $z = \arcsin\left(\frac{y}{x^2}\right)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в области $\{(x, y) | y < x^2\}$;
- 2) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в области $\{(x, y) | y + 1 < x^2\}$;
- 3) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в области $\{(x, y) | y - 1 < x^2\}$;
- 4) односвязная область на координатной плоскости Oxy , ограниченная двумя параболой $y = x^2$ и $y = -x^2$, и проходящая через ось Ox с выколотой точкой в начале координат;
- 5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в области $\{(x, y) | -1 < y - x^2 < 1\}$.

5. Найдите область определения функции $z = \arccos\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в круге радиуса $r = 1$ с центром в начале координат;
- 2) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в круге радиуса $r = \sqrt{2}$ с центром в начале координат;
- 3) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в квадрате $\{(x, y) | -1 < x < 1; -1 < y < 1\}$;

4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в квадрате

$$\{(x, y) | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}; -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}\};$$

5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в кольце, ограниченной двумя концентрическими окружностями радиусов $r = 1$ и $r = \sqrt{2}$ с центром в начале координат.

6. Найдите предел функции $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ в точке $(0; 0)$.

Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

1. Найдите частные производные $z'_x(M), z'_y(M)$ функции $z(x, y) = \sin(\pi xy)$ в точке $M(1; 2)$. В ответе запишите $z'_x(M)/\pi + z'_y(M)/\pi$.

2. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:
 $z(x, y) = x^2 e^{-xy}, M_0(2; 0)$. В ответе запишите $z'_x(M_0) + z'_y(M_0)$.

3. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:
 $z = y/\sqrt{x}; P_0(1; 2)$. В ответе запишите $z'_x(P_0) + z'_y(P_0)$.

4. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:
 $z = \arctg(xy); P_0(1; 1)$. В ответе запишите $z'_x(P_0) + z'_y(P_0)$.

5. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:
 $z = e^{(x-1)y}; P_0(1; 1)$. В ответе запишите $z'_x(P_0) + z'_y(P_0)$.

6. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $(1,02)^3 (0,97)^2$.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

8. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0,97^{1,05}$.

9. Одна сторона прямоугольника $a = 10$ см, а другая $b = 24$ см. Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм. Найдите и запишите в см величину изменения диагонали прямоугольника:

А) приближенно с помощью дифференциала; В) точную ее величину.

Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции

1. Найдите в указанной точке первые частные производные функции, заданной неявно:

$$z^3 + 3xyz + 1 = 0, M_0(0;1). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

2. Найдите в указанной точке первые частные производные функции, заданной неявно:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0, M_0(1;1;2). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

3. Найдите производную функции $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}$, по направлению $\vec{l} = (6;8)$ в точке

$$M(1;2).$$

4. Найдите производную функции $z = x^2 + xy + 2x + 2y$, по направлению $\vec{l} = (3;4)$ в точке $M(1;1)$.

5. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону

$$T(x; y) = 6x^2 - 5y. \text{ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры}$$

$$J = |\text{grad}T(M_0)| \text{ в точке } M_0(1;1).$$

6. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону

$$T(x; y) = x \sin \pi y. \text{ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры}$$

$$J = |\text{grad}T(M_0)| \text{ в точке } M_0(1;1). \text{ В ответе укажите значение } J/\pi.$$

7. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону

$$T(x; y) = y^2 - 2xy. \text{ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры}$$

$$J = |\text{grad}T(M_0)| \text{ в точке } M_0(1;1).$$

Элементы теории поля

1. Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в указанной точке среди перечисленных ниже:

$$z = \ln(x^2 + y^2); (1; 0; 0).$$

1) $x + 3y - 2z - 2 = 0;$

2) $2x - y + 2z + 1 = 0;$

3) $2x + 2y - z - 1 = 0;$

4) $x + y - 2z - 2 = 0;$

5) $3x - y + 2z + 2 = 0.$

2. Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в указанной точке среди перечисленных ниже:

$$z = \ln(x^2 + y^2); (1; 0; 0).$$

- 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$;
- 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
- 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{2}$;
- 4) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-2}$;
- 5) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

3. Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в указанной точке среди перечисленных ниже:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1; (3; 2; 2).$$

- 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$;
- 2) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$;
- 3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$;
- 4) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$;
- 5) $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$.

4. Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в указанной точке среди перечисленных ниже:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1; (3; 2; 2).$$

- 1) $x + 2y + z = 2$,
- 2) $x + 2y - 3z = 3$,
- 3) $2x + y - z = 2$,
- 4) $x - 3y + z = 3$,
- 5) $3x - 2y - 2z = 1$.

5. Выберите уравнение нормали к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в указанной точке среди перечисленных ниже:

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y; (1; 1; 1).$$

$$1) \frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2};$$

$$2) \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{2};$$

$$3) \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

$$4) \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3};$$

$$5) \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

6. Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в указанной точке среди перечисленных ниже:

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y; (1; 1; 1).$$

$$1) x - 2y + z = 0,$$

$$2) 3x - y - 2z = 2,$$

$$3) x + 2y - z = 2,$$

$$4) 3x - 2y - 2z = 0,$$

$$5) 2x + y - z = 3.$$

Локальный и глобальный экстремумы

1. Найдите точку локального минимума $M(x_0; y_0)$ функции $f(x; y) = x^2 - 2x + 2y^2$. В ответе укажите сумму $x_0 + y_0$.

2. Найдите точку локального минимума $M(x_0; y_0)$ функции $f(x; y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$. В ответе укажите сумму $x_0 + y_0$.

3. Найдите точку локального максимума $M(x_0; y_0)$ функции $f(x; y) = -4x^2 - y^2 + 4y$. В ответе укажите сумму $x_0 + y_0$.

4. Найдите условные экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

5. Найдите наибольшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в 1-ой четверти $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Неопределенный интеграл, методы интегрирования.

1. Определите функцию $f(x)$, для которой $F(x) = f(x)$, где $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$:

- 1): $c \cdot e^x$;
- 2) $\ln x$;
- 3) $c \cdot \sin x$;
- 4) $\cos x$.

2. Найдите интеграл $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$.

- 1): $\cos 2x + c$;
- 2): $\sin 2x + c$;
- 3): $x + \frac{1}{2} \cos 2x + c$;
- 4): $\sin 2x + \cos 2x + c$.

3. Найдите интеграл $\int \cos(2 - x) dx$.

- 1): $2x - \sin x + c$;
- 2): $\cos(x - 2) + c$;
- 3): $2 \sin x + c$;
- 4): $\sin(x - 2) + c$.

4. Найдите интеграл $\int \cos 2x dx$.

- 1): $-\sin 2x + c$;
- 2): $2 \sin x + c$;
- 3): $-2 \cos x + c$;
- 4): $\frac{1}{2} \sin 2x + c$.

5. Найдите интеграл $\int 2^{x+1} dx$.

- 1): $2^{x+2} + c$.
- 2): $\frac{2^{x+1}}{\ln 2} + c$;
- 3): $2^x \ln 2 + c$;
- 4): $\frac{2^x}{\ln 2} + c$.

6. Найдите интеграл $\int \left(\frac{x-1}{x^2} \right) dx$.

- 1): $\ln|x| - \frac{1}{x^2} + c$;
- 2): $\ln|x-1| + c$;
- 3): $(x-1)\ln|x| + c$;
- 4): $\frac{1}{x} \ln|x| + c$.

7. Найдите интеграл $\int x(x+1)^5 dx$.

1): $\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6} + c$;

2): $\frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + c$;

3): $\frac{(x+1)^7}{7} + c$;

4): $\frac{x(x+1)^6}{6} + c$.

8. Найдите интеграл $\int x(x-1)^4 dx$.

1): $\frac{(x-1)^6}{6} + c$;

2): $\frac{x(x-1)^5}{5} + c$;

3): $\frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} + c$;

4): $\frac{x^2(x-1)^5}{5} + c$.

9. Найдите интеграл $\int x(x-1)^{10} dx$.

1): $\frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + c$;

2): $\frac{x(x-1)^{12}}{12} + c$;

3): $\frac{x^2(x-1)^{11}}{11} + c$;

4): $\frac{x^2(x-1)^{10}}{2} + c$.

10. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1): $\int \sin x^2 \cdot 2x dx = \int \sin x^2 d(x^2)$;

2): если $F(x) = f(x)$, где $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$, то $f(x) = ce^x$;

3): $\int \ln x^2 dx = 2 \int \ln |x| dx$;

4): $\int \frac{x - 2\sqrt{x} \sin x}{\sqrt{x}} dx = \int x dx - 2 \int \sin x dx$.

11. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1): $\int \sin \sqrt{x} \cdot 2x dx = \int \sin \sqrt{x} dx \cdot \int 2x dx$;

2): $\int (\cos x - \sin x)^2 dx = \int dx - \int \sin 2x dx$;

3): $\int 6 \ln \sqrt[3]{x} dx = 2 \int \ln x dx$

4): если $F(x) = f(x)$, где $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$, то $F(x) = \ln x$.

12. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1): $\int \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx$;

2): $\int 2x dx = x^2 + 4$;

3): $\int (\sin x + 1)^2 dx = \int \sin^2 x dx + \int 2 \sin x dx + \int dx$;

4): $\int 2^x \sqrt{x} dx = \int 2^x dx \cdot \int \sqrt{x} dx$.

13. Функция $f(x)$ имеет производную $f'(x) = x + 1$. Укажите, какие из приведенных ниже функций могут считаться функцией $f(x)$:

1): $\frac{x^2}{2} + x + 2$;

2): $(\frac{x+1}{2})^2 + 2$;

3): $\frac{x^2}{2} + x$;

4): $\frac{(x+1)^2}{2} - 2$

14. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1): $\int x^{-10} dx = -\frac{1}{x^9} + c$;

2): $\int 3^{2x} dx = \frac{9^x}{\ln 9} + 3$;

3): $\frac{5x+1}{x+1} = 5 - \frac{4}{x+1}$;

4): $\int \cos(x-1) dx = -\sin(1-x) + c$.

15. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

1): $\int (2^{x+3} - 16\sqrt{x}) dx = 8 \left[\int 2^x dx - \int x dx \right]$;

2): $\int (\cos x + \sin x)^2 dx = \int dx + \int \sin 2x dx$;

3): если $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$, то $\left[F(x) - x^2 \right]$ - первообразная от функции $\left[f(x) - 2x \right]$;

4): если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные от одной функции $f(x)$ так, что $F_1(x) = 2F_2(x)$, то $f(x) = 0$.

Определенный интеграл, формула Ньютона-Лейбница.

1. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_2^4 7(x-3)^6 dx.$$

2. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_2^4 9(x-3)^8 dx.$

3. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_2^4 10(x-3)^9 dx.$$

4. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_0^2 9(x-1)^8 dx.$$

5. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_0^2 11(x-1)^{10} dx.$

6. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_0^2 (x-1)^{11} dx.$$

7. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_1^3 (x-2)^9 dx.$

8. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_1^3 11(x-2)^{10} dx.$

9. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_3^5 7(x-4)^6 dx.$

10. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2) \sin x dx.$$

11. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cos x dx.$$

12. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx.$$

13. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (x+1) \sin x dx.$$

14. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

15. Вычислите интеграл:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x-1) \sin x dx.$$

Приложения определенного интеграла.

1. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{2-x}; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = 0. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

2. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{8-x}; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = 0. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

3. Запишите значение площади S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{18-x}; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = 0.$$

4. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2; \quad y = 1. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

5. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2; \quad y = 4. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

6. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 1; \quad y = 2. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

7. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2; \quad y = 2x. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

8. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2; \quad y = -2x. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

9. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4 - x^2; \quad y = 0. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

10. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 1; \quad y = 0. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

11. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2; \quad y = 2x. \text{ В ответе укажите значение } 3S.$$

12. Найдите площадь треугольника, образованного прямой

$$l: 3x - 4y = 12 \text{ с осями координат.}$$

13. Найдите площадь треугольника, образованного прямой

$$l: x + 2y - 4 = 0 \text{ с осями координат.}$$

14. Найдите площадь треугольника, образованного прямой

$$l: x - 3y + 6 = 0 \text{ с осями координат.}$$

15. Найдите площадь треугольника, образованного прямой

$$l: 2x + 3y - 6 = 0 \text{ с осями координат.}$$

Несобственный интеграл.

1. Вычислите несобственный интеграл с бесконечными пределами $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. В ответе укажите значение $\frac{1}{\pi} J$.

2. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $J = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$.

3. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(3+x)^2}. \text{ В ответе укажите значение } 4J.$$

4. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

5. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

6. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^3}.$$

7. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

8. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$J = \int_0^{\infty} e^{-2x} dx. \text{ В ответе укажите значение } 2J.$$

9. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ В ответе укажите значение } \frac{2}{\pi} J.$$

10. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

11. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

12. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

13. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

14. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}. \text{ В ответе укажите значение } 3J.$$

15. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x+x^3}. \text{ В ответе укажите значение } 3J.$$

3 семестр

Числовые ряды. Сумма ряда. Признаки сходимости

1. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

2. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

3. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{4}{4 \times 5} + \frac{4}{5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7} + \dots + \frac{4}{(n+3)(n+4)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

4. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

5. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{6}{1 \times 4} + \frac{6}{4 \times 7} + \dots + \frac{6}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

6. Найдите и запишите сумму числового ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{36} + \frac{27}{216} + \dots + \frac{3^n}{6^n} + \dots$$

+:1.0

7. Найдите и запишите сумму числового ряда

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$$

8. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2n}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

9. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos^2 n}{n^2}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n}.$$

10. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n+5}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n.$$

11. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3n+7}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}.$$

12. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n + 7}{n^3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

13. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

14. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+2}-n); 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{2n}.$$

15. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^2; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+n}{n^2}\right)^2; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}.$$

16. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4+2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n.$$

17. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + 1}{n^2}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}.$$

18. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n + 5}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{2n}.$$

19. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n); 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - \sin 2n}{n^2}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2\sqrt{n}}{3n\sqrt{n}}.$$

20. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n!}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 3} - n^2).$$

Степенные ряды и приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов

1. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

чтобы найти число e^{-1} с точностью до 0,01?

2. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

чтобы найти число $e^{-1/2}$ с точностью до 0,01?

3. Сколько нужно взять членов ряда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

чтобы найти число $\ln 2$ с точностью до 0,01?

4. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

чтобы найти число $\sin 0.5$ с точностью до 0,01?

5. Сколько нужно взять членов ряда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

чтобы найти число $\cos 0.5$ с точностью до 0,01? 6. Найдите радиус сходимости

степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

7. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

8. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

9. Найдите радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$. В ответе укажите значение $3R$.

10. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

11. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

12. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

13. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

14. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

15. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{5n-1}$.

16. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{n+5}$.

17. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{2n}}$.

18. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена, вычислите приближенно e^{-1} с точностью до $\Delta = 0.01$.

19. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 1$ с точностью до $\Delta = 0.01$.

20. Используя табличное разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{11}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

21. Используя табличное разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt[3]{30}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

22. Используя табличное разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{84}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

23. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно

интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до $\Delta = 0.0001$.

24. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно

интеграл $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

25. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно

интеграл $\int_0^{0.25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Двойной интеграл

1. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D (x+5y) dx dy, \quad D = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}:$$

2. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 2) dx dy, \quad D = \{(x; y) | 2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3\}$$

3. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D (x+y) dx dy, \quad \text{где } D \text{ — множество точек плоскости, ограниченное линиями}$$
$$y = x, y = x^2.$$

4. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D 4xy dx dy, \quad \text{где } D \text{ — множество точек плоскости, ограниченное прямыми}$$
$$x = 1, y = x, y = 3x.$$

5. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D 2^{y-x} dx dy, \quad \text{где } D \text{ — множество точек плоскости, ограниченное прямыми}$$
$$x = 0; x = \ln 2; y = x; y = x + 1.$$

6. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D xy dx dy, \quad \text{где } D \text{ — множество точек плоскости, ограниченное линиями}$$
$$y = 0, y = 1 - x^2.$$

7. Вычислите двойной интеграл:

$\iint_D x \, dx dy$, где D – множество точек плоскости, ограниченное линиями

$$x = -1, x = 2, y = x + 2, y = x^2.$$

8. Вычислите двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$J = \iint_D (4x^2 + 4y^2 + 6) dx dy, \text{ где } D = ((x; y): x^2 + y^2 \leq 1).$$

В ответе укажите значение J/π .

9. Вычислите двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$J = \iint_D (3\sqrt{x^2 + y^2} - 2) dx dy, \text{ где } D = ((x; y): x^2 + y^2 \leq 4).$$

В ответе укажите значение J/π .

Приложения двойного интеграла

1. Найдите сумму координат центра тяжести однородного треугольника, ограниченного прямыми:

$$x + y = 1; \quad x = 0; \quad y = 0.$$

2. Вычислите ординату y_0 центра тяжести однородной пластины, занимающей верхнюю половину круга: $x^2 + y^2 \leq 25, (y \geq 0)$. В ответе укажите значение $3\pi y_0$.

3. Вычислите ординату y_0 центра тяжести однородной пластины, занимающей верхнюю половину круга: $x^2 + y^2 \leq 9, (y \geq 0)$. В ответе укажите значение πy_0 .

4. Вычислите ординату y_0 центра тяжести однородной пластины, занимающей верхнюю половину круга: $x^2 + y^2 \leq 4, (y \geq 0)$. В ответе укажите значение $3\pi y_0$.

5. Вычислите момент инерции J_{00} квадрата со стороной $a = 2$ относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к плоскости квадрата. В ответе укажите значение $3J_{00}$.

6. Вычислите момент инерции однородной пластины в форме прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = 2, y = 0, y = 3$ относительно начала координат.

7. Вычислите момент инерции J_{00} однородной пластины в форме прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ относительно начала координат. В ответе укажите значение $3J_{00}$.

8. Вычислите момент инерции относительно оси X для однородной пластины в форме треугольника, образованного прямыми $x + y = 2, x = 2, y = 2$. Представьте чертеж.

9. Вычислите момент инерции J_{00} квадрата со стороной $a = 2$ относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к плоскости квадрата. В ответе укажите значение $3J_{00}$.

Криволинейный интеграл. Формула Грина (о связи криволинейного и двойного интегралов).

1. Применяя формулу Грина, вычислите интеграл

$$J = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy \quad \text{по окружности } C: x^2 + y^2 = 4,$$

пробегаемой против хода часовой стрелки. В ответе запишите J/π .

2. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t :

$$\vec{F}(x; y) = (y; x + y); L: x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1.$$

3. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t : $\vec{F}(x; y) = (x; y^2)$; $L: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

4. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t : $\vec{F}(x; y) = (x; y^2)$; $L: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$.

5. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t :

$$\vec{F}(x; y) = (y; x + y); L: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 1.$$

6. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t : $\vec{F}(x; y) = (x; y^2)$; $L: x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

7. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$$

вдоль прямой L_{OA} , выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

8. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$$

вдоль параболы L_{OA} , осью симметрии которой является oy ,

выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

9. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$$

вдоль параболы L_3 , осью симметрии которой является Ox ,
выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

10. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$$

вдоль ломаной $L_4 = L_{OBA}$, (где $B(2;0)$),
выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

11. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$$

вдоль ломаной $L_5 = L_{OCA}$, (где $C(0;1)$),
выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

12. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx + x^2dy$$

вдоль различных путей (см. предыдущий пример), выходящих из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающихся в точке $A(2;1)$:

- а) прямой $L_1 = L_{OA}$;
- б) параболы L_2 , осью симметрии которой является Oy ;
- в) параболы L_3 , осью симметрии которой является Ox ;
- г) ломаной $L_4 = L_{OBA}$, где $B(2;0)$;
- д) ломаной $L_5 = L_{OCA}$, где $C(0;1)$.

Вопросы для подготовки к экзамену Первый семестр

- 1. Основные понятия и символы из теории множеств.
- 2. Операции над множествами.
- 3. Понятие функции.

4. Суперпозиция функций. Тожественная и обратная функции. Сумма и произведение двух функций. График функции на координатной плоскости.
5. Классификация функций.
6. Аксиоматика множества действительных чисел и некоторые следствия из неё.
7. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Наименьший и наибольший элементы числового множества.
8. Понятие числовой последовательности. Классификация числовых последовательностей.
9. Арифметические действия над числовыми последовательностями.
10. Бесконечно малые и большие числовые последовательности, их свойства.
11. Понятие предела числовой последовательности, три равносильных определения предела, их символическая запись. Сходящиеся и расходящиеся последовательности.
12. Свойства сходящихся числовых последовательностей.
13. Сходимость и расходимость монотонных последовательностей.
14. Сходимость и расходимость последовательностей.
15. Дискретный вариант первого замечательного предела:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n} / \frac{\pi}{n} \right) = 1.$$
16. Дискретный вариант второго замечательного предела: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$
17. Понятие о фундаментальной последовательности. Критерий Коши.
18. Неопределённости. Основные приёмы вычисления пределов.
19. Последовательность вложенных отрезков, теорема о существовании единственной точки, принадлежащей всем отрезкам.
20. Бесконечно малые и большие функции в точке. Предел функции в точке, определения по Коши, по Гейне и их равносильность.
21. Основные свойства предела. Замена переменной при вычислении пределов.
22. Критерий Коши.
23. Пределы монотонных функций.
24. Первый замечательный предел.
25. Второй замечательный предел.
26. Односторонние пределы. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва первого и второго типов.
27. Непрерывность сложной функции. Существование обратной функции, её непрерывность и монотонность.
28. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.
29. Непрерывность элементарных функций.
30. Показательная, степенная, показательно-степенная и логарифмическая функции.
31. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Первый и второй замечательные пределы.
32. Сравнение функций. Эквивалентные функции в точке. Таблица эквивалентных бесконечно малых и её применение при вычислении пределов.
33. Асимптоты.
34. Производная функции. Две задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, её геометрический и механический смысл.
35. Дифференциал функции. Дифференцируемость функции, критерий дифференцируемости.

36. Свойства производной.
37. Производные от сложной и обратной функций. Производные от обратных тригонометрических функций.
38. Гиперболические функции и их производные.
39. Производные и дифференциалы высших порядков.
40. Теоремы о дифференцируемых функциях.
41. Правила Лопиталья и их применения при вычислении пределов.
42. Полином и формула Тейлора. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора.
43. Монотонность функций.
44. Стационарные и критические точки функции. Локальные и глобальные экстремумы функций. Определения.
45. Необходимое условие существования точки локального экстремума функции.
46. Достаточные условия существования точки локального экстремума функции.
47. Алгоритм исследования функции на локальный экстремум при помощи производной первого порядка.
48. Алгоритм исследования функции на локальный экстремум при помощи производной второго порядка.
49. Выпуклость и вогнутость функций.
50. Алгоритм общего исследования функции и построение её графика.

Второй семестр

1. Арифметическое пространство R^n .
2. Функции многих переменных. График функции двух переменных.
3. Предел числовых последовательностей. Предел функции в точке и его свойства.
4. Непрерывность функции в точке, её свойства.
5. Свойства непрерывных функций в компакте.
6. Приращения, частные производные и дифференциал.
7. Критерий дифференцируемости.
8. Производная по направлению и градиент. Геометрический смысл частных производных.
9. Касательная плоскость к поверхности.
10. Нормаль к поверхности.
11. Дифференцирование сложной функции.
12. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
13. Формула Тейлора.
14. Неявные функции.
15. Квадратичная форма второго дифференциала: матрица Гессе и её определитель.
16. Необходимое условие существования точки локального экстремума.
17. Критические и стационарные точки функции многих переменных.
18. Достаточные условия. Критерий Сильвестра.
19. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
20. Глобальный экстремум функции в компакте.
21. Первообразная функция и её свойства.
22. Неопределённый интеграл и его свойства.
23. Метод подстановки в неопределённом интеграле.
24. Метод замены переменной в неопределённом интеграле.
25. Метод по частям в неопределённом интеграле.

26. Интегрирование рациональных дробей.
27. Интегрирование простейших иррациональных функций.
28. Интегрирование простейших тригонометрических функций.
29. Определённый интеграл .
30. Достаточные условия существования определенного интеграла.
31. Теорема о среднем и её применения.
32. Свойства определённого интеграла.
33. Формула Ньютона-Лейбница.
34. Метод подстановки в определённом интеграле.
35. Метод замены переменной в определённом интеграле.
36. Метод по частям в определённом интеграле.
37. Несобственные интегралы.
38. Геометрические применения определённого интеграла: длина дуги.
39. Геометрические применения определённого интеграла: площадь криволинейной трапеции.
40. Геометрические применения определённого интеграла: объём тела.
41. Геометрические применения определённого интеграла: площадь поверхности вращения.
42. Физические применения определённого интеграла: вычисление пути, пройденного телом, движущегося с переменной скоростью.
43. Физические применения определённого интеграла: вычисление работы переменной силы.
44. Физические применения определённого интеграла: вычисление координат центра тяжести кривой.

Третий семестр

1. Основные понятия о числовых рядах.
2. Признак сравнения для положительных рядов.
3. Признак Даламбера для положительных рядов.
4. Признак Коши для положительных рядов.
5. Интегральный признак сходимости для положительных рядов.
6. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.
7. Признак Абеля для произвольных числовых рядов.
8. Основные понятия о функциональных последовательностях.
9. Основные понятия о функциональных рядах.
10. Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда.
11. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда.
12. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
13. Ряд Тейлора.
14. Ряд Фурье (общие понятия).
15. Двойной интеграл, его определение и свойства.
16. Сведение двойного интеграла к повторному.
17. Двойной интеграл в полярных координатах.
18. Геометрические приложения двойного интеграла: вычисление площади плоской фигуры.
19. Геометрические приложения двойного интеграла: вычисление площади поверхности.
20. Геометрические приложения двойного интеграла: вычисление объёма.
21. Физические приложения двойного интеграла: вычисление массы пластины переменной плотности, координаты центра тяжести и моментов инерции пластины.
22. Тройной интеграл, его определение и свойства.

23. Геометрические и физические приложения тройного интеграла: вычисление объёма тела, вычисление массы тела переменной плотности, координаты центра тяжести и моментов инерции тела.
24. Скалярное поле. Примеры скалярных полей.
25. Линии и поверхности уровня скалярного поля.
26. Векторное поле. Примеры скалярных полей. .
27. Вектор функция скалярного аргумента, примеры.
28. Предел и непрерывность вектор функции.
29. Линейный интеграл в векторном поле, его свойства.
30. Вычисление линейного интеграла.
31. Независимость линейного интеграла от пути интегрирования.
32. Формула Грина (о связи двойного и криволинейного интегралов).
33. Операторы Гамильтона и Лаплас